



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



10

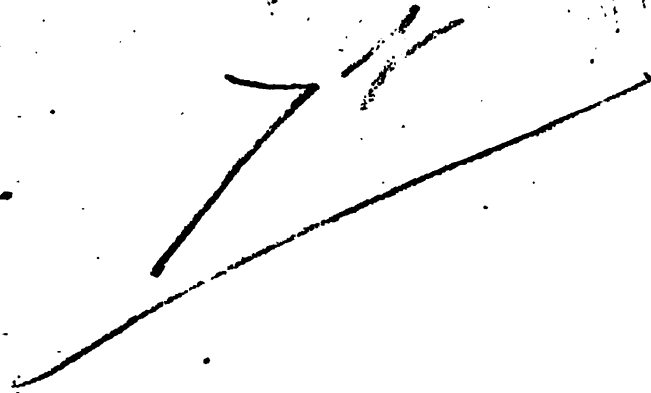
—



QA  
435  
4691  
1707

John W. Brown





*Hospital*

**T R A I T É**  
**A N A L Y T I Q U E**  
**D E S**  
**SECTIONS CONIQUES**  
**ET DE LEUR USAGE**  
POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS  
dans les Problèmes tant déterminez qu'indéterminez.

**O U V R A G E P O S T H U M E**  
De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, *Academicien*  
*Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.*

**A P A R I S,**  
La Veuve de JEAN BOUDOT, Imprimeur Ordinaire du Roi, & de  
l'Academie Royale des Sciences ;  
ET  
Chez JEAN BOUDOT Fils, Imprimeur Ordinaire du Roy & de l'Acade-  
mie Royale des Sciences, rue S. Jacques, au Soleil d'Or, près S. Severin.

**M. D C C V I L**  
**AVEC PRIVILEGE DU ROI.**





# AVERTISSEMENT DU LIBRAIRE.

|| *L'illustre & sçavant Auteur de cet  
Ouvrage étoit sur le point de le  
donner au Public, lorsqu'il mourut  
âgé seulement de quarante-trois ans:  
ce fut au commencement de 1704.*

*Le Manuscrit en étoit sans Préface que ce seul  
Auteur pouvoit bien faire: c'est pour cela qu'il ne  
s'en trouve point ici. Mais le titre suffira sans  
doute aux Connoisseurs, pour voir de quelle con-  
séquence en Géometrie est la matiere de ce Livre,  
& la grande réputation de M. le Marquis de  
l'Hôpital en ce genre, répond aussi assez, ce me  
semble, de l'habileté avec laquelle j'ai appris  
que cette matiere y est traitée. C'est ce qui m'a  
déterminé à imprimer ce Manuscrit tel qu'il étoit,  
sans autre soin que de faire en sorte qu'il le fût le*

## AVERTISSEMENT.

plus correctement qu'il me seroit possible, en cherchant quelque habile Géometre, qui voulût bien veiller à l'impression. C'est aussi ce que la considération des Sçavans pour l'Auteur, & l'estime pour l'Ouvrage que plusieurs avoient déjà vu en Manuscrit, m'ont fait heureusement trouver : estime déjà tellement répandue, que les empressement d'un très-grand nombre de Mathematiciens pour cet Ouvrage, qui pendant le cours de l'impression venoient me le demander avec une espece d'impatience de le voir, sur tout les jeunes Geometres, qui sur ce qu'ils en avoient entendu, le regardoient comme devant leur faciliter l'entrée à la sublime Analyse des Infiniment petits de l'Auteur, m'ont forcé en quelque façon de le donner sans la Préface que je pensois pourtant à y faire faire, me disant qu'ils aimoient mieux s'en passer, que d'attendre plus long-temps que la maladie d'un des deux Géometres qui ont bien voulu revoir les Epreuves de cet Ouvrage, ou les affaires de l'autre, permissent à un d'eux de la faire. Ces empressement, les soins de ces deux Messieurs, & les miens, me font esperer que le Lecteur sera content & du fond de l'Ouvrage, & de la maniere correcte dont il est imprimé. C'est tout ce qu'en peut dire un homme de ma profession : les Geometres en jugeront.

TRAITE



# T A B L E.

LIVRE PREMIER.	
<i>De la Parabole.</i>	page 1
LIVRE SECOND.	
<i>De l'Ellipse.</i>	19
LIVRE TROISIEME.	
<i>De l'Hyperbole.</i>	47
LIVRE QUATRIEME.	
<i>Des trois Sections Coniques.</i>	87
LIVRE CINQUIEME.	
<i>De la Comparaison des Sections Coniques entr'elles, &amp; de leurs Segmens.</i>	122
LIVRE SIXIEME.	
<i>Des Sections Coniques considérées dans le Solide.</i>	166
LIVRE SEPTIEME.	
<i>Des Lieux Geometriques.</i>	208
LIVRE HUITIEME.	
<i>Des Problèmes indéterminés.</i>	249
LIVRE NEUVIEME.	
<i>De la Construction des Egalités.</i>	291
LIVRE DIXIEME.	
<i>Des Problèmes déterminés.</i>	362

F I N.

(2)

6.

61

1. ?

•



# TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES,

*Et de leur usage pour la Résolution des Equations dans les  
Problèmes tant déterminés qu'indéterminés.*

---

## LIVRE PREMIER.

*De la Parabole.*

### DÉFINITIONS.

I.

YANT placé sur un plan une Règle *BC*, & une E'querre *GDO*, en sorte que l'un de ses côtés *DG* soit couché le long de cette règle, on prendra un fil *FMO* égal en longueur à l'autre côté *DO* de cette équerre, duquel l'on attachera un bout à l'extrémité *O* de ce côté *DO*, & l'autre bout en un point quelconque *F* pris sur ce plan du même côté de l'équerre par rapport à la règle. Maintenant

A

si l'on fait glisser le côté  $DG$  de l'équerre le long de la règle  $BC$ , & qu'en même tems l'on se serve d'un style  $M$  pour tenir toujours le fil tendu, & la partie  $MO$  toute jointe & comme collée contre le côté  $OD$  de l'équerre; la courbe  $AMX$  que le style  $M$  décrit dans ce mouvement, est une portion de Parabole.

Si l'on renverse l'équerre de l'autre côté du point fixe  $F$ , on décrira en la même façon l'autre portion  $AMZ$  de la même Parabole; de sorte que la ligne  $XAZ$  ne fera qu'une même courbe qu'on appelle *Parabole*.

La ligne  $BC$  dans laquelle le bord inférieur de la règle immobile  $BC$  touche le plan & le côté  $DG$  de l'équerre  $GDO$ , est appelée *Directrice*.

Le point fixe  $F$  du plan, est nommé le *Foyer* de la Parabole.

Si l'on mène du point fixe  $F$ , sur la directrice  $BC$  une perpendiculaire  $FE$  qui rencontre la parabole au point  $A$ ; la ligne  $AF$  indéfiniment prolongée du côté de  $F$ , est appelée *l'Axe* de la parabole.

La ligne  $p$  quadruple de  $AF$ , est appelée *Parametre* de l'axe.

Toutes les lignes comme  $MP$  menées des points de la parabole perpendiculairement à l'axe, sont appelées *Ordonnées* à l'axe.

Toutes les lignes comme  $MO$  menées des points de la parabole parallèlement à l'axe, en sont les *Diametres*.

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, & qui étant continuée de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appelée *Tangente* en ce point.

## COROLLAIRE I.

1. IL suit de la définition de la Parabole, que si l'on tire par un de ses points quelconques  $M$  au foyer  $F$  une ligne droite  $MF$ , & sur la directrice  $BC$  une perpendiculaire  $MD$ ; les droites  $MF$ ,  $MD$ , seront toujours égales entre elles. Car si l'on retranche du côté  $OD$  de l'équerre & du fil  $OMF$  qui \* lui est égal, la partie commune  $OM$ , \* *Déf. 1.* il est visible que les parties restantes  $MD$ ,  $MF$ , seront toujours égales entre elles.

## COROLLAIRE II.

2. DE-LA il est évident, que si l'on mène une ligne droite quelconque  $KK$  parallèle à la directrice  $BC$ , & que d'un point quelconque  $M$  de la parabole, on tire sur cette ligne la perpendiculaire  $MK$ , & au foyer la droite  $MF$ ; la différence ou la somme  $KD$  des deux droites  $MF$ ,  $MK$ , sera toujours la même : savoir la différence lorsque le point  $M$  tombe au dessous de  $KK$ , & la somme lorsqu'il tombe au dessus.

## COROLLAIRE III.

3. IL est évident que  $FE$  est divisée en deux parties égales par la parabole au point  $A$ . Car supposant que le point  $M$  tombe au point  $A$ , la ligne  $MF$  tombe sur  $AF$ , & la ligne  $MD$  sur  $AE$ , qui seront par conséquent égales entre elles; puisque  $MF$  est toujours \* égale à  $MD$ , \* *Art. 1.* en quelque endroit de la parabole que tombe le point  $M$ .

## COROLLAIRE IV.

4. DE-LA on voit comment on peut décrire une parabole  $XAZ$ , l'axe  $AP$  dont le point  $A$  est l'origine étant donné, avec son paramètre  $p$ . Car ayant pris sur l'axe  $AP$  de part & d'autre du point  $A$  les parties  $AF$ ,  $AE$  égales chacune au quart de son paramètre  $p$ , & mené par le point  $E$  la perpendiculaire indéfinie  $BC$  sur  $FE$ ; si l'on couche le bord inférieur d'une règle sur cette ligne

$BC$  qui sert de directrice, & que par le moyen d'une équerre  $ODG$ , & d'un fil  $FMO$  égal au côté  $OD$ , & attaché par l'un de ses bouts au foyer  $F$ , & par l'autre bout à l'extrémité  $O$  de ce même côté, l'on décrive une Parabole  $XAZ$  comme l'on a enseigné dans la définition première, il est visible qu'elle sera celle qu'on demande.

\* *Def. 1.* Il n'est pas moins visible que plus le côté  $OD$  de l'équerre & le fil  $OMF$  (qui\* lui doit être égal) sera long, plus aussi la portion de la parabole qu'on décrira sera grande; de sorte qu'on la peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également le côté  $OD$  de l'équerre & le fil  $OMF$ .

## COROLLAIRE V.

\* *Art. 3.* 5. SI d'un point quelconque  $M$  de la Parabole l'on mène une ordonnée  $MP$  à l'axe, & au foyer  $F$  la droite  $MF$ ; il est clair que cette ligne  $MF = AP + AF$ , puisque  $MF = MD = AP + AE$ , & que\*  $AF = AE$ .

## PROPOSITION I.

## Theorème.

FIG. 1. 6. LE carré d'une ordonnée quelconque  $MP$  à l'axe  $AP$ , est égal au rectangle du paramètre  $p$ , par la partie  $AP$  de l'axe prise entre son origine  $A$  & la rencontre  $P$  de l'ordonnée.

Il faut prouver que  $\overline{MP}^2 = p \times AP$ .

\* *Art. 5.* Ayant nommé la donnée  $AF$ ,  $m$ ; & les indéterminées  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; on aura  $MF = m + x$ , &  $PF = x - m$  ou  $m - x$ , selon que le point  $p$  se trouve au dessous ou au dessus du foyer  $F$ . Or le triangle rectangle  $MPF$  donne en l'un & l'autre cas  $\overline{MF}^2 (mm + 2mx + xx) = \overline{MP}^2 (yy) + \overline{PF}^2 (mm - 2mx + xx)$ ; d'où l'on tire  $4mx = yy$ . Donc puisque selon la 5<sup>e</sup> définition  $p = 4m$ , on aura aussi  $yy = px$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

7. IL est donc évident que si l'on nomme  $p$  le parametre de l'axe  $AP$ ; chacune de ses parties  $AP$ ,  $x$ ; & FIG. 1. chacune de ses ordonnées correspondantes  $PM$ ,  $y$ ; on aura toujours  $yy = px$ . Or comme cette propriété convient à tous les points de la parabole, & en détermine la position par rapport à son axe  $AP$ ; il s'ensuit que l'équation  $yy = px$  exprime parfaitement la nature de la parabole par rapport à son axe.

## COROLLAIRE II.

8. SI l'on mène deux ordonnées quelconques  $MP$ , FIG. 2.  
 $NQ$  à l'axe  $AP$ , leurs quarrés seront entr'eux comme les parties  $AP$  &  $AQ$  de l'axe, prises entre son origine  $A$  & les rencontres  $P$  &  $Q$  de ces mêmes ordonnées. Car\* Art. 6.  
 $PM^2 \cdot QN^2 :: p \times AP \cdot p \times AQ :: AP \cdot AQ$ . 7.

## COROLLAIRE III.

9. SI l'on mène par un point quelconque  $P$  de l'axe  $AP$  une parallele  $MPM$  à ses ordonnées; elle rencontrera la parabole en deux points  $M$  &  $M$  également éloignés de part & d'autre du point  $P$ , & non en davantage. Car afin que les points  $M$  &  $M$  soient à la parabole, il faut\* que les quarrés de chaque  $PM$  ( $y$ ) prise de part\* Art. 7. & d'autre du point  $P$ , soient égaux chacun au même rectangle  $px$ .

## COROLLAIRE IV.

10. IL suit de ce que\*  $yy = px$ , que plus  $AP$  ( $x$ ) est\* Art. 7. grande, plus aussi l'ordonnée  $PM$  ( $y$ ) prise de part & d'autre de l'axe  $AP$  augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus  $AP$  ( $x$ ) diminue, plus aussi l'ordonnée  $PM$  ( $y$ ) devient petite: de sorte que  $AP$  ( $x$ ) étant nulle ou zero, chaque  $PM$  ( $y$ ) prise de part & d'autre de l'axe  $AP$  devient aussi nulle; c'est-à-dire que le point  $P$  tombant en  $A$ , les deux points de rencontre  $M$  &  $M$  se réu-



nissent en ce point. D'où il est clair.

1°. Que si l'on mène par l'origine  $A$  de l'axe une ligne  $LL$  parallèle à ses ordonnées, elle sera tangente en  $A$ .

2°. Que la Parabole s'éloigne de part & d'autre de plus en plus à l'infini de son axe  $AP$  à commencer par son origine  $A$ ; & qu'ainsi toute parallèle comme  $LM$  à l'axe  $AP$ , ne rencontre la Parabole qu'en un seul point  $M$ , & passe au dedans, puisque sa distance de l'axe demeure partout la même.

#### COROLLAIRE V.

II. SI d'un point quelconque  $M$  de la Parabole l'on tire une parallèle  $ML$  à l'axe  $AP$ , laquelle rencontre en  $L$  la parallèle  $AL$  à ses ordonnées; il est clair en menant l'ordonnée  $MP$ , que  $AL = PM$  ( $y$ ), & que  $ML = AP$  ( $x$ )  $= \frac{yy}{p}$ , puisque \*  $px = yy$ . D'où il suit que les droites  $ML$  ( $\frac{yy}{p}$ ),  $ML$  ( $\frac{yy}{p}$ ) prises de part & d'autre de l'axe  $AP$  sont égales entr'elles, lorsque les points  $L, L$  sont également éloignés du point  $A$ ; & partant que si une ligne quelconque  $MM$  terminée par la parabole est coupée en deux parties égales par l'axe en  $P$ , elle sera parallèle à la ligne  $LL$ , c'est à dire qu'elle sera ordonnée de part & d'autre à l'axe. Car ayant mené les parallèles  $ML, ML$  à l'axe  $AP$ , il est évident que  $LL$  sera divisée par le milieu en  $A$ , puisque  $MM$  l'est en  $P$ . Les droites  $ML, ML$ , seront donc égales entr'elles comme on vient de le prouver; & par conséquent la ligne  $MM$  sera parallèle à  $LL$ .

#### COROLLAIRE VI.

12. IL suit de ce que toutes les perpendiculaires  $MPM$  à l'axe  $AP$ , terminées de part & d'autre par la parabole, sont \* coupées par le milieu en  $P$ ; que l'axe divise la parabole en deux portions entièrement égales & semblablement posées de part & d'autre. Car si le plan sur lequel elle est tracée, étoit plié le long de l'axe en sorte

que les deux parties se joignissent, il est visible que les deux portions de la parabole tomberoient exactement l'une sur l'autre.

## PROPOSITION II.

## Theorème.

13. SI l'on mène par l'origine  $A$  de l'axe  $AP$  une ligne droite quelconque  $AM$  dans l'un ou l'autre des angles  $PAL$ ,  $PAL$ , faits par l'axe  $AP$  & par la ligne  $LL$  parallèle à ses ordonnées ; je dis qu'elle ira rencontrer la parabole  $MAM$  en un autre point  $M$ .

FIG. 3.

Ayant pris sur  $AL$  de part ou d'autre du point  $A$  la partie  $AG$  égale au paramètre  $p$  de l'axe, & tiré  $GF$  parallèle à l'axe  $AP$ , & qui rencontre la ligne  $AM$  (prolongée s'il est nécessaire) au point  $F$  ; on prendra sur la ligne  $AL$  du même côté où tombe la ligne  $AM$  par rapport à l'axe  $AP$ , la partie  $AL$  égale  $GF$  ; & ayant tiré  $LM$  parallèle à l'axe, je dis que le point  $M$  où cette ligne rencontre la droite  $AM$ , sera à la parabole  $MAM$ .

Car menant  $MP$  parallèle à  $AL$ , les triangles semblables  $FGA$ ,  $APM$ , donneront  $FG$  ou  $AL$  ou  $PM$ .  $GA :: AP. PM$ . Et partant  $\overline{PM}^2 = GA(p) \times PA$ . La ligne  $PM$  sera donc \* une ordonnée à l'axe  $AP$ . Ce qu'il faut \* Art. 7. *doit démontrer.*

## COROLLAIRE I.

14. DE là on voit comment l'axe  $AP$  d'une parabole  $MAM$  étant donné avec son paramètre  $p$ , & ayant mené par l'origine  $A$  de l'axe dans l'un ou l'autre des angles  $PAL$ ,  $PAL$ , faits par l'axe  $AP$  & par la ligne  $LL$  parallèle à ses ordonnées, une ligne droite quelconque  $AM$  ; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point  $M$  où elle rencontre la parabole  $MAM$ .

## COROLLAIRE II.

15. IL est évident \* qu'il n'y a que la ligne  $LAL$  parallèle aux ordonnées à l'axe  $AP$ , qui puisse être tangente de la parabole  $MAM$  au point  $A$  origine de l'axe ; puisqu'il n'y a que cette seule ligne qui passant par le point  $A$ , & étant continuée de part & d'autre, ne rencontre la parabole en aucun autre point, & n'entre pas dedans.

## DÉFINITIONS.

9.

- FIG. 4. & 5. Si l'on mène par un point quelconque  $M$  de la parabole un diamètre  $MO$ , une ordonnée  $MP$  à l'axe  $AP$ , & une ligne droite  $MT$  qui coupe sur l'axe  $AP$  prolongé au delà de son origine  $A$ , la partie  $AT$  égale à  $AP$  ; toutes les lignes droites, comme  $NO$ , menées des points de la parabole parallèlement à  $MT$ , & terminées par le diamètre  $MO$ , sont appelées *Ordonnées* à ce diamètre.

10.

Si l'on prend la ligne  $q$  troisième proportionnelle à  $AT$ ,  $MT$  ; cette ligne  $q$  sera nommée le *Parametre* du diamètre  $MO$ .

## COROLLAIRE I.

16. SI l'on nomme l'indéterminée  $AP$  ou  $AT$ ,  $x$  ; il est clair que  $\overline{MT}^2 = qx$ , puisque  $AT(x). MT :: MT.q$ .

## COROLLAIRE II.

17. A Cause du triangle rectangle  $MPT$ , le carré  $\overline{MT}^2 (qx) = \overline{PT}^2 (4xx) - \overline{MP}^2 (px)$  ; d'où, en divisant par  $x$ , l'on tire  $q = 4x - p$ .

C'est à dire que le parametre  $q$  d'un diamètre quelconque  $MO$ , surpasse le parametre  $p$  de l'axe du quadruple de  $AP (x)$ .

## COROLLAIRE III.

18. SI l'on tire du point  $M$  au foyer  $F$  la droite  $MF$ , on aura  $MF^2 = AP - AF$ . Or selon la définition 5<sup>e</sup>.  
le

le parametre de l'axe étant  $p=4AP$ , le parametre du diametre  $MO$  sera \*  $q=4AP+4AF$ . Donc le \* *Art. 17.* parametre  $q$  d'un diametre quelconque  $MO$ , vaut quatre fois la ligne  $MF$  tirée de son origine  $M$  au foyer  $F$ .

## PROPOSITION III

## Theorème.

19. **L**E quarré d'une ordonnée quelconque  $ON$  au diametre  $MO$ , est égal au rectangle du parametre  $q$ , par la partie  $MO$  de ce diametre, prise entre son origine  $M$  & la rencontre  $O$  de l'ordonnée. Fig. 4. 5.

Il faut prouver que  $\overline{ON}^2 = q \times MO$ .

Ayant mené l'ordonnée  $NQ$  à l'axe  $AP$ , laquelle rencontre le diametre  $MO$  au point  $R$ , & tiré  $OH$  parallele à  $MP$ , on nommera les données  $AP$  ou  $AT$ ,  $x$ ;  $PM$  ou  $RQ$ ,  $y$ ; & les indéterminées  $OR$  ou  $HQ$ ,  $a$ ;  $MO$  ou  $PH$ ,  $b$ ; les triangles semblables  $TPM$ ,  $ORN$ , donneront cette proportion  $TP (2x) . PM (y) :: OR (a) . RN = \frac{ay}{2x}$ . Cela posé.

Puisque (fig. 4.)  $NQ = RQ(y) - RN(\frac{ay}{2x})$ , ou  $RN(\frac{ay}{2x}) - RQ(y)$ , &  $AQ = AH(x+b) - HQ(a)$ , lorsque le point  $N$  tombe du côté de l'axe  $AP$  par rapport au diametre  $MO$ ; & qu'au contraire (fig. 5.)  $NQ = RQ(y) + RN(\frac{ay}{2x})$ , &  $AQ = AH(x+b) + HQ(a)$ , lorsqu'il tombe du côté opposé: on aura  $\overline{QN}^2 = yy \pm \frac{ay}{x} + \frac{a^2yy}{4xx}$ , &  $AQ = x + b \pm a$ , sçavoir — dans le premier cas, & + dans le second. Or \*  $AP$  \* *Art. 8.*  $(x) . AQ(x+b \pm a) :: \overline{PM}^2 (yy) . \overline{QN}^2 = yy + \frac{ay}{x} \pm \frac{a^2yy}{4xx}$ . On formera donc en comparant ensemble ces

deux valeurs de  $\overline{QN}$ , l'égalité  $yy + \frac{by}{x} + \frac{ay}{x} = yy \pm \frac{ay}{x} + \frac{ay}{4xx}$ ; d'où en effaçant de part & d'autre  $yy \pm \frac{ay}{x}$ , divisant par  $yy$ , & multipliant par  $4xx$ , l'on tirera  $\overline{OR} (aa) = 4bx$ . Mais les triangles semblables  $MPT$ ,  $NRO$ , donnent  $\overline{PT}^2 (4xx) : \overline{OR}^2 (4bx) :: \overline{MT}^2 (qx) : \overline{ON}^2 = bq = qx \cdot MO(b)$ . *Ce qu'il falloit &c.*

## COROLLAIRE GENERAL.

20. IL est visible que ce qu'on a démontré dans la proposition premiere par rapport à l'axe  $AP$ , à ses ordonnées  $PM$ , & à son parametre  $p$ , s'étend par le moyen de cette dernière proposition à un diamètre quelconque  $MO$ , à ses ordonnées  $ON$ , & à son parametre  $q$ . Or comme les articles 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15. se tirent de la premiere proposition, & subsistent également, soit que les angles  $APM$  soient droits, ou bien qu'ils ne le soient pas; il s'ensuit que si l'on imagine dans ces articles que la ligne  $AP$ , au lieu d'être l'axe, soit un diamètre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites  $PM$ ,  $QN$ , & pour parametre la ligne  $p$ , ils seront encore vrais dans cette supposition; car leur démonstration demeurera la même, & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant partout où se trouve le mot d'axe, celui de diamètre.

## COROLLAIRE II.

FIG. 4. & 5. 21. COMME les articles 10 & 15 subsistent avec la même force, lorsque la ligne  $AP$  au lieu d'être l'axe, est un diamètre quelconque, tel que  $MO$ ; il s'ensuit que la ligne  $MT$  parallèle aux ordonnées  $ON$  à ce diamètre, est tangente en  $M$ , & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher la parabole en ce point. D'où l'on voit que d'un point donné sur une parabole, on ne peut mener qu'une seule tangente.



## COROLLAIRE III.

22. **D**E-LA il est évident selon la définition 9. que si l'on mene par un point quelconque  $M$  d'une parabole, une ordonnée  $MP$  à l'axe  $AP$ , & une ligne droite  $MT$  qui coupe sur l'axe prolongé du côté de son origine  $A$ , la partie  $AT$  égale à  $AP$ ; cette ligne  $MT$  sera tangente en  $M$ . Et réciproquement que si la ligne  $MT$  est tangente en  $M$ , & qu'on mene l'ordonnée  $MP$  à l'axe; les parties  $AT$ ,  $AP$ , de l'axe seront égales entr'elles.

## COROLLAIRE IV.

23. **S**I l'on imagine dans les définitions 9 & 10, & dans la dernière proposition, que la ligne  $AP$  au lieu d'être l'axe, soit un diamètre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites  $PM$ ,  $QN$ ; on verra que cette proposition sera encore vraie, puisqu'elle se démontrera de la même manière qu'auparavant, comme il est évident par la seule inspection de la fig. 6. où les triangles semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas de l'axe.

FIG. 6.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précédent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne  $AP$  au lieu d'être l'axe, est un diamètre quelconque. 2°. Que le diamètre  $MO$  peut être l'axe dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder l'axe comme un diamètre qui fait avec ses ordonnées des angles droits.

## PROPOSITION IV.

## Theorème.

24. **S**I par un point quelconque  $M$  d'une parabole, l'on mene une ordonnée  $MP$  à l'axe, & une perpendiculaire  $MG$  à la tangente  $MT$  qui passe par le point  $M$ ; je dis que la partie  $PG$  de l'axe sera toujours égale à la moitié de son paramètre  $p$ .

FIG. 7.

Il faut prouver que  $PG = \frac{1}{2} p$ .

B ij

Car à cause des angles droits  $TPM$ ,  $TMG$ , on aura  $TP(2x)$ .  $PM(y) :: PM(y)$ .  $PG = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p$ , en met-

\* Art. 7. tant à la place de  $yy$  sa valeur \*  $p x$ .

## PROPOSITION V.

## Theorème.

FIG. 7.

25. SI par un point quelconque  $M$  d'une parabole, l'on mene au foyer  $F$  la droite  $MF$ , un diamètre  $MO$ , & une tangente  $TMS$ ; les angles  $FMT$ ,  $OMS$ , faits par la tangente  $TMS$  d'un côté avec la droite  $MF$ , & de l'autre avec le diamètre  $MO$ , seront égaux entr'eux.

Car menant l'axe  $AP$  qui rencontre en  $T$  la tangente  $TMS$ , & l'ordonnée  $MP$  à l'axe; on aura \*  $TA + AF$  ou  $TF = AP + AF$  ou \*  $MF$ . Le triangle  $TFM$  sera donc isoscèle; & par conséquent l'angle  $FTM$ , ou son égal  $OMS$ , sera égal à l'angle  $FMT$ . Ce qu'il falloit démontrer.

\* Art. 22.

\* Art. 5.

## COROLLAIRE.

26. DE-LA il est clair que la tangente  $TMS$  prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant  $M$ , laisse la parabole toute entière du côté de son foyer  $F$ . Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de la parabole que tombe le point touchant  $M$ , il s'ensuit que cette ligne courbe est concave dans toute son étendue autour de son foyer  $F$ .

## PROPOSITION VI.

## Problème.

FIG. 8. &amp; 9.

27. UN diamètre  $AP$  avec la tangente  $LAL$  qui passe par son origine  $A$ , & son paramètre étant donnés; trouver un diamètre  $BQ$  qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées, un angle égal à l'angle donné  $K$ , son origine  $B$ , & son paramètre.

Ayant mené par l'origine  $A$  du diamètre donné la ligne  $AE$  qui fasse avec ce diamètre de part ou d'autre, l'angle  $PAE$  égal à l'angle donné  $K$ , & trouvé \* sur \* Art. 14. 20. cette ligne (prolongée de l'autre côté de  $A$  lorsqu'elle ne tombe point dans l'un ou l'autre des angles  $PAL$ ,  $PAL$ ) le point  $M$  où elle rencontre la parabole, on menera par le point du milieu  $Q$  de la ligne  $AM$ , une parallèle  $QD$  au diamètre  $AP$ , qui rencontre la tangente  $AL$  au point  $D$ ; & on divisera  $QD$  par le milieu en  $B$ . Je dis que la ligne  $BQ$  est le diamètre qu'on cherche, qu'il a pour origine le point  $B$ , & pour paramètre une troisième proportionnelle à  $BQ$ , &  $QA$ .

Car 1°. La ligne  $AM$  étant divisée en deux parties égales au point  $Q$  par le diamètre  $BQ$ , elle sera ordonnée \* Art. 11. 20. de part & d'autre à ce diamètre; & comme les lignes  $BQ$ ,  $AP$  sont parallèles entr'elles, l'angle  $BQA$  que fait le diamètre  $BQ$  avec son ordonnée  $QA$  sera égal à l'angle  $PAM$  égal à l'angle donné  $K$  ou à son complément à deux droits. 2°. Le point du milieu  $B$  de la ligne  $QD$  fera l'origine \* de ce diamètre, puisque  $AQ$  en est une \* Art. 12. 23. ordonnée. 3°. Le paramètre du diamètre  $BQ$  est \* la \* Art. 19. troisième proportionnelle à  $BQ$ ,  $QA$ .

Lorsque l'angle donné  $K$  n'est pas droit, il est clair Fig. 8. qu'on peut mener de part & d'autre du diamètre  $AP$  deux différentes lignes  $AE$  qui fassent avec ce diamètre des angles égaux à l'angle donné  $K$ ; & qu'ainsi on pourra toujours avoir deux solutions différentes, en observant que si l'une des deux lignes  $AE$  tomboit sur la tangente  $AL$ , le diamètre donné  $AP$  satisferoit lui-même à la question. Mais lorsque cet angle  $K$  est droit, comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne  $AE$  qui Fig. 9. fasse avec le diamètre  $AP$  un angle droit, il s'ensuit qu'on ne peut avoir alors qu'une solution; & qu'ainsi \* \* Art. 23. le diamètre cherché sera l'axe.

Il est à remarquer que les deux diamètres  $BQ$ ,  $BQ$  qui satisfont au Problème lorsque l'angle donné  $K$  n'est Fig. 10. pas droit, sont semblablement posés de part & d'autre

de l'axe  $AP$ , & que leurs parametres sont égaux: ce qui se voit par la construction même, en supposant que le diametre donné  $AP$  soit l'axe, & en menant deux différentes lignes  $AE$ ,  $AE$  de part & d'autre. Car les triangles rectangles  $ALM$ ,  $ALM$ , &  $ADQ$ ,  $ADQ$  étant visiblement égaux & semblables entr'eux, les lignes  $AD$ ,  $AD$ ;  $DQ$ ,  $DQ$ ; leurs moitiés  $BQ$ ,  $BQ$ ; & les ordonnées  $QA$ ,  $QA$  seront égales entr'elles; \* & par conséquent les parametres le seront aussi.

\* Art. 19.

### COROLLAIRE

28. IL est donc évident, 1°. qu'il n'y a qu'un seul diametre qui fasse avec ses ordonnées des angles droits; & qu'ainsi il ne peut y avoir qu'un seul axe. 2°. Qu'on peut toujours trouver deux differens diametres, qui fassent avec leurs ordonnées des angles égaux à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; que ces deux diametres seront semblablement posés de part & d'autre de l'axe, & qu'ils auront des parametres égaux,

### PROPOSITION VII.

#### Problème.

29. UN diametre étant donné avec la tangente qui passe par son origine, & son parametre; décrire la parabole par un mouvement continu.

#### PREMIERE MANIERE.

Si le diametre donné étoit l'axe, on la décriroit selon l'article 4<sup>e</sup>; mais lorsqu'il ne l'est pas, soit  $MO$  le diametre donné, &  $TMS$  la tangente qui passe par son origine  $M$ . Cela posé.

Fig. II.

On prendra sur le diametre  $MO$  prolongé au delà de son origine  $M$ , la partie  $MD$  égale au quart de son parametre; & on tirera une perpendiculaire indéfinie  $DE$  à  $MD$ . On menera  $MF$  qui fasse avec la tangente  $TMS$  un angle  $FMT$  égal à l'angle  $OMS$ ; & ayant pris  $MF$  égale à  $MD$ , on décrira selon la définition

1

1

1

1



premiere, une parabole qui ait pour directrice la ligne  $DE$ , & pour foyer le point  $F$ . Je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

Car, 1°. La ligne  $MO$  étant perpendiculaire à la directrice  $DE$ , sera parallèle à l'axe, & par conséquent un diamètre selon la définition 7°. 2°. La ligne  $TMS$  sera \* Art. 15. tangente en  $M$ . 3°. Le paramètre du diamètre  $MO$  sera \* quadruple de  $MF$ . \* Art. 18.

## SECONDE MANIERE.

Soit  $AP$  le diamètre donné, &  $LAL$  la tangente FIG. 12. qui passe par son origine  $A$ . Cela posé.

Ayant pris sur le diamètre  $AP$  prolongé au delà de son origine  $A$  la partie  $AG$  égale à son paramètre, & mené une droite indéfinie  $DGD$  qui fasse avec  $AG$  l'angle  $AGD$  égal à l'angle  $GAL$  pris du même côté; on fera mouvoir une ligne droite indéfinie  $DM$  le long de  $GD$  toujours parallèlement à  $AG$ , en entraînant par son extrémité  $D$  le côté  $DA$  de l'angle  $DAM$  égal à l'angle  $GAL$ , & mobile par son sommet autour du point fixé  $A$ . Je dis que l'intersection continuelle  $M$  de la ligne  $DM$  & du côté  $AM$ , décrira dans ce mouvement la parabole qu'on demande.

Car menant  $MP$  parallèle à  $AL$ , les lignes  $MP, GD$  seront égales entr'elles; puisque l'angle  $APM$  ou  $GAL$  étant égal à l'angle  $AGD$ , elles seront également inclinées entre les parallèles  $GP, DM$ . Or les triangles  $AGD, MPA$  sont semblables: car l'angle  $MPA$  ou  $GAL$  est égal à l'angle  $AGD$ ; & l'angle  $PMA$  ou  $MAL$  égal à l'angle  $GAD$ , puisque retranchant des angles égaux  $GAL, DAM$ , le même angle  $DAL$ , les restes doivent être égaux. On aura donc  $AG. GD$  ou  $PM :: PM. AP$ , & partant  $GA \times AP = PM^2$ ; d'où il clair que  $PM$  est \* Art. 19. & une ordonnée au diamètre  $AP$  qui a pour origine le point  $A$ , pour tangente la ligne  $LAL$ , & pour paramètre la ligne  $AG$ . Ce qu'il falloit, &c.

Si le diamètre  $AP$  étoit l'axe, alors les lignes  $GD$ , FIG. 13.

$AL$ , seroient paralleles, & la démonstration deviendroit plus facile; car l'on voit tout d'un coup que  $GD$  est égale à  $PM$ , & que les triangles rectangles  $AGD$ ,  $MPA$  sont semblables; d'où il suit  $AG.GD$  ou  $PM$  : :  $PM.AP$ . Donc  $AG \times AP = \overline{PM}^2$ , &c.

## PROPOSITION VIII.

### Problème.

30. UN diamètre  $AP$  étant donné avec son parametre, & la tangente  $AL$  qui passe par l'origine  $A$  de ce diamètre; trouver autant de differens points que l'on voudra de la parabole, ou (ce qui est la même chose) la décrire par plusieurs points.

### PREMIERE MANIERE.

FIG. 14.

Ayant pris sur le diamètre  $AP$  prolongé au delà de son origine  $A$ , la partie  $AG$  égale à son parametre, divisé  $AG$  en deux parties égales au point  $D$ , & mené une ligne droite indéfinie  $AF$  perpendiculaire à  $AG$ ; on décrira d'un point  $C$  pris partout où l'on voudra sur  $DA$  prolongée indéfiniment du côté de  $A$ , comme centre, & du rayon  $CG$ , un arc de cercle  $PF$  qui coupera le diamètre  $AP$  & sa perpendiculaire  $AF$  en deux points  $P, F$ . On menera par le point  $P$  une parallele  $MPM$  à la tangente  $AL$ , sur laquelle on prendra de part & d'autre les parties  $PM, PM$ , égales chacune à  $AF$ . On trouvera de la même maniere autant de couple de points  $M$  que l'on voudra; par lesquels on fera passer une ligne courbe  $MAM$  qui fera la parabole qu'on demande.

Car tous les arcs  $PF$  passant par le même point  $G$ , & ayant leurs centres sur la ligne  $GA$  prolongée, s'il est nécessaire du côté de  $A$ , auront pour diametres les lignes  $GP$ ; & par conséquent la propriété de ces cercles donnera toujours  $\overline{AF}^2 = GA \times AP$ . Mais chaque  $PM$  est\* égale à sa correspondante  $AF$ , & de plus parallele à

\* Hyp.



à la tangente  $AL$  qui passe par l'origine  $A$  du diamètre  $AP$ ; elle sera donc \* ordonnée à ce diamètre. C'est \* *Art. 19. &* pourquoi la Parabole qu'on demande, doit passer par *21.* tous les points  $M$ , trouvés comme l'on vient d'enseigner.

Il est visible qu'on peut se tromper en traçant les parties de la parabole, qui joignent les points trouvés; mais on voit en même temps que l'erreur ne peut être sensible, lorsque ces points sont fort près les uns des autres. Ceux qui ont besoin de décrire souvent des Sections Coniques, préfèrent ordinairement cette méthode, de les décrire par plusieurs points; parce que les machines dont on se sert pour les décrire par un mouvement continu, étant composées, sont souvent fautives, & peu exactes dans la pratique.

## SECONDE MANIERE.

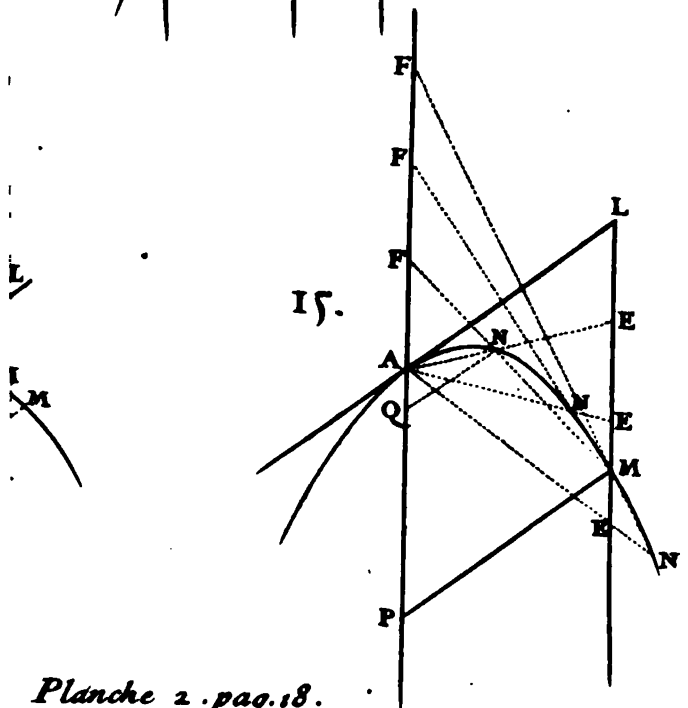
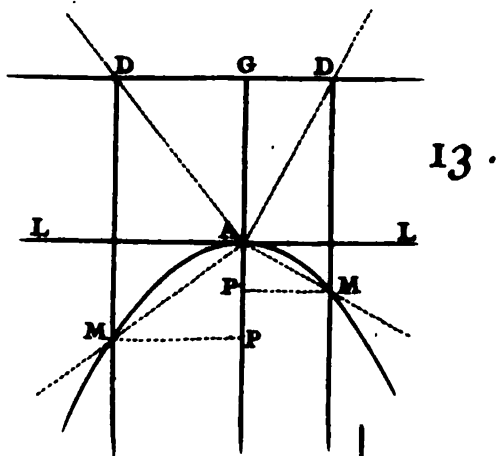
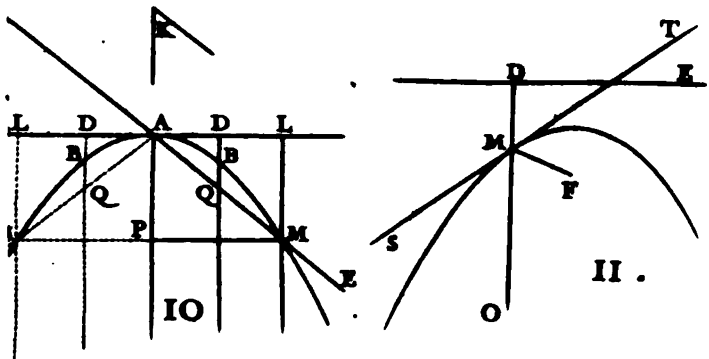
Ayant mené par un point quelconque  $L$  de la tangente  $AL$ , une parallèle indéfinie  $LE$  au diamètre  $AP$ ; on prendra sur cette ligne & sur le diamètre  $AP$  prolongé au delà de son origine  $A$ , les parties  $LE$ ,  $EE$ ,  $EE$ , &c.  $AF$ ,  $FF$ ,  $FF$ , &c. toutes égales entr'elles, & de telle grandeur qu'on voudra. On marquera sur  $LE$ , le point  $M$ , en sorte que  $LM$  soit troisième proportionnelle au paramètre donné du diamètre  $AP$ , & à la partie  $AL$  de la tangente. On tirera enfin des points  $A$ ,  $M$ , les lignes  $AE$ ,  $AE$ ,  $AE$  &c.  $MF$ ,  $MF$ ,  $MF$  &c; je dis que les points d'intersection  $N$ ,  $N$ ,  $N$  &c. de chaque  $AE$ , avec la correspondante  $MF$ , seront tous à la parabole qu'on demande.

FIG. 15.

Car menant par le point marqué  $M$ , & par l'un des points trouvez  $N$ , les lignes  $MP$ ,  $NQ$ , parallèles à la tangente  $AL$ , & nommant  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$  ou  $AL$ ,  $y$ ;  $AQ$ ,  $z$ ;  $QN$ ,  $z$ ; les triangles semblables  $NQA$ ,  $ALE$ , &  $MPF$ ,  $NQF$ , donneront ces deux proportions  $QN$  ( $z$ ).  $QA$  ( $z$ ) ::  $AL$  ( $y$ ).  $LE$  ou  $AF = \frac{y^2}{x}$ . &  $MP$ .

(y).  $PF$  ou  $PA + AF(x + \frac{xy}{x}) :: NQ(x)$ .  $QF$  ou  $QA + AF(x + \frac{xy}{x})$ . D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité  $xy + \frac{xy^2}{x} = xz + xy$ ; & effaçant de part & d'autre  $xy$ , & multipliant par  $x$ , il vient  $xyy = xzx$ , qui se réduit à cette proportion  $AP(x) \cdot AQ(u) :: MP^2(y) \cdot NQ^2(x)$ . Or par la construction, le quarré de  $AL$  ou de  $PM$ , est égal au rectangle de la partie  $AP$  du diamètre donné, par son parametre. Cette ligne  $PM$  sera donc \* une ordonnée au diamètre  $AP$ ; & par conséquent  $QN$  en  
 \* Art. 19. & 21.  
 \* Art. 8. & 20.  
 fera \* une autre. Ainsi le point  $N$  sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diamètre  $AP$ : pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies  $LE$ ,  $AF$ , les parties égales  $LE$ ,  $EE$ , &c.  $AF$ ,  $FF$ , &c. de l'autre côté des points  $L$ ,  $A$ .

Si au lieu du parametre du diamètre  $AP$  que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points  $M$  de la parabole; ce qui arrive souvent: il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallele indéfinie  $LE$ , au diamètre  $AP$ , & achever le reste comme cy-dessus.





## LIVRE SECOND.

*De l'Ellipse.*

## D E F I N I T I O N S.

1.

**A**YANT attaché sur un plan les deux bouts d'un fil *FMf*, en deux points *F, f*, dont la distance *Ff* soit moindre que la longueur du fil, on se servira d'un stile *M*, pour tenir ce fil toujours tendu; & conduisant ce stile autour de ces deux points, en sorte qu'il revienne au même point d'où il étoit parti: ce stile décrira dans ce mouvement, une ligne courbe, qui sera nommée *Ellipse*. Fig. 16.

2.

Les deux points fixes *F, f*, sont nommés les deux *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui passe par les deux Foyers *F, f*, & qui est terminée de part & d'autre par l'Ellipse, est appelée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.

Le point *C*, qui divise par le milieu le premier Axe *Aa*, est nommé le *Centre* de l'Ellipse.

5.

La ligne *Bb*, menée par le Centre *C*, perpendiculairement au premier Axe *Aa*, & terminée de part & d'autre par l'Ellipse, est appelée le *second* ou le *petit Axe*.

6.

Les deux Axes *Aa, Bb*, sont appelez ensemble, *Conjugués*: de sorte que le premier Axe *Aa*, est dit conjugué au second *Bb*; & réciproquement le second *Bb*, conjugué au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP, MK*, menées des points *M* de l'Ellipse parallèlement à l'un des Axes, & terminées par

l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre Axe: ainsi  $MP$  est Ordonnée à l'Axe  $Aa$ , &  $MK$  à l'Axe  $Bb$ .

8.

La troisième proportionnelle aux deux Axes, est appellée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier Axe  $Aa$ , est au second Axe  $Bb$ , de même le second  $Bb$ , à une troisième proportionnelle  $p$ ; cette ligne  $p$  sera le Parametre du premier Axe.

9.

Toutes les lignes droites qui passent par le centre  $C$ , & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse, sont appellées *Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre l'Ellipse qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

## REMARQUE.

FIG. 17.

31. SI l'on conçoit que les deux foyers  $F, f$ , & le centre  $C$  se réunissent en un seul point; il est visible que l'Ellipse se changera alors en un Cercle qui aura pour rayon la droite  $CM$ , égale à la moitié de la corde  $CMC$ , attachée par ces deux bouts au point  $C$ , qui en sera le centre. On pourra donc considérer un cercle comme une espèce particulière d'Ellipse; dans laquelle la distance des foyers est nulle; de sorte que tout ce qu'on démontrera dans la suite de l'Ellipse, telle que puisse être la distance de ces deux foyers, se peut aussi appliquer au cercle, en supposant que cette distance devienne nulle.

## COROLLAIRE I.

FIG. 16.

32. IL suit de la définition première, que si l'on mène d'un point quelconque  $M$  de l'Ellipse, aux deux foyers  $F, f$ , les droites  $MF, Mf$ ; leur somme sera toujours la même.

## COROLLAIRE II.

33. LORSQUE le point  $M$  tombe en  $A$ , il est visible que  $MF$  devient  $AF$ , & que  $Mf$  devient  $Af$ : de même lorsque le point  $M$  tombe en  $a$ , il est encore visible que  $MF$  devient  $aF$ , & que  $Mf$  devient  $af$ . On aura donc  $AF + Af$ , ou  $2AF + Ff = aF + af$ , ou  $2af + fF$ ; & partant  $AF = af$ . D'où il suit:

1°. Que la somme des deux droites  $MF$ ,  $Mf$ , est toujours égale au premier axe  $Aa$ , puisque  $Mf + MF = Af + AF = Af + fa$ .

2°. Que la distance  $Ff$  des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre  $C$ , puisque  $CA - AF$  ou  $CF = Ca - af$  ou  $Cf$ .

## COROLLAIRE III.

34. SI de l'extrémité  $B$  du second axe  $Bb$ , l'on mène aux deux foyers  $F$ ,  $f$ , les droites  $BF$ ,  $Bf$ ; il est clair que les triangles rectangles  $BCF$ ,  $BCf$ , seront égaux, & qu'ainsi l'hypothénuse  $BF$ , est égale à l'autre hypothénuse  $Bf$ : & par conséquent  $BF$ , ou  $Bf = CA$  ou  $Ca$ , puisque \*  $BF + Bf = Aa$ . On prouve de même \* Art. 33. que  $Fb$  ou  $bf = CA$  ou  $Ca$ . D'où l'on voit:

1°. Que le second axe  $Bb$ , est divisé en deux parties égales par le centre  $C$ ; car les triangles rectangles  $FCB$ ,  $FCb$  seront égaux, puisqu'ils ont des hypothénuses égales  $FB$ ,  $Fb$ , & le côté  $FC$  commun.

2°. Que le second axe  $Bb$ , est toujours moindre que le premier  $Aa$ ; puisque la moitié  $BC$  étant l'un des côtés du triangle rectangle  $BCF$ , sera moindre que son hypothénuse  $BF$ , qui est égale à la moitié  $CA$  du premier axe  $Aa$ .

3°. Que si l'on décrit de l'une des extrémités  $B$  du petit ou second axe  $Bb$  comme centre, & du rayon  $BF$  égal à  $CA$ , moitié du premier ou grand axe  $Aa$ , un cercle, il coupera ce grand axe en deux points  $F$ ,  $f$ , qui seront les deux foyers de l'Ellipse.

## COROLLAIRE IV.

35. LES mêmes choses étant posées, si l'on nomme  $CA$  ou  $BF$ ,  $t$ ;  $CF$ ,  $m$ ; le triangle rectangle  $BCF$ , donnera  $\overline{BC} = tt - mm$ . Or  $AF = t - m$ , &  $Fa = t + m$ , & partant  $AF \times Fa = tt - mm$ . D'où il est évident que le quarré de la moitié  $CB$  du petit axe  $Bb$ , est égal au rectangle de  $AF$  par  $Fa$  parties du grand axe  $Aa$ , prises entre l'un des foyers  $F$ , & ses deux extrémités  $A$ ,  $a$ ,

## COROLLAIRE V.

36. IL sera facile à présent de décrire une Ellipse dont  
 \* Art. 34. les deux axes  $Aa$ ,  $Bb$ , sont donnez. Car ayant trouvé\* sur le premier ou grand axe  $Aa$ , les foyers  $F$ ,  $f$ , on attachera dans ces points, les extrémités d'un fil  $FMf$ , dont la longueur égalera celle de cet axe; & ayant décrit par le moyen de ce fil, une Ellipse comme l'on a enseigné dans la définition première, il est évident qu'elle sera celle qu'on demande.

## PROPOSITION I.

## Theorème.

FIG. 16.

37. SI l'on mène l'ordonnée  $MP$  au premier ou grand axe  $Aa$ , & qu'on prenne sur cet axe la partie  $AD$  égale à  $MF$ , Je dis que  $CA. CF :: CP. CD$ .

Ayant nommé, comme auparavant, les données  $CA$ ,  $t$ ;  $CF$ ,  $m$ ; & de plus les indéterminées  $CP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; & l'inconnue  $CD$ ,  $z$ ; il peut arriver deux différens cas,

*Premier cas.* Lorsque le point  $P$  tombe au dessus du centre  $C$ . Comme  $PF$  est toujours moindre que  $Pf$ ; il s'ensuit que  $MF$  ou  $AD$  sera moindre que  $Mf$  ou  $aD$ ; c'est pourquoi  $AD$  ou  $MF = t - z$ ,  $aD$  ou  $Mf = t + z$ ,  $FP = m - x$  ou  $x - m$  (selon que le point  $P$  tombe au dessous ou au dessus du foyer  $F$ ),  $Pf = x + m$ , Or les triangles rectangles  $MPF$ ,  $MPf$ , donnent  $tt -$



$2tz + z^2 = yy - mm - 2mx - xx$ , &  $tt - 2tz - z^2 = yy - mm - 2mx - xx$ . Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la seconde, on aura  $4tz = 4mx$ ; d'où l'on tire  $CD(z) = \frac{mx}{t}$ .

*Second cas.* Lorsque le point  $P$  tombe au dessous du centre  $C$ , comme  $PF$  est toujours plus grande que  $Pf$ , il s'ensuit que  $MF$  ou  $AD$ , sera plus grande que  $Mf$  ou  $aD$ : c'est pourquoi  $AD$  ou  $MF = t + z$ ,  $aD$  ou  $Mf = t - z$ ,  $PF = x + m$ ,  $Pf = x + m$  ou  $m - x$  (selon que le point  $P$  tombe au dessous ou au dessus du foyer  $f$ ). Or les triangles rectangles  $MPF$ ,  $MPf$ , donnent  $tt - 2tz - z^2 = yy - mm - 2mx - xx$ , &  $tt - 2tz + z^2 = yy - mm - 2mx - xx$ . Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la seconde égalité de ceux de la premiere, on aura  $4tz = 4mx$ ; d'où l'on tire encore  $CD(z) = \frac{mx}{t}$ . Par conséquent en l'un & l'autre cas, on aura  $CA(t)$ .  $CF(m) :: CP(x)$ .  $CD(z)$ . *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE

38. IL est donc évident que si l'on nomme les données  $CA$  ou  $Ca$ ,  $t$ ;  $CF$  ou  $Cf$ ,  $m$ ; & l'indéterminée  $CP$ ,  $x$ ; on aura toujours  $MF = t - \frac{mx}{t}$ , &  $Mf = t + \frac{mx}{t}$ , lorsque le point  $P$  tombe au dessus du centre  $C$ : & qu'au contraire on aura  $MF = t + \frac{mx}{t}$ , &  $Mf = t - \frac{mx}{t}$ , lorsqu'il tombe au dessous.

## PROPOSITION II.

## Theorème.

39. LE carré d'une ordonnée quelconque  $MP$  à l'axe  $Aa$ , est au rectangle de  $AP$  par  $Pa$ , parties de cet axe, comme le carré de son conjugué  $Bb$ , est au carré de l'axe  $Aa$ .

*Il faut prouver que*  $\overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$ .

- Les mêmes choses étant posées que dans l'article précédent, si l'on met dans l'égalité  $tt \pm 2tz - tz = yy$   
 \* Art. 37.  $- + mm \pm 2mx - +xx$  que l'on a trouvée\* par le moyen du triangle rectangle  $MPF$ , à la place de  $z$  sa valeur  $\frac{mx}{t}$ , on formera toujours celle-ci  $ttyy = t^4 - ttxx - mmtt - +mmxx$ , laquelle étant réduite à une proportion, donne  $\overline{PM}^2 (yy) . AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{BC}^2$   
 \* Art. 35.  $(tt - mm) . \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$ . Ce qu'il fal. &c.

## COROLLAIRE I.

40. Si l'on mene une ordonnée  $MK$  à l'autre axe  $Bb$ , lequel j'appelle  $2c$ , il est clair que  $MK = CP (x)$ ,  
 \* Art. 39. & que  $CK = PM (y)$ . Or \*  $\overline{PM}^2 (yy) . AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc) . \overline{Aa}^2 (4tt)$ . Et partant  $4ccxx = 4ccctt - 4ttyy$ ; ce qui donne cette proportion  $\overline{MK}^2 (xx) . BK \times Kb (cc - yy) :: \overline{Aa}^2 (4tt) . \overline{Bb}^2 (4cc)$ .

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque  $MK$  à l'axe  $Bb$ , est au rectangle de  $BK$  par  $Kb$  parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué  $Aa$ , est au quarré de l'axe  $Bb$ .

## COROLLAIRE FONDAMENTAL.

- Fig. 18. 41. Si l'on nomme l'un ou l'autre axe  $Aa$ ,  $2t$ ; son  
 19. conjugué  $Bb$ ,  $2c$ ; son parametre  $p$ ; chacune de ses ordonnées  $PM$ ,  $y$ ; chacune de ses parties  $CP$  prises entre le centre & les rencontres des ordonnées,  $x$ ; on  
 \* Art. 39. aura \* toujours  $\overline{PM}^2 (yy) . AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc) . \overline{Aa}^2 (4tt) :: p . Aa (2t)$ . Puisque selon la définition du Parametre,  $Aa (2t) . Bb (2c) :: Bb (2c) . p = \frac{4cc}{2t}$ . D'où en multipliant d'abord les extrêmes & les moyens de la proportion  $yy . tt - xx :: 4cc . 4tt$ , & ensuite

ensuite de l'autre  $yy. tt - xx :: p. 2t$ . L'on tire  $yy = cc - \frac{c^2 x^2}{t^2}$ , &  $yy = \frac{1}{2} pt - \frac{p^2 x^2}{2t}$ . Or comme cette propriété convient également à tous les points de l'Ellipse, & qu'elle en détermine la position par rapport aux deux axes conjugués  $Aa, Bb$ ; il s'ensuit que l'équation  $yy = cc - \frac{c^2 x^2}{t^2}$ , ou  $yy = \frac{1}{2} pt - \frac{p^2 x^2}{2t}$ , exprime parfaitement la nature de l'Ellipse par rapport à ses axes.

## COROLLAIRE III.

42. Si l'on mene deux ordonnées quelconques  $MP, NQ$ , à l'axe  $Aa$ ; leurs quarrés seront entr'eux comme les rectangles  $AP \times Pa, AQ \times Qa$ , des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes ordonnées; car  $\overline{Bb}^2. \overline{Aa}^2 :: \overline{PM}^2. AP \times Pa :: \overline{QN}^2. AQ \times Qa$ . Et \* Art. 39. partant  $\overline{PM}^2. \overline{QN}^2 :: AP \times Pa. AQ \times Qa$ .

## COROLLAIRE IV.

43. Si l'on mene par un point quelconque  $P$  de l'un des axes conjugués  $Aa$ , une parallele  $MM$  à l'autre axe  $Bb$ ; elle rencontrera l'Ellipse en deux points  $M, M$ , également éloignés de part & d'autre du point  $P$ , & non en davantage. Car afin que les points  $M, M$ , soient à l'Ellipse, il faut \* que les quarrés de  $PM (y)$  prise de part \* Art. 41. & d'autre de l'axe  $Aa$ , soient égaux chacun à la même quantité  $cc - \frac{c^2 x^2}{t^2}$ .

## COROLLAIRE V.

44. Il suit de ce que \*  $yy = cc - \frac{c^2 x^2}{t^2}$ , que plus  $CP$  \* Art. 41. ( $x$ ) prise de part & d'autre du centre  $C$  augmente, plus chaque ordonnée  $PM (y)$  prise de part & d'autre de l'un ou de l'autre axe  $Aa$ , diminue; de sorte que  $CP (x)$  étant égale à  $CA$  ou  $Ca (t)$ , chaque  $PM (y)$  devient alors nulle ou zero: & qu'au contraire plus  $CP (x)$  devient petite, plus aussi chaque ordonnée  $PM (y)$  prise

de part & d'autre de l'axe  $Aa$  augmente; de sorte que  $CP(x)$  devenant zero, chaque  $PM(y)$ , qui est alors  $CB$  ou  $Cb(c)$ , sera la plus grande des ordonnées. D'où il est clair.

1<sup>o</sup>. Que si l'on mène par les extrémités  $B, b$ , de l'un des axes conjugués, des parallèles à l'autre; elles seront tangentes en ces points.

2<sup>o</sup>. Que l'Ellipse s'éloigne de part & d'autre de plus en plus de l'un ou de l'autre axe  $Aa$ , en commençant par l'extrémité  $A$ , jusqu'à ce qu'elle rencontre son conjugué  $Bb$ ; après quoi elle va toujours en s'approchant du même axe  $Aa$ , jusqu'à ce qu'elle le rencontre en son autre extrémité  $a$ .

## COROLLAIRE VI.

\* Art. 41.

45. IL suit encore de ce que  $*yy = cc - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ , que si l'on prend les points  $P, P$ , également éloignés de part & d'autre du centre  $C$ ; les ordonnées  $PM, PM$ , seront égales. D'où il est évident que si une ligne quelconque  $MM$ , terminée par l'Ellipse, est coupée en deux également par l'un des axes conjugués  $Bb$  en un point  $K$  autre que le centre; elle sera parallèle à l'autre  $Aa$ . Car menant les parallèles  $MP, MP$ , à l'axe  $Bb$ , la ligne  $PP$  sera divisée par le milieu en  $C$ , puisque  $MM$  l'est en  $K$ ; & partant les ordonnées  $PM, PM$  seront égales. La droite  $MM$  sera donc parallèle à l'axe  $Aa$ .

## COROLLAIRE VII.

46. SI l'on conçoit que le plan sur lequel l'Ellipse est tracée, soit plié le long d'un des axes  $Bb$ , en sorte que ses deux parties se joignent; il est clair que les deux demi-Ellipses  $BAb, Bab$ , tomberont exactement l'une sur l'autre; sçavoir, les points  $A, M$ , &c. sur  $a, m$ , &c. puisque \* toutes les perpendiculaires  $Aa, MM$ , &c. à cet axe, sont coupées par le milieu aux points  $C, K$ , &c. D'où il est visible que l'Ellipse est coupée par les deux axes en qua-

\* Art. 45.

tre portions parfaitement égales & uniformes, qui ne diffèrent entr'elles que par leur situation.

## PROPOSITION III.

## Theorème.

47. Si l'on mene par l'une des extremités *A* de l'un des axes *Aa*, une ligne droite quelconque *AM* dans l'un des angles *aAL*, *aAL*, faits par cet axe, & par la ligne *LAL* parallèle à son conjugué *Bb*; je dis qu'elle rencontrera l'Ellipse en un autre point *M*. FIG. 20.

Ayant pris sur *AL* de part ou d'autre du point *A*, la partie *AG* égale au parametre *p* de l'axe *Aa*, & tiré *GF* parallèle à cet axe, & qui rencontre la ligne *AM* (prolongée, s'il est nécessaire) au point *F*, ou prendra sur la ligne *AL* du même côté où tombe la ligne *AM* par rapport à l'axe *Aa*, la partie *AL* égale à *GF*, & ayant tiré par l'autre extremité *a* de l'axe *Aa* la droite *aL*; je dis que le point *M* où elle coupe la ligne *AM*, est à l'Ellipse *MAM*.

Car menant *MP* parallèle à *AL*, & nommant les connues *Aa*, *2t*; *AG*, *p*; *GF* ou *AL*, *a*; & les inconnues *CP*, *x*; *PM*, *y*; les triangles semblables *AGF*, *MPA*, & *Laa*, *MPa*, donneront  $AG(p) \cdot GF(a) :: MP(y)$ .  $AP(t+x) = \frac{ay}{p}$ . Et  $AL(a) \cdot Aa(2t) :: PM(y)$ .  $aP(t-x) = \frac{2ty}{a}$ . Et par conséquent on aura toujours  $AP \times Pa (tt-xx) = \frac{2ty^2}{p}$ , soit que le point *P* tombe au dessus ou au dessous du centre *C*; d'où l'on tire  $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{p^2x}{2t}$ . La ligne *PM* sera donc \* une ordonnée à l'axe \* *Art. 41.* *Aa*; & partant le point *M* sera à l'Ellipse *MAM*. Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

48. De-la on voit comment un axe *Aa* d'une Ellipse *MAM* étant donné avec son parametre *p*, &

D ij

ayant mené par l'une des extrémités  $A$  de cet axe, une ligne droite quelconque  $AM$  dans l'un ou l'autre des angles  $aAL$ ,  $aAL$ , faits par cet axe, & par la ligne  $LAL$  parallèle à son conjugué  $Bb$ ; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point  $M$  où elle rencontre l'Ellipse  $MAM$ .

## COROLLAIRE II.

49. IL est évident qu'il n'y a que la ligne  $LAL$  parallèle à l'axe  $Bb$ , qui puisse être tangente de l'Ellipse  $MAM$  au point  $A$ , l'une des extrémités de son conjugué  $Aa$ ; puisqu'il n'y a que cette seule ligne, qui passant par le point  $A$ , & étant continuée de part & d'autre, ne la rencontre en aucun point, & n'entre pas dedans.

## PROPOSITION IV.

## Theorème.

FIG. 20.

50. TOUTS les diamètres comme  $MCm$ , sont coupés en deux également par le centre  $C$ , & ils ne rencontrent l'Ellipse qu'en deux points  $M$ ,  $m$ .

Art. 45. Ayant mené l'ordonnée  $MP$ , & pris  $Cp$  égale à  $CP$ , si l'on mène la perpendiculaire  $pm$  terminée en  $m$  par la droite  $MCm$ ; il est évident que les triangles  $CPM$ ,  $Cpm$  sont semblables & égaux, & qu'ainsi  $CM$  est égale à  $Cm$ , &  $PM$  à  $pm$ . Or comme \* les ordonnées qui sont également éloignées de part & d'autre du centre  $C$ , sont égales entr'elles, & que  $PM$  est une ordonnée, il s'ensuit que  $pm$  sera aussi une ordonnée; & par conséquent que le point  $m$  est à l'Ellipse.

De plus il est visible que si l'on imagine une parallèle à l'axe  $Bb$ , qui se meuve de  $C$  vers  $A$ ; la partie de cette parallèle renfermée dans l'angle  $ACM$ , ira toujours en augmentant à mesure que  $CP$  croît, & qu'au contraire la partie de cette parallèle renfermée entre le quart d'Ellipse  $AMB$  & l'axe  $CA$ , c'est à dire, l'ordon-

née  $PM$  \* ira toujours en diminuant; d'où il suit que \* *Art. 44.*  
la ligne droite  $CM$ , qui passe par le centre, ne rencontre l'Ellipse qu'en un point  $M$  du même côté de l'axe;  
& il en est de même pour le point  $m$  pris de l'autre côté.  
Donc &c.

## D E F I N I T I O N S.

II.

Si l'on mene par un point quelconque  $M$  de l'Ellipse, *FIG. 21. 22.*  
un diamètre  $MCm$ , une ordonnée  $MP$  à l'un ou l'autre  
axe  $Aa$ , & une ligne droite  $MT$ , en sorte que  $CT$  soit  
troisième proportionnelle à  $CP$ ,  $CA$ ; le diamètre  $SCs$   
parallèle à  $MT$ , est appelé *Diametre conjugué* au dia-  
mètre  $Mm$ ; Et réciproquement le diamètre  $Mm$  est dit  
conjugué au diamètre  $Ss$ : de sorte que les deux ensem-  
ble sont appelés *Diametres conjugués*.

12.

Toutes les lignes droites menées des points de l'Ellip-  
se parallèlement à l'un de ces deux diametres, & termi-  
nées par l'autre, sont appelées *Ordonnées* à cet autre.  
Ainsi  $NO$  parallèle au diamètre  $Ss$ , est Ordonnée à son  
conjugué  $Mm$ .

13.

La troisième proportionnelle à deux diametres con-  
jugués, est appelée *Parametre* du premier de la propor-  
tion. Ainsi la troisième proportionnelle à  $Mm$ ,  $Ss$ , est  
appelée *Parametre* du diamètre  $Mm$ .

## C O R O L L A I R E.

51. Si l'on nomme la donnée  $CA$ ,  $t$ ; & les indéter-  
minées  $CP$ ,  $x$ ;  $PT$ ,  $s$ ; il est clair, selon la définition 11<sup>e</sup>  
que  $CT (x + t) = \frac{t^2}{x}$ ; & qu'ainsi  $sx = tt - xx = AP * Pa$ .

## PROPOSITION V.

## Theorème.

52. SI l'on mene par les extremités  $M, S$ , de deux diametres conjugués  $Mm, Ss$ , deux ordonnées  $MP, SK$ , à un axe  $Aa$ : je dis que la partie  $CK$  de cet axe, prise entre le centre & la rencontre de l'une des ordonnées  $SK$ , est moyenne proportionnelle entre les deux parties  $AP, Pa$ , faites par la rencontre de l'autre ordonnée  $MP$ .

Il faut prouver que  $\overline{CK}^2 = AP \times Pa$ .

Ayant nommé les connues  $CA, t$ ;  $CP, x$ ;  $PT, s$ ; & l'inconnue  $CK, m$ ; on aura  $AP \times Pa = tt - xx = s \times$ , &  $AK \times Ka = tt - mm = sx - xx - mm$  en mettant pour  $tt$  sa valeur  $xx + sx$ . Cela posé, la propriété de l'Ellipse \* donnera  $AP \times Pa (sx)$ .  $AK \times Ka (sx - xx - mm) :: \overline{PM} \cdot \overline{KS} :: \overline{TP} (ss)$ .  $\overline{CK} (mm)$ , à cause des triangles semblables  $TPM, CKS$ . D'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens, & en transposant à l'ordinaire,  $\overline{CK}^2 (mm) = \frac{sx - xx - mm}{x + s} = sx = AP \times Pa$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

53. PUISQUE  $\overline{CK}^2 = tt - xx$ , il s'ensuit que  $\overline{CA} - \overline{CK}$  ou  $AK \times Ka = xx$ . Or \*  $\overline{CA} (tt)$ .  $\overline{CB} (cc) :: AK \times Ka (xx)$ .  $\overline{SK} = \frac{ccxx}{tt}$ . Et  $\overline{CA} (tt)$ .  $\overline{CB} (cc) :: AP \times Pa (tt - xx)$ .  $\overline{PM}^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$ . De plus à cause des triangles rectangles  $CPM, CKS$ , on aura le quarré  $\overline{CM}^2$  ou  $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = xx + cc - \frac{ccxx}{tt}$ , & le quarré  $\overline{CS}^2$  ou  $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2 = tt - xx + \frac{ccxx}{tt}$ . Donc  $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = tt + cc$ .

C'est à dire que la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques  $Mm, Ss$ , est égale à la somme des quarrés des deux axes  $Aa, Bb$ .



## PROPOSITION VI.

## Theorème.

§ 4. LE quarré d'une ordonnée quelconque  $ON$  au diamètre  $Mm$ , est au rectangle de  $MO \times Om$  fait des parties de ce diamètre ; comme le quarré de son conjugué  $Ss$ , est au quarré du même diamètre  $Mm$ .

Il faut prouver que  $\overline{ON}^2 : MO \times Om :: \overline{Ss}^2 : \overline{Mm}^2$ .

Ayant mené les paralleles  $NQ, OH$ , à l'axe  $Bb$ , & la parallele  $OR$  à son conjugué  $Aa$ , qui rencontre au point  $R$  l'ordonnée  $NQ$  prolongée, s'il est nécessaire ; on nommera les données  $CP, x$  ;  $PM, y$  ;  $CA, t$  ;  $PT, s$  ; & les indéterminées  $HQ$  ou  $OR, a$  ;  $CH, b$  ; & on aura à cause des triangles semblables  $CPM, CHO$ , &  $MPT, NRO$ , ces deux proportions  $CP(x) \cdot PM(y) :: CH(b) \cdot HO$  ou  $RQ = \frac{by}{x}$ . Et  $TP(s) \cdot PM(y) :: OR(a) \cdot RN = \frac{ay}{s}$ . Cela posé.

Puisque (fig. 21.)  $NQ$  est toujours la difference de  $RQ(\frac{by}{x})$ ,  $RN(\frac{ay}{s})$ , &  $CQ$  la somme de  $CH(b)$ ,  $HQ(a)$ , lorsque le point  $N$  tombe entre les points  $M, S$ , ou  $m, s$  ; & qu'au contraire (fig. 22.)  $NQ$  est toujours la somme de  $RQ, RN$ , &  $CQ$  la difference de  $CH, HQ$ , lorsque le point  $N$  tombe par tout ailleurs :

on aura  $\overline{NQ}^2 = \frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{xs} + \frac{aa yy}{ss}$ , &  $\overline{CQ}^2 = aa \pm 2ab \pm bb$  ; sçavoir  $-\frac{2abyy}{xs}$  &  $+2ab$  dans le premier cas,

& au contraire  $+\frac{2abyy}{xs}$  &  $-2ab$  dans le second cas. Or \* Art. 42 :

$AP \times Pa(tt - xx) \cdot AQ \times Qa$  ou  $\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2(tt - aa \pm 2ab - bb) = \overline{PM}^2(yy) \cdot \overline{QN}^2 = \frac{yy - ayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$ . En comparant ensemble ces deux valeurs du quarré de  $NQ$ ,

on formera l'égalité  $\frac{bb yy}{xx} \pm \frac{2abyy}{xs} + \frac{aa yy}{ss} = \frac{yy - ayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$ , dans laquelle effaçant d'une part le

terme  $\pm \frac{2aby}{ss}$  & de l'autre le terme  $\pm \frac{2aby}{tt-xx}$  qui lui est  
 \* Art. 51. égal, puisque  $*sx = tt - xx$ , & divisant par  $yy$ , il vient  

$$\frac{bb}{xx} + \frac{aa}{ss} = \frac{tt-aa-bb}{tt-xx}$$
.

Si l'on multiplie par  $xx$ , & qu'on transpose  $bb$ , on trouvera  $\frac{aaxx}{ss}$  ou  $\frac{aax^4}{ssxx} = \frac{txx-aaxx-bbt}{tt-xx}$ ; & multipliant le premier membre par  $ssxx$ , & le second par le carré de  $tt-xx$  valeur de  $sx$  (ce qui se fait en multipliant simplement le numerateur par  $tt-xx$ ) on aura  $aax^4 = t^4xx - aattxx - bbt^4 - ttx^4 + aax^4 + bbttxx$ ; d'où en effaçant de part & d'autre  $aax^4$ , transposant  $aattxx$ , & divisant par  $ttxx$ , l'on tirera  $HQ$  ou  $OR$  ( $aa$ )  $= tt - xx + bb - \frac{bbt}{xx}$ .

Maintenant si l'on nomme le demi diametre  $CM$  ou  $Cm$ ,  $z$ ; on aura à cause des triangles semblables  $CPM$ ,  $CHO$ , cette proportion  $CP(x) \cdot CM(z) :: CH(b)$ .  $CO = \frac{bz}{x}$ . Et partant  $MO \times Om = zz - \frac{bbxz}{xx}$ . Or les triangles semblables  $ORN$ ,  $CKS$ , donnent  $\overline{ON}^2 \cdot \overline{CS}^2 :: \overline{OR}^2$ .

\* Art. 52.  $(tt-xx + bb - \frac{bbt}{xx}) \cdot \overline{CK}^2 (tt-xx) :: MO \times Om (\frac{xxz-bbx}{xx})$ .  $\overline{CM}^2 (zz)$ . Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Donc  $\overline{ON}^2$ .

\* Art. 50.  $MO \times Om :: \overline{CS}^2 \cdot \overline{CM}^2 :: \overline{Ss}^2 \cdot \overline{Mm}^2$ . Ce qu'il falloit &c,

### COROLLAIRE GENERAL.

55. IL est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde par rapport aux deux axes  $Aa$ ,  $Bb$ , s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques  $Mm$ ,  $Ss$ . Or comme les articles 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48 & 49, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle  $ACB$  soit droit ou qu'il ne le soit pas; il s'ensuit que si l'on suppose dans ces articles, que les lignes  $Aa$ ,  $Bb$ , au lieu d'être les deux axes, soient deux diametres

diamètres conjugués quelconques, ils seront encore vrais dans cette supposition : car leur démonstration demeurera toujours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entièrement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe* celui de *Diamètre*.

## COROLLAIRE II.

56. COMME les articles 44 & 49, subsistent avec la même force, lorsque les lignes  $Aa$ ,  $Bb$ , au lieu d'être les deux axes, sont deux diamètres conjugués quelconques, tels que  $Mm$ ,  $Ss$  ; il s'ensuit que la ligne  $MT$  menée par le point  $M$  l'une des extrémités d'un diamètre quelconque  $Mm$ , parallèlement à son diamètre conjugué  $Ss$ , est tangente en  $M$ , & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher l'Ellipse en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une Ellipse, on ne peut mener qu'une seule tangente.

## COROLLAIRE III.

57. DE-LA il est évident, selon la définition 11<sup>e</sup>, que si l'on mène par un point quelconque  $M$  d'une Ellipse, une ordonnée  $MP$  à l'un ou l'autre axe  $Aa$  ; & qu'ayant pris  $CT$  du côté du point  $P$ , troisième proportionnelle à  $CP$ ,  $CA$ , on tire la droite  $MT$  : cette ligne  $MT$  sera tangente en  $M$ . Et réciproquement, que si la ligne  $MT$  est tangente en  $M$ , & qu'on mène l'ordonnée  $MP$  à l'un ou l'autre axe  $Aa$ , les parties  $CP$ ,  $CA$ ,  $CT$  de cet axe, seront en proportion géométrique continuë.

## COROLLAIRE IV.

58. SI l'on imagine dans les définitions 11, 12 & 13, & dans les deux dernières Propositions, que les lignes  $Aa$ ,  $Bb$ , au lieu d'être les deux axes, soient deux diamètres conjugués quelconques ; on verra que ces Propositions seront encore vraies, puisqu'elles se démontreront de la même manière qu'auparavant : comme il est évident par l'inspection de la figure 23, où les triangles

semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas des axes.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précédent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne  $Aa$ , au lieu d'être un axe, est un diamètre quelconque. 2°. Que les diamètres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , peuvent être les deux axes dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder les deux axes comme deux diamètres conjugués, qui font entr'eux des angles droits.

### PROPOSITION VII.

#### Theorème.

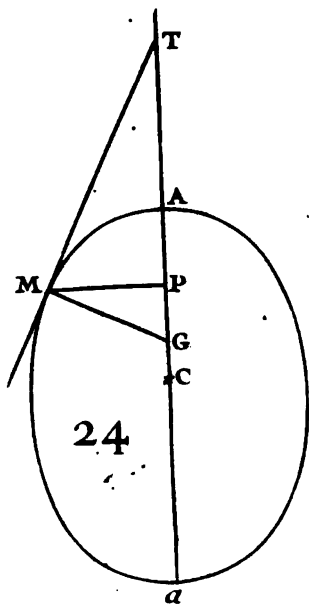
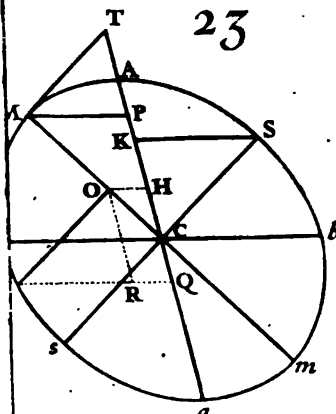
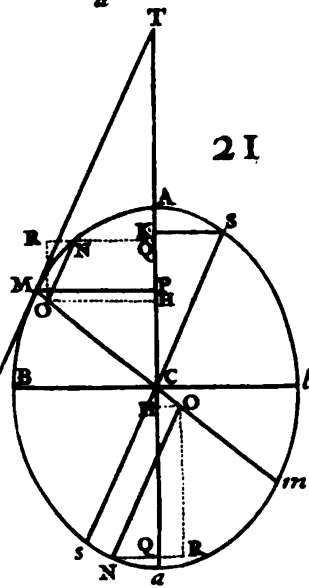
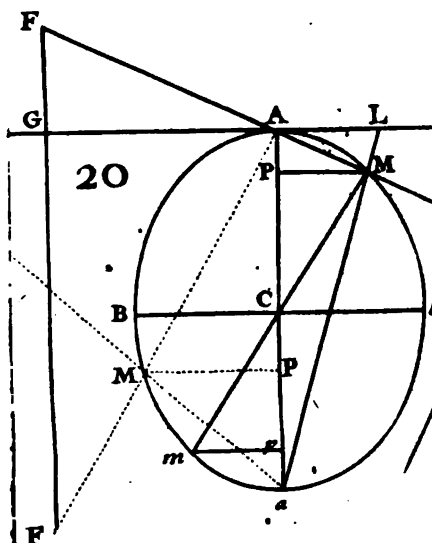
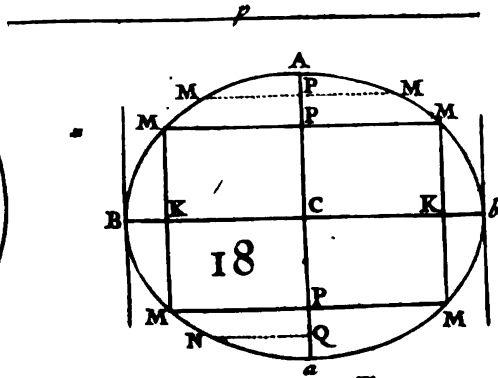
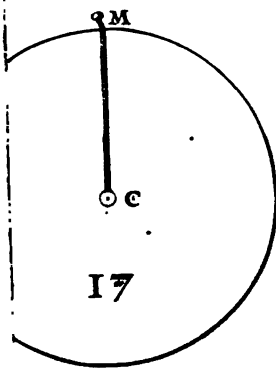
FIG. 24. 59. Si par un point quelconque d'une Ellipse qui a pour centre le point  $C$ , l'on tire une ordonnée  $MP$  à l'un des axes  $Aa$ , & une perpendiculaire  $MG$  à la tangente  $MT$  qui passe par le point  $M$ : je dis que  $CP$  sera toujours à  $PG$  en raison donnée de l'axe  $Aa$  à son paramètre.

Car nommant le demi-axe  $CA$  ou  $Ca$ ,  $s$ ; & les indéterminées  $CP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; on aura \*  $CT = \frac{s^2}{x}$ ; & partant  $PT = \frac{s^2 - xx}{x}$ . Or les triangles rectangles semblables  $TPM$ ,  $MPG$ , donnent  $TP (\frac{s^2 - xx}{x}) . PM (y) :: PM (y) . PG = \frac{xy^2}{s^2 - xx}$ . D'où l'on tire cette proportion  $CP (x) . PG (\frac{xy^2}{s^2 - xx}) :: AP \times Pa (ss - xx) . \overline{PM}^2 (yy)$ . Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit  $xyy$ . Mais le rectangle  $AP \times Pa$ , est \* au quarré  $\overline{PM}$ , comme l'axe  $Aa$  est à son paramètre. Donc &c.

### PROPOSITION VIII.

#### Theorème.

FIG. 25. 60. Si l'on mène par un point quelconque  $M$  d'une Ellipse, une tangente  $TMS$ , & aux deux foyers  $F, f$ , les droites  $MF$ ,





*Mf*; je dis que les angles *FMT*, *fMS*, faits par ces lignes de part & d'autre avec la tangente *TMS*, sont égaux entr'eux.

Car ayant mené les perpendiculaires *FD*, *fd*, sur cette tangente; le premier axe *Aa* qui la rencontre en *T*, & l'ordonnée *MP* à cet axe, & nommé les données *CA* ou *Ca*, *t*; *CF* ou *Cf*, *m*; & l'indéterminée *CP*, *x*; on aura  $MF^* (t - \frac{mx}{t})$ .  $Mf (t + \frac{mx}{t}) :: TF$ , ou  $CT^* \begin{matrix} * \text{ Art. } 38. \\ * \text{ Art. } 57. \end{matrix}$   $(\frac{t}{x}) - CF(m)$ .  $Tf$  ou  $CT (\frac{t}{x}) + Cf(m)$ . Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Or les triangles semblables *TFD*, *Tfd*, donnent  $TF.Tf :: FD.fd$ . L'hypothénuse *MF* du triangle rectangle *MDF*, sera donc à l'hypothénuse *Mf* du triangle rectangle *Mdf*, comme le côté *DF* est au côté *df*; & par conséquent ces deux triangles seront semblables. Les angles *FMD*, *fMd*, ou *FMT*, *fMS*, qui sont opposés aux côtés homologues *DF*, *df*, seront donc égaux entr'eux. Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

61. DE-LA il est évident que la tangente *TMS* étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant *M*, laisse l'Ellipse toute entière du côté de ses deux foyers *F*, *f*. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de l'Ellipse que tombe le point *M*, il s'ensuit qu'elle sera concave dans toute son étendue autour de ses deux foyers, & par conséquent aussi autour de son centre.

## PROPOSITION IX.

## Theorème.

62. Si l'on mène par l'une des extrémités *A* d'un diamètre *Aa* une parallèle *DAE* à son conjugué *Bb*, laquelle rencontre deux autres diamètres conjugués quelconques *Mm*, *Ss*,  
E ij

Fig. 16.

aux points D, E; je dis que le rectangle de DA par AE, est égal au quarré de la moitié CB du diamètre Bb.

Il faut prouver que  $DA \times AE = \overline{CB}^2$ .

Ayant mené par les extrémités M, S, des diamètres conjugués Mm, Ss, les ordonnées MP, SK, au diamètre Aa, on nommera les données CA, t; CB, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; & on aura \*  $\overline{CK}^2 = AP \times Pa = tt - xx$ ; & par conséquent  $AK \times Ka$  ou  $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2 = xx$ . Or \*  $\overline{BC}^2$  (cc).  $\overline{CA}^2$  (tt) ::  $\overline{MP}^2$  (yy).  $AP \times Pa$  ou  $\overline{CK}^2 = \frac{ty}{c}$ . Et  $\overline{CA}^2$  (tt).  $\overline{CB}^2$  (cc) ::  $AK \times Ka$  (xx).  $\overline{KS}^2 = \frac{cx}{t}$ . Donc en extrayant les racines quarrées, l'on tire  $CK = \frac{t}{c}$ , &  $KS = \frac{cx}{t}$ . Mais les triangles semblables CPM, CAD, & CKS, CAE, donnent CP (x). PM (y) :: CA (t). AD =  $\frac{t}{x}$ . Et CK ( $\frac{t}{c}$ ). KS ( $\frac{cx}{t}$ ) :: CA (t). AE =  $\frac{cx}{t}$ . Donc  $DA \times AE = cc = \overline{BC}^2$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION X.

### Problème.

FIG. 27. 63. DEUX diamètres conjugués Aa, Bb, d'une Ellipse étant donnés, avec une ligne droite MCM qui passe par le centre C; marquer sur cette ligne les points M, m, où elle rencontre l'Ellipse.

Ayant mené par l'une des extrémités A du diamètre Aa, une parallèle indéfinie AD, à son conjugué Bb, laquelle rencontre la ligne CM donnée de position au point D; on tirera par le point A perpendiculairement sur AD, la ligne AO égale à CB, & par les points O, D, la ligne OD. On décrira du rayon OA un cercle qui coupera la ligne OD en deux points N, n, par où l'on tirera des parallèles NM, nm, à la ligne OC qui joint



les centres de l'Ellipse & du cercle. Je dis que les points  $M, m$ , où elles rencontrent la ligne  $CD$ , seront à l'Ellipse, & détermineront par conséquent les extrémités du diamètre  $MCm$  donné de position.

Car menant les parallèles  $MP, NQ$ , à  $AD$ , qui rencontrent les lignes  $CA, OA$ , aux points  $P, Q$ ; les triangles semblables  $CDO, MDN$ , &  $CDA, CMP$ , &  $ODA, ONQ$ , donneront  $CA. CP :: CD. CM :: OD. ON :: OA. OQ$ . c'est à dire,  $CA. CP :: OA. OQ$ . Et partant si l'on mene la droite  $PQ$ , elle sera parallèle à  $OC$ ; & par conséquent aussi à  $MN$  supposée parallèle à  $OC$ . Ainsi les parallèles  $MP, NQ$ , seront égales entr'elles.

Cela posé, si l'on nomme les données  $CA, t$ ;  $CB$  ou  $AO$  ou  $ON, c$ ; & les indéterminées  $CP, x$ ;  $PM$  ou  $NQ, y$ ; on aura  $CA(t). CP(x) :: OA(c). OQ = \frac{cx}{t}$ .

Et à cause du triangle  $OQN$  rectangle en  $Q$ , le carré  $NQ^2$  ou  $MP^2 (yy) = ON^2 (cc) - OQ^2 (\frac{c^2 x^2}{t^2})$ . La li-

gne  $MP$  sera donc \* une ordonnée au diamètre  $Aa$ , & par conséquent le point  $M$  appartiendra à l'Ellipse qui a pour diamètres conjugués les droites  $Aa, Bb$ . Mais à cause des parallèles  $NM, OC, nm$ , la ligne  $Mm$  est divisée en deux également par le centre  $C$ ; puisque par la propriété du cercle,  $Nn$  l'est au point  $O$ . Donc le point  $m$  appartiendra \* aussi à la même Ellipse.

Si les diamètres conjugués  $Aa, Bb$ , étoient les deux axes, les parallèles  $CO, PQ$ , se confondroient alors avec les lignes  $CA, AO$ , qui n'en feroient qu'une seule; ce qui rendroit la construction & la démonstration un peu plus faciles.

## PROPOSITION XI.

## Problème.

64. DEUX diamètres conjugués  $Aa, Bb$ , d'une Ellipse étant donnés; en trouver les deux axes  $Mm, Ss$ : & démontrer qu'il n'y en peut avoir que deux.

FIG. 27.

Ayant mené par l'une des extrémités  $A$  du diamètre  $Aa$ , une parallèle  $DE$  à son conjugué  $Bb$ , on tirera  $AO$  perpendiculaire à  $DE$  & égale à  $CB$ . Ayant joint  $OC$ , on menera par son point de milieu  $F$  la ligne  $FG$  qui la coupe à angles droits, & qui rencontre au point  $G$  la ligne  $DE$ , sur laquelle on prendra de part & d'autre du point  $G$  les parties  $GD, GE$ , égales chacune à  $GO$  ou  $GC$ . Tirant enfin les droites  $CD, CE$ ; je dis que les deux axes  $Mm, Ss$ , sont situés sur ces droites.

\* Art. 58.

Car les deux axes pouvant être regardés \* comme deux diamètres conjugués, qui font entr'eux un angle droit, ils rencontreront la ligne  $DE$  en des points  $D, E$ , tels que le cercle décrit de ce diamètre passera par les deux points  $C, O$ ; puisque le rectangle  $DA \times AE$  étant égal \* au carré de  $AO$ , l'angle  $DOE$  sera droit, aussi bien que l'angle  $DCE$ . Or il est évident que c'est précisément ce que l'on vient de faire par le moyen de cette construction; puisque les lignes  $GO, GC, GE, GD$  étant toutes égales entr'elles, sont les rayons d'un même cercle. Mais comme il ne peut y avoir sur la ligne  $DE$  que deux points  $D, E$ , qui satisfassent en même temps à ces deux conditions; sçavoir, que l'angle  $DCE$  & l'angle  $DOE$  soient chacun droit; il s'ensuit que les diamètres conjugués  $Mm, Ss$ , qui font entr'eux un angle droit, seront les mêmes que les axes; & qu'il n'y en peut avoir que deux.

\* Art. 62.

\* Art. 63.

Maintenant pour en déterminer la grandeur, il n'y a qu'à tirer les droites  $OD, OE$ ; & par les points  $N, R$ , où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon  $OA$ , mener les parallèles  $NM, RS$ . Car il est évident \* que les points  $M, S$ , où elles rencontrent les droites  $CD, CE$ , appartiendront à l'Ellipse qui a pour diamètres conjugués les lignes  $Aa, Bb$ ; & qu'ainsi ils seront les extrémités de ses axes.

## COROLLAIRE.

65. Si l'on propoſoit de trouver deux diametres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , qui fiſſent entr'eux un angle  $MCS$  égal à un angle donné, deux autres diametres conjugués  $Aa$ ,  $Bb$ , étant donnés. Il eſt viſible que la queſtion ſe réduiroit à trouver ſur la ligne  $DE$  donnée de poſition, deux points  $D$ ,  $E$ , tels que menant aux deux points  $O$ ,  $C$ , donnés hors cette ligne, les droites  $DO$ ,  $OE$ ,  $CD$ ,  $CE$ , l'angle  $DOE$  fût droit, & l'angle  $DCE$  égal à l'angle donné. Mais comme la ſolution de ce Problème eſt aſſez difficile, on l'a renvoyée dans le 10<sup>e</sup> Livre, & on a ſuivi ici une autre voye, qui eſt plus ſimple; c'eſt de trouver d'abord les deux axes, & de ſ'en ſervir enſuite pour trouver les deux diametres conjugués qu'on demande, comme l'on va enſeigner dans la Proposition ſuivante:

## PROPOSITION XII.

## Problème.

66. Les deux axes  $Aa$ ,  $Bb$ , d'une Ellipſe étant donnés; Fig. 18. 19.  
trouver deux diametres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , qui faſſent entr'eux l'angle  $MCS$  égal à un angle donné.

Je ſuppoſe que les diametres  $Mm$ ,  $Ss$ , ſoient en effet ceux qu'on demande, & qu'ils rencontrent aux points  $D$ ,  $E$ , la ligne droite indéfinie  $DE$  menée par l'extrémité  $A$  du petit axe  $Aa$  parallelement au grand  $Bb$ . Et ayant tiré du centre  $C$  de l'Ellipſe, la ligne  $CF$ , qui faſſe avec  $DE$  au point  $F$  l'angle  $CFE$  égal à l'angle donné  $MCS$ , je nomme les données  $CA$ ,  $t$ ;  $CB$ ,  $c$ ;  $AF$ ,  $a$ ; & l'inconnue  $AE$ ,  $x$ ; ce qui donne  $AD = * \frac{c^2}{x}$ ,  $CE = * \text{Art. 62}$   
 $= \sqrt{tt - tx}$  à cauſe du triangle rectangle  $CAE$ . Cela poſé.

Les triangles  $FEC$ ,  $CED$ , ſeront ſemblables; puis que l'angle au point  $E$  eſt commun, & que l'angle  $CFE$  a

été fait égal à l'angle  $MCS$ : c'est pourquoi  $FE (x-a)$ .  
 $EC(\sqrt{tt+xx}) :: EC(\sqrt{tt+xx})$ .  $ED(x+\frac{cc}{x})$ . D'où en  
 multipliant les extrêmes & les moyens, l'on forme l'éga-  
 lité  $xx-ax+cc-\frac{ac}{x}=tt+xx$ , & effaçant de part &  
 d'autre  $xx$ , multipliant ensuite par  $x$ , & divisant par  $a$ ,  
 il vient  $xx-\frac{cc}{a}x+\frac{tt}{a}x+cc=0$ . Et en faisant (pour fa-  
 ciliter le calcul)  $\frac{cc-tt}{a}=2b$ , on changera l'égalité pré-  
 cédente en celle-ci  $xx-2bx+cc=0$ , ou  $xx-2bx+bb=bb-cc$ ; ce qui donne en extrayant de part & d'au-  
 tre la racine quarrée  $x-b$  ou  $b-x=\sqrt{bb-cc}$ , & par  
 conséquent l'inconnue  $AE(x)=b+\sqrt{bb-cc}$ . Voici  
 maintenant la construction que cette dernière égalité  
 fournit.

Ayant prolongé le petit axe  $Aa$  jusqu'au point  $O$ , en  
 sorte que  $AO$  soit égale à la moitié  $CB$  du grand, soit  
 tirée  $CF$ , qui fasse avec  $DE$  menée par le point  $A$  pa-  
 rallelement à  $Bb$ , l'angle  $CFE$  égal à l'angle donné.  
 Ayant joint  $OF$ , soient tirées les droites  $OH$ ,  $CG$ , per-  
 pendiculaires sur  $OF$ ,  $CF$ , qui rencontrent  $DE$  aux  
 points  $H$ ,  $G$  (on n'a point marqué dans les figures 28  
 & 29, les points  $H$ ,  $G$ , sur la ligne  $DE$ ; parce que ces fi-  
 gures auroient été trop grandes, & que d'ailleurs il est  
 facile de les y imaginer). Soit décrit du centre  $O$ , & du  
 rayon  $OK$ , égal à la moitié de  $GH$ , partie de  $AD$  prolon-  
 gée, comprise entre  $G$  &  $H$ , un arc de cercle qui coupe  
 $DE$  aux points  $K$ ,  $K$ , & ayant pris sur  $DE$  les parties  $KD$ ,  
 $KE$ , égales chacune à  $KO$ , soient tirées par le centre  $C$  de  
 l'Ellipse, les droites  $DC$ ,  $EC$ . Je dis que les diamètres  
 cherchés  $Mm$ ,  $Ss$ , sont situés sur ces lignes.

Car à cause des angles droits  $FAC$ ,  $FCG$ , &  $FAO$ ,  
 $FOH$ ; on aura  $AG=\frac{tt}{a}$ ,  $AH=\frac{cc}{a}$ ; & partant  $GH$   
 $=\frac{cc-tt}{a}=2b$ . Le rayon  $OK$  qui est égal à la moitié de  
 $HG$ , sera donc égal à  $b$ ; & à cause du triangle rectan-  
 gle

gle  $OAK$ , on aura  $AK = \sqrt{bb - cc}$ , &  $AE$  ou  $KE \mp AK = b \mp \sqrt{bb - cc}$ , &  $AD$  ou  $KD \pm AK = b \pm \sqrt{bb - cc}$ . Or cela posé, si l'on multiplie la valeur de  $AE$  par celle de  $AD$ , il vient  $AE \times AD = cc = \overline{CB}^2$ ; & partant \* les diametres  $Mm$ ,  $Ss$ , sont conjugués. Mais le rectangle de  $AE \mp AD$  ou  $DE(2b)$  par  $AE - AF$  ou  $EF(b \mp \sqrt{bb - cc} - a)$  est  $= 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} - 2ab = 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc$  en mettant pour  $2ab$  la valeur  $cc - tt$ ; & à cause du triangle rectangle  $CAE$  le quarré  $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CA}^2 = 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc = DE \times EF$ : ce qui donne  $FE : EC :: EC : ED$ . Et partant les triangles  $FEQ$ ,  $CED$ , seront semblables; puisqu'ils ont l'angle au point  $E$  commun, & que leurs côtés autour de cet angle sont proportionnels. L'angle  $MCS$  sera donc égal à l'angle donné  $CFE$ . C'est ce qui restoit à démontrer.

Maintenant pour avoir la grandeur  $CM$ ,  $CS$ , des deux demi-diametres cherchés; il n'y a qu'à tirer les lignes  $OD$ ,  $OE$ , & mener par les points  $N$ ,  $R$ , où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon  $OA$ , les paralleles  $NM$ ,  $RS$ , à  $OC$ . Car il est visible \* que les points  $M$ ,  $S$ , où elles rencontrent les droites  $CD$ ,  $CE$ , seront à l'Ellipse, & détermineront par conséquent les extremités de ces diametres.

## COROLLAIRE I

67. IL suit de cette construction, 1°. Qu'afin que le Problème soit possible, il faut que  $OK(\frac{cc - tt}{2a})$  surpasse ou soit égale à  $AO(c)$ ; car autrement le cercle décrit du rayon  $OK$ , ne rencontreroit la ligne  $DE$  en aucun point, ce qui est néanmoins nécessaire pour la construction.

2°. Que lorsque  $OK$  surpasse  $OA$ , on trouve toujours par le moyen des deux points  $K$ ,  $K$ , deux differens diametres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , qui satisfont également: mais qu'alors le diametre  $Ss$  de la figure 29 est égal au diametre  $Mm$  de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe  $Aa$ ; parce que  $AE$  de la figure

29. est égal à  $AD$  de la figure 28. Et de même que le diamètre  $Mm$  de la figure 29. est égal au diamètre  $Ss$  de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe  $Aa$ ; parce que  $AD$  de la figure 29. est égal à  $AE$  de la figure 28. C'est à dire que les deux differens diametres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , qui satisfont également au Problème, sont semblablement posés de part & d'autre de l'axe  $Aa$ , & que dans ces deux differentes positions leurs grandeurs demeurent la même.

FIG. 29.

3°. Que lorsque  $OK = OA$ , les deux points d'intersection  $K$ ,  $K$ , se réunissent au point touchant  $A$ ; & qu'ainsi il n'y a alors qu'à prendre les parties  $AE$ ,  $AD$ , égales chacune à la moitié  $CB$  du grand axe: d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir alors qu'une solution, & que les deux diametres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , qui satisfont, sont égaux entr'eux.

## COROLLAIRE. II.

FIG. 28. 29.  
& 30.

68. IL est clair aussi que plus  $AF$  ( $a$ ) est grande, plus l'angle obtus donné  $CFE$  l'est aussi, & plus au contraire la ligne  $OK$  ( $\frac{a^2 - c^2}{2a}$ ) diminuë: de sorte. que  $AF$  étant la plus grande qu'il est possible, l'angle obtus  $CFE$ , sera aussi le plus grand; & au contraire la ligne  $OK$ , sera la moindre, c'est à dire égale à  $AO$ . Or si l'on mene alors les droites  $Ba$ ,  $ab$ ; les triangles rectangles  $aCB$ ,  $CAD$ ,  $aCb$ ,  $CAE$ , seront tous égaux entr'eux; puisque les lignes,  $AE$ ,  $AD$ , sont égales chacune à la moitié  $CB$  ou:  $Cb$  de l'axe  $Bb$ , & que  $CA$  est égal à  $Ca$ . L'angle  $ACM$ , sera donc égal à l'angle  $CaB$ , & l'angle  $ACS$  à l'angle  $Cab$ ; & partant l'angle donné  $MCS$  ou  $CFE$ , sera aussi égal à l'angle  $Bab$ . D'où l'on voit::

FIG. 30.

FIG. 28. 29.  
& 30.

\* Art. 67.

1°. Que si l'on mene de l'une des extremités  $a$  du petit axe  $Aa$  aux extremités  $B$ ,  $b$ , du grand, les lignes  $aB$ ,  $ab$ ; l'angle obtus donné  $CFE$ , doit être égal ou moindre que l'angle  $Bab$ , afin que \* le Problème soit possible.

2°. Que lorsqu'il lui est égal, comme dans la figure 30.

il n'y a que deux diametres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , qui satisfassent, lesquels sont égaux entr'eux.

3°. Que lorsqu'il est moindre, comme dans les fig. 28. & 29. il y a toujours deux differens diametres conjugués qui satisfont également; qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre du petit axe, cet angle demeurant le même entr'eux; & que leur grandeur demeure aussi la même dans ces deux différentes positions.

## PROPOSITION XIII.

## Problème.

69. DEUX diametres conjugués  $Aa$ ,  $Bb$ , d'une Ellipse étant donnés; la décrire par un mouvement continu.

## PREMIERE MANIERE.

On cherchera \* les deux axes, & on la décrira en- \* Art. 64. suite selon l'article 36.

## SECONDE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités  $A$  de l'un des diametres donnés  $Aa$ , une perpendiculaire  $AH$  sur l'autre  $Bb$ , on prendra sur cette ligne la partie  $AQ$  de part ou d'autre du point  $A$  égale à  $CB$ . Et aiant tiré la ligne  $CQ$ , on fera glisser la ligne  $GF$  égale à  $HQ$  par ses extremités le long des lignes  $Bb$ ,  $CQ$  (prolongées de part & d'autre du centre  $C$  autant qu'il sera nécessaire) jusqu'à ce qu'après avoir parcouru successivement les quatre angles faits par ces deux lignes, elle revienne dans la même situation d'où elle étoit partie. Je dis que si l'on prend  $GM$  égal à  $AQ$ , le point  $M$  décrira dans ce mouvement l'Ellipse requise.

Car menant  $GP$  parallele à  $QA$ , qui rencontre en  $P$  le diametre  $Aa$ , & en  $O$  le diametre  $Bb$ ; les triangles semblables  $CHQ$ ,  $COG$ , &  $CAQ$ ,  $CPG$ , donneront  $CQ$ .  $CG :: AQ$  ou  $GM$ .  $GP :: HQ$  ou  $GF$ .  $GO$ . Et par conséquent la ligne  $PM$  sera parallele au diametre  $Bb$ . Cela posé.

F ij

Si l'on nomme les données  $CA, t$ ;  $AQ$  ou  $CB$  ou  $Cb, c$ ; & les inconnues  $CP, x$ ;  $PM, y$ ; on aura  $CA (t) CP (x) :: AQ (c)$ .  $GP = \frac{cx}{t}$ . Et le triangle rectangle  $GPM$  donnera  $\overline{PM}^2 = \overline{GM}^2 - \overline{GP}^2$ , c'est à dire en termes analytiques  $yy = cc - \frac{c^2xx}{t^2}$ . La ligne  $PM$  fera

\* Art. 41. &  
55.

FIG. 33.

donc \* une ordonnée au diamètre  $Aa$  dans l'Ellipse qui a pour diamètres conjugués les lignes  $Aa, Bb$ . Donc &c.

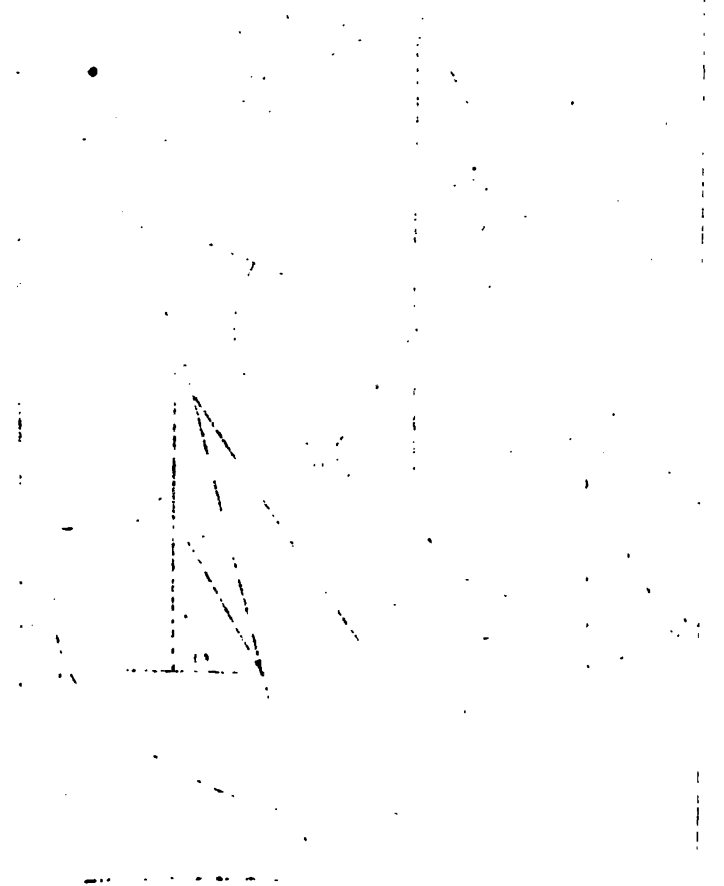
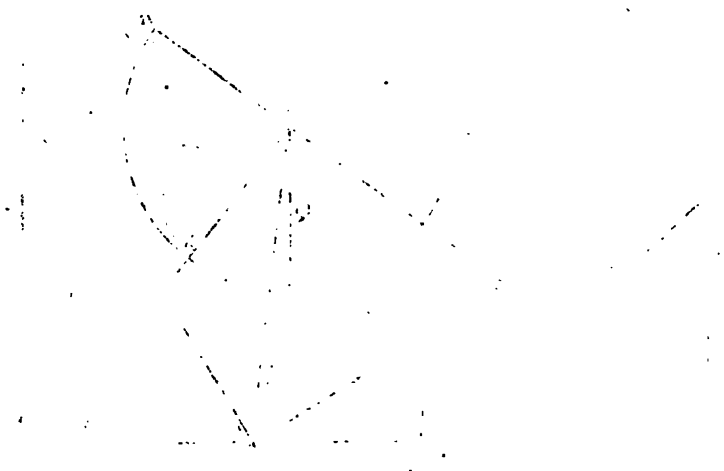
Si les deux diamètres conjugués  $Aa, Bb$ , étoient les deux axes, il est clair que les lignes  $AQ, CQ$ , tomberoient sur le diamètre  $Aa$  qui seroit l'un des axes, & que le point  $H$  tomberoit sur le centre  $C$ . D'où l'on voit qu'il faudroit prendre alors  $GF$  égale à  $CQ$ , somme ou différence des deux demi-axes  $CA, CB$ ; & la faire glisser par ses extrémités le long des axes  $Aa, Bb$ , prolongés s'il est nécessaire.

Comme les lignes  $Aa, Bb$ , s'entrecoupent à angles droits au point  $C$ ; il est clair qu'en quelque situation que se trouve la droite  $GF$  pendant qu'elle glisse le long de ces lignes, le cercle qui auroit cette ligne pour diamètre, passeroit toujours par le point  $C$ ; & qu'ainsi la ligne  $CD$  qui passe par le point  $D$  milieu de  $FG$ , sera toujours égale à  $DF$ , puisque les lignes  $CD, DF, DG$ , seront toujours des rayons de ce cercle. De là naît la description suivante.

Soient deux lignes droites  $CD, DF$ , égales chacune à la moitié de  $CQ$ , somme ou différence des deux demi-axes  $CB, CA$ ; attachées l'une à l'autre par leur extrémité commune  $D$ , en sorte qu'elles se puissent mouvoir autour de ce point, comme les jambes d'un compas autour de sa tête. Soit attachée l'extrémité  $C$  de la droite  $CD$  dans le centre de l'Ellipse; & soit entendue l'extrémité  $F$  de l'autre droite  $FD$ , se mouvoir le long de l'axe  $Bb$ , en entraînant avec elle la ligne  $DC$  mobile autour du point fixe  $C$ . Il est clair que si l'on prend sur  $FD$  (prolongée, s'il est nécessaire) la partie  $FM$  égale à  $CA$ , le







point  $M$  décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on cherche.

PROPOSITION XIV.

Problème.

70. **D**eux diamètres conjugués  $Aa$ ,  $Bb$ , d'une Ellipse étant donnés ; la décrire par plusieurs points.

PREMIÈRE MANIÈRE.

Ayant mené par l'une des extrémités  $A$  de l'un des diamètres donnés  $Aa$ , une parallèle indéfinie  $DAD$  à son conjugué  $Bb$ , on tirera  $AO$  perpendiculaire à  $AD$ , & égale à la moitié  $CB$  du diamètre  $Bb$  ; on joindra  $OC$  ; & on décrira un cercle du centre  $O$ , & du rayon  $OA$ . Cela fait on menera librement de part & d'autre de  $CA$ , autant de lignes  $CD$ ,  $CD$ , &c. qu'on voudra ; & ayant tiré des points  $D$ ,  $D$ , &c. où elles rencontrent la ligne  $DAD$ , au centre  $O$ , les lignes  $DO$ ,  $DO$  &c. qui coupent la circonférence du cercle aux points  $N$ ,  $N$ , &c. on menera des droites  $NM$ ,  $NM$ , &c. parallèles à  $OC$ , lesquelles rencontrent aux points  $M$ ,  $M$ , &c. les droites correspondantes  $CD$ ,  $CD$ , &c. sur lesquelles on marquera de l'autre côté du centre  $C$  des points  $m$ ,  $m$  &c. qui en soient également éloignés. Il est évident \* que la ligne courbe qui passera par tous les points  $M$ ,  $M$ , &c. ;  $m$ ,  $m$ , &c. ainsi trouvés, aura pour diamètres conjugués les droites  $Aa$ ,  $Bb$ .

FIG. 34

\* Art. 63.

SECONDE MANIÈRE.

Ayant pris sur l'un des demi-diamètres  $CB$ , de petites parties  $CE$ ,  $EE$ , &c. égales entr'elles, de telle grandeur qu'on voudra, & autant que ce demi-diamètre en pourra contenir ; on lui menera les perpendiculaires  $ED$ ,  $ED$ , &c. qui rencontrent la circonférence circulaire décrite du centre  $C$  & du rayon  $CB$ , aux points  $D$ ,  $D$ , &c. Ayant joint  $AB$ , on tirera par celui des points  $E$ , qui est le plus proche du centre  $C$ , la ligne  $EP$  parallèle à  $AB$ .

FIG. 35

qui rencontre  $CA$  au point  $P$ . On prendra sur le diamètre  $Aa$  de part & d'autre du centre  $C$ , autant de parties  $PP$ ,  $PP$ , &c. égales à  $CP$ , qu'il en pourra contenir, & on menera par tous les points  $P$ ,  $P$ , &c. des parallèles  $MPM$ ,  $MPM$ , &c. au diamètre  $Bb$ , sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point  $P$ , des parties  $PM$ ,  $PM$ , égales chacune à sa correspondante  $ED$ . Je dis que la ligne courbe qui passe par tous ces points  $M$ , sera l'Ellipse qu'on demande.

Car nommant les données  $CA$ ,  $t$ ;  $CB$  ou  $CD$ ,  $c$ ; & les indéterminées  $CP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; on aura à cause des triangles semblables  $CAB$ ,  $CPE$ , cette proportion  $CA$  ( $t$ ).  $CB$  ( $c$ ) ::  $CP$  ( $x$ ).  $CE = \frac{cx}{t}$ . Et à cause du triangle  $CED$  rectangle en  $E$ , le carré  $\overline{ED}^2$  ou  $\overline{PM}^2$  ( $yy$ ) =  $\overline{CD}^2$  ( $cc$ ) -  $\overline{CE}^2$  ( $\frac{c^2 x^2}{t^2}$ ). La ligne  $PM$  sera donc \* une ordonnée au diamètre  $Aa$ . Et comme cette démonstration convient à toutes les lignes  $PM$ ; puisque chaque  $CP$  est toujours à sa correspondante  $CE$ , en raison de  $CA$  à  $CB$ : il s'ensuit que la Courbe qui passe par tous les points  $M$  trouvés, comme cy-dessus, sera l'Ellipse qu'on demande.

\* Art. 48.  
 § 35.

## LIVRE TROISIEME.

*De l'Hyperbole.*

## DÉFINITIONS.

1.

**A**YANT attaché sur un plan en un point  $f$  l'une des Fig. 36.  
 extrémités d'une longue regle  $fMO$ , en sorte qu'elle  
 puisse tourner librement autour de ce point fixe  $f$ , com-  
 me centre ; on attachera à son autre extrémité  $O$ , le  
 bout d'un fil  $OMF$ , dont la longueur doit être moi-  
 ndre que celle de la regle, & duquel l'autre bout sera  
 attaché en un autre point  $F$ , pris aussi sur ce plan.  
 Maintenant, si l'on fait tourner la regle  $fMO$  au-  
 tour du point fixe  $f$ , & qu'en même temps l'on se ser-  
 ve d'un stile  $M$  pour tenir le fil  $OMF$ , toujours égale-  
 ment rendu, & la partie  $MO$  toute jointe & comme  
 collée contre le bord de la regle : la ligne courbe  $AX$   
 décrite dans ce mouvement, est une portion d'*Hyperbole*.

Si l'on renverse la regle de l'autre côté du point  $F$ , on  
 décrira de la même sorte l'autre portion  $AZ$  de la mê-  
 me *Hyperbole*.

Mais, si sans changer la longueur de la regle, ni cel-  
 le du fil, on attache l'extrémité de la regle en  $F$ , &  
 celle du fil en  $f$ , on décrira en la même sorte une au-  
 tre ligne courbe  $axx$  opposée à la première  $AXZ$ , qui  
 est encore appelée *Hyperbole*, & les deux ensemble sont  
 nommées *Hyperboles opposées*.

2.

Les deux points fixes  $F, f$ , sont nommés les *Foyers*.

3.

La ligne  $Aa$ , qui passe par les deux foyers  $F, f$ , & qui  
 est terminée de part & d'autre par les *Hyperboles oppo-*  
*sées*, est appelée le *premier Axe*.

4.

Le point  $C$ , qui divise par le milieu le premier axe  $Aa$ ,  
 est nommé le *Centre*.

5.

Si l'on mène par le centre  $C$  une perpendiculaire indéfinie  $Bb$  au premier axe  $Aa$ ; & que du point  $A$ , comme centre, & de l'intervalle  $CF$ , on décrive un arc de cercle qui la coupe aux points  $B, b$ : la partie  $Bb$  de cette perpendiculaire, est appelée le *second Axe*.

6.

Les deux axes  $Aa, Bb$ , sont appelés ensemble *Conjugués*; de sorte que le premier axe  $Aa$ , est dit *Conjugué* au second  $Bb$ ; & réciproquement le second  $Bb$ , *Conjugué* au premier  $Aa$ .

7.

Les lignes  $MP, MK$ , menées des points  $M$  des Hyperboles opposées parallèlement à l'un des axes conjugués, & terminées par l'autre, sont appelées *Ordonnées* à cet autre axe. Ainsi  $MP$  est *Ordonnée* au premier axe  $Aa$ , &  $MK$  au second  $Bb$ .

8.

La troisième proportionnelle aux deux axes, est appelée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier axe  $Aa$ , est au second axe  $Bb$ , de même le second axe  $Bb$ , à une troisième proportionnelle  $p$ ; cette ligne  $p$  sera le *Parametre* du premier axe  $Aa$ .

9.

Toutes les lignes qui passent par le centre  $C$ , sont appelées *Diametres*: ceux qui rencontrent les Hyperboles opposées, *premiers Diametres*, & ceux qui ne les rencontrent point, quoique prolongés à l'infini, *seconds Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre une Hyperbole qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appelée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

## REMARQUE.

71. ON a dit dans la premiere définition que la longueur du fil  $FMO$  doit être moindre ou plus grande que celle de la regle  $fMO$ ; dont la raison est que s'il étoit égal à cette regle, le stile  $M$  décriroit dans ce mouvement, une ligne dont tous les points  $M$  seroient également distants des deux points  $F, f$ ; puisque retranchant du fil & de la regle, la partie commune  $MO$ , les restes  $MF, Mf$ , seroient toujours égaux entr'eux. D'où il est visible que cette ligne ne seroit autre qu'une ligne droite indéfinie  $Bb$ , menée perpendiculairement à la droite  $Ff$  par son point de milieu  $C$ . Fig. 37.

## COROLLAIRE I.

72. IL suit de la définition premiere, que si l'on mène d'un point quelconque  $M$ , de l'une des Hyperboles opposées, aux deux foyers  $F, f$ , les droites  $MF, Mf$ ; leur différence sera toujours la même. Car elle sera toujours égale à la différence qui se trouve entre la longueur de la regle & celle du fil. Fig. 36.

## COROLLAIRE II.

73. LORSQUE le point  $M$  tombe en  $A$ , il est visible que  $MF$  devient  $AF$ , & que  $Mf$  devient  $Af$ ; & de même, lorsque le point  $M$  tombe en  $a$ , en décrivant l'Hyperbole opposée  $xax$ ; il est encore visible que  $MF$  devient  $aF$ , & que  $Mf$  devient  $af$ . Donc puisque la différence de ces deux droites est par tout la même, on aura  $Af - AF$  ou  $Ff - 2AF = aF - af$  ou  $Ff - 2af$ ; & partant  $AF = af$ . D'où il suit :

1°. Que la distance  $Ff$  des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre  $C$ ; puisque  $CA + AF$  ou  $CF = Ca + af$  ou  $Cf$ .

2°. Que la différence des deux droites  $MF, Mf$ , est toujours égale au premier axe  $Aa$ ; puisque dans l'Hyperbole  $XAZ$ , on a toujours  $Mf - MF = Af - AF$  ou

G

$Af - af$ ; & que dans son opposée  $xax$ , on a aussi toujours  $MF - Mf = aF - af$  ou  $aF - AF$ .

## COROLLAIRE III.

74. IL suit de la définition cinquième.

1°. Que le second axe  $Bb$ , est divisé en deux parties égales par le centre  $C$ ; car les triangles rectangles  $ACB$ ,  $ACb$ , seront égaux, puisqu'ils ont des hypothenuses égales  $AB$ ,  $Ab$ , & le côté  $AC$  commun.

2°. Que si l'on prend sur le second axe  $Bb$ , la partie  $CE$  égale à la moitié  $CA$  du premier, & qu'on tire l'hypothenuse  $AE$ : le second axe  $Bb$  sera plus grand, égal, ou moindre que le premier  $Aa$ ; selon que la droite  $CF$ , est plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuse  $AE$ ; parce que l'hypothenuse  $Ab$ , prise égale à  $CF$ , se trouvera aussi pour lors plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuse  $AE$ .

3°. Que si l'on prend sur le premier axe  $Aa$  de part & d'autre du centre  $C$ , les parties  $CF$ ,  $cf$ , égales chacune à l'hypothenuse  $AB$  du triangle rectangle  $CAB$ , formé par les deux demi-axes  $CA$ ,  $CB$ : les points  $F$ ,  $f$ , seront les deux foyers.

## COROLLAIRE IV.

75. LES mêmes choses étant posées, si l'on nomme  $CF$  ou  $AB$ ,  $m$ ;  $CA$ , ou  $Ca$ ,  $t$ ; le triangle rectangle  $ACB$ , donnera  $\overline{BC}^2 = mm - tt$ . Or  $AF = m - t$ , &  $Fa = m + t$ ; & partant  $AF \times Fa = mm - tt$ . D'où il est évident que le carré de la moitié  $CB$  du second axe  $Bb$ , est égal au rectangle de  $AF$  par  $Fa$  parties du premier axe  $Aa$ , prises entre l'un des foyers  $F$ , & ses deux extrémités  $A$ ,  $a$ .

## COROLLAIRE V.

76. IL sera maintenant facile de décrire les Hyperboles opposées dont les deux axes  $Aa$ ,  $Bb$ , sont donnés, & dont l'on sçait que l'axe  $Aa$  doit être le premier. Car



ayant trouvé \* sur le premier axe  $Aa$ , les foyers  $F, f$ , \* *Art. 74.*  
 on attachera dans le point  $F$ , le bout d'un fil  $FMO$ , du  
 quel l'autre bout  $O$ , sera lié à l'extrémité d'une longue  
 règle  $OMf$ , mobile sur son autre extrémité  $f$  autour du  
 foyer  $f$ , & dont la longueur  $OMf$  doit \* être moindre ou \* *Art. 71.*  
 plus grande que la longueur du fil  $OMF$ , de la ligne  $Aa$ .  
 Ayant ensuite décrit par le moyen de cette règle & de  
 ce fil, deux Hyperboles opposées  $XAZ, xaz$ , comme  
 l'on a enseigné dans la définition première, il est évident  
 qu'elles auront pour premier axe, la ligne  $Aa$ , & pour  
 second, la ligne  $Bb$ . Et c'est ce qu'on demandoit.

Plus la règle  $OMf$  sera longue, & plus les portions  
 des Hyperboles opposées, qu'on décrira par le moyen  
 de cette règle, seront grandes, de sorte qu'on les peut  
 augmenter autant que l'on voudra, en augmentant éga-  
 lement la longueur de la règle & celle du fil.

## PROPOSITION I.

## Theorème.

77. Si l'on mène l'ordonnée  $MP$  au premier axe  $Aa$ , &  
 qu'on prenne sur cet axe prolongé la partie  $AD$  égale à  $MF$ ,  
 du côté du foyer  $F$ , lorsque le point  $M$  tombe sur l'Hyperbo-  
 le  $XAZ$ , & du côté du foyer  $f$  lorsqu'il tombe sur son oppo-  
 sée  $xaz$ ; je dis que  $CA. CF :: CP. CD$ .

Ayant nommé comme auparavant les données  $CA$   
 ou  $Ca$ ,  $t$ ;  $CF$ , ou  $Cf$ ,  $m$ ; & de plus les indéterminées  
 $CP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; & l'inconnue  $CD$ ,  $z$ ; on aura dans le  
 premier cas,  $AD$  ou  $MF = z - t$ ,  $aD$  ou  $Mf = z + t$ ,  
 $FP = x - m$  ou  $m - x$  (selon que le point  $P$  tombe au  
 dessous ou au dessus du foyer  $F$ ),  $Pf = x + m$ ; & dans  
 le second cas,  $AD$  ou  $MF = z + t$ ,  $aD$  ou  $Mf = z - t$ ,  
 $FP = x + m$ ,  $Pf = x - m$  ou  $m - x$  selon que le point  
 $P$  tombe au dessus ou au dessous du foyer  $f$ .

Cela posé, le triangle rectangle  $MPF$  donnera  $zx + t^2 =$   
 $z^2 + t^2 = yy + xx + 2mx + m^2$ ; savoir, dans le premier  
 G ij

cas,  $+$  dans le second; & l'autre triangle rectangle  $MPf$  donnera  $zx + 2tz - + = yy - + xx + 2mx - + mm$ ; sçavoir,  $+$  dans le premier, &  $-$  dans le second.

Maintenant, si l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la première équation de ceux de la seconde; & au contraire dans le second cas, chaque membre de la seconde de ceux de la première, il vient  $4tz = 4mx$ ; d'où l'on tire  $CD(z) = \frac{mx}{t}$ . Donc  $CA(t). CF(m) :: CP(x). CD(z)$ . *Ce qu'il falloit &c.*

## COROLLAIRE.

78. IL est évident que si l'on nomme les données  $CA$  ou  $Ca, t$ ;  $CF$  ou  $Cf, m$ ; & l'indéterminée  $CP, x$ ; on aura toujours  $MF = \frac{mx}{t} - t$ , &  $Mf = \frac{mx}{t} + t$ , lorsque le point  $M$  tombe sur l'Hyperbole  $XAZ$ , qui a pour foyer le point  $F$ ; & qu'au contraire on aura  $MF = \frac{mx}{t} + t$ , &  $Mf = \frac{mx}{t} - t$ , lorsque le point  $M$  tombe sur son opposée  $xaz$ , qui a pour foyer le point  $f$ .

## PROPOSITION II.

## Theorème.

79. LE carré d'une ordonnée quelconque  $PM$ , au premier axe  $Aa$ , est au rectangle de  $AP$  par  $Pa$ , parties de cet axe prolongé, comme le carré de son conjugué  $Bb$ , est au carré du premier axe  $Aa$ .

*Il faut prouver que  $\overline{PM}^2. AP \times Pa :: \overline{Bb}^2. \overline{Aa}^2$ .*

Les mêmes choses étant posées que dans la Proposition précédente, si l'on met dans l'équation  $zx + 2tz - + = yy - + xx + 2mx - + mm$  que l'on a trouvée \* par le moyen du triangle rectangle  $MPF$ , à la place de  $z$ , sa valeur  $\frac{mx}{t}$ , on formera toujours celle-cy  $tttyy = mmxx - mmtt - tttxx + t4$ , laquelle étant réduite à une proportion, donne  $\overline{PM}^2 (yy). AP \times Pa (xx - tt) ::$

\* Art. 77.

$\overline{BC}^2 * (mm - tt) . \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$ . Ce qu'il falloit \* Art. 75.  
démontrer.

COROLLAIRE I

80. Si l'on mene une ordonnée  $MK$  au second axe  $Bb$ , lequel j'appelle  $2c$ ; il est clair que  $MK = CP (x)$ , & que  $CK = PM (y)$ . Or  $\overline{PM}^2 (yy) . AP \times Pa (xx - tt) :: \overline{Bb}^2 (4cc) . \overline{Aa}^2 (4tt)$ . Et partant  $4ccxx = 4cctt + 4styy$ ; ce qui donne cette proportion  $\overline{MK}^2 (xx) . \overline{CK}^2 + \overline{CB}^2 (yy + cc) :: \overline{Aa}^2 (4tt) . \overline{Bb}^2 (4cc)$ .

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque  $MK$  au second axe  $Bb$ , est au quarré de  $CK$ , joint au quarré de  $CB$  moitié du second axe  $Bb$ , comme le quarré de son conjugué  $Aa$ , est au quarré de ce second axe  $Bb$ .

COROLLAIRE II. FONDAMENTAL.

81. Si l'on nomme le premier ou second axe  $Aa$ , Fig. 38. & 39.  
 $2t$ ; son conjugué  $Bb$ ,  $2c$ ; son parametre  $p$ ; chacune de ses ordonnées  $PM, y$ ; & chacune de ses parties  $CP$ , prises entre le centre & les rencontres des ordonnées,  $x$ ; on aura toujours \*  $\overline{PM}^2 (yy) . \overline{CP}^2 + \overline{CA}^2 (xx + tt) ::$  \* Art. 79. &  $\overline{Bb}^2 (4cc) . \overline{Aa}^2 (4tt) :: p . Aa (2t)$ . puisque selon la définition du parametre  $Aa (2t) . Bb (2c) :: Bb (2c) . p = \frac{4cc}{2t}$ . où l'on doit observer que c'est le signe  $-$  lorsque l'axe  $Aa$  est le premier, & qu'ainsi on peut substituer alors à la place de  $\overline{CP}^2 + \overline{CA}^2$ , le rectangle  $AP \times Pa$  qui lui est égal; & au contraire que c'est le signe  $+$  lorsque l'axe  $Aa$  est le second. D'où en multipliant d'abord les Extrêmes & les Moyens de la première proportion  $yy . xx + tt :: 4cc . 4tt$ . ensuite de l'autre  $yy . xx + tt :: p . 2t$ . l'on tire  $yy = \frac{ccxx}{t} + cc$ , &  $yy = \frac{pxx}{2t} + \frac{1}{2}pt$ . Or comme cette propriété convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en

détermine la position par rapport aux axes ; il s'ensuit que l'équation  $yy = \frac{cxxx}{r} + cc$ , ou  $yy = \frac{p^2 x^2}{2r} + \frac{1}{2}pt$ , en exprime parfaitement la nature par rapport à ses axes.

## COROLLAIRE III.

82. SI l'on mene deux ordonnées quelconques  $MP$ ,  $NQ$  à l'axe  $Aa$ , il est clair que  $\overline{MP} \cdot \overline{QN} :: \overline{CP} + \overline{CA} \cdot \overline{CQ} + \overline{CA}$ . Car  $\overline{PM} \cdot \overline{CP} + \overline{CA} :: \overline{Bb} \cdot \overline{Aa} :: \overline{QN} \cdot \overline{CQ} + \overline{CA}$ . Donc &c.

Il est bon de remarquer encore qu'on peut substituer à la place de  $\overline{CP} - \overline{CA}$ , &  $\overline{CQ} - \overline{CA}$ , les rectangles  $AP \times Pa$ ,  $AQ \times Qa$  qui leur sont égaux ; ce qu'il faut toujours observer dans la suite.

## COROLLAIRE IV.

83. SI l'on mene par un point quelconque  $P$  de l'un ou de l'autre axe  $Aa$  (prolongé lorsque c'est le premier) une parallèle  $MPM$  à son conjugué  $Bb$  ; elle rencontrera une Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points  $M, M$ , également éloignés de part & d'autre du point  $P$ , & non en davantage. Car afin que les points  $M, M$ , soient à une Hyperbole ou aux Hyperboles opposées, il faut \* que les quarrés de  $PM$  ( $y$ ) prises de part & d'autre de l'axe  $Aa$ , soient égaux chacun à la même quantité  $\frac{cxxx}{r} + cc$ .

## COROLLAIRE V.

FIG. 38. & 39. 84. IL suit de ce que  $yy = \frac{cxxx}{r} + cc$ , que plus  $CP$  ( $x$ ) prise de part ou d'autre du centre  $C$ , devient grande, plus aussi chaque ordonnée  $PM$  ( $y$ ) prise de part & d'autre de l'axe  $Aa$ , augmente, & cela à l'infini, & qu'au contraire plus  $CP$  ( $x$ ) devient petite, plus aussi  $PM$  ( $y$ ) diminue ; de sorte que (fig. 38.)  $CP$  ( $x$ ) étant égale à  $CA$  ou  $Ca$  ( $t$ ) lorsque l'axe  $Aa$ , est le premier,

$PM(y)$  devient alors nulle ou zero ; & que (*fig. 39.*)  $CP(x)$  étant nulle ou zero, lorsque l'axe  $Aa$  est le second, chaque  $PM(y)$  qui devient alors  $CB$  ou  $Cb(c)$ , est la moindre de toutes les ordonnées  $PM(y)$  prises de part & d'autre du centre. D'où il est clair :

1°. Que si l'on mene (*fig. 39.*) par les extrémités  $B, b$ , du premier axe  $Bb$ , des parallèles au second  $Aa$ , elles seront tangentes en ces points.

2°. Que les Hyperboles opposées s'éloignent de part & d'autre de plus en plus à l'infini de leurs axes conjugués, en commençant par les extrémités du premier : avec cette différence néanmoins que le premier axe rencontre chacune des Hyperboles opposées en un point, & qu'étant prolongé il passe au dedans, au lieu que le second tombe tout entier entre les Hyperboles opposées, & ne les rencontre jamais, quoique prolongé à l'infini.

## COROLLAIRE VI.

85. IL suit encore de ce que  $yy = \frac{c^2}{a^2} \mp cc$ , que si l'on prend les points  $P, P$ , également éloignés de part & d'autre du centre  $C$ , les ordonnées  $PM, PM$ , seront égales. D'où il est clair que si une ligne droite  $MM$ , terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, est coupée en deux également par un axe  $Bb$  en un point  $K$  autre que le centre, elle sera parallèle à son conjugué  $Aa$ . Car menant des parallèles  $MP, MP$ , à l'axe  $Bb$ , la ligne  $PP$ , sera coupée par le milieu en  $C$ , puisque  $MM$  l'est en  $K$  ; & partant les ordonnées  $PM, PM$ , seront égales. La droite  $MM$  sera donc parallèle à l'axe  $Aa$ .

## COROLLAIRE VII.

86. SI l'on conçoit que le plan sur lequel les Hyperboles opposées sont tracées, soit plié le long de l'axe  $Aa$ , en sorte que ses deux parties se joignent, il est clair (*fig. 39.*) lorsque l'axe  $Aa$  est le second, que les

\* Art. 83. deux Hyperboles opposées tomberont exactement l'une sur l'autre ; sçavoir, les points  $B, M$ , &c. sur les points  $b, M$ , &c. puisque \* toutes les perpendiculaires  $Bb, MM$  à cet axe, sont coupées par le milieu aux points  $C, P$ , &c.

Par la même raison (*fig. 38.*) lorsque l'axe  $Aa$  est le premier, les portions des Hyperboles opposées qui sont de part & d'autre de cet axe, tomberont exactement l'une sur l'autre.

### AVERTISSEMENT.

On a suivi jusqu'ici la même methode que dans l'Ellipse, & on auroit pû la continuer jusqu'à la fin ; mais comme il faut nécessairement parler de certaines lignes particulieres à l'Hyperbole, & qu'on peut par leur moïen prouver les mêmes choses d'une maniere plus aisée, on a pris ce dernier parti.

### DÉFINITIONS.

II.

FIG. 40.

Si l'on mene du centre  $C$  deux droites indéfinies  $CG, Cg$ , paralleles aux lignes  $Ab, AB$ , menées de l'extrémité  $A$  du premier axe  $Aa$ , aux deux extrémités  $B, b$ , du second : ces deux droites seront appellées les *Asymptotes* de l'Hyperbole  $MAM$  ; & si on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles seront nommées les *Asymptotes* de l'Hyperbole opposée  $MaM$ .

12.

Le quarré de la partie  $CG$ , ou  $Cg$ , d'une asymptote, comprise entre le centre  $C$ , & la rencontre de la ligne  $AB$ , ou  $Ab$ , menée de l'extrémité  $A$  du premier axe, à l'extrémité  $B$ , ou  $b$ , du second, est appellé la *Puissance* de l'Hyperbole  $MAM$ , ou de son opposée  $MaM$ .

COROLLAIRE I.







## COROLLAIRE I.

87. IL est évident que l'angle  $GCg$ , fait par les asymptotes d'une Hyperbole, ou son égal  $BAb$ , est moindre, égal, ou plus grand qu'un droit; selon que le second axe  $Bb$  est moindre, égal, ou plus grand que le premier  $Aa$ . Car lorsque le premier axe  $Aa$  surpasse le second  $Bb$ , sa moitié  $CA$ , surpasse la moitié  $CB$  du second; & par conséquent dans le triangle rectangle  $CAB$ , l'angle  $CAB$  est moindre qu'un demi-droit. Les deux angles égaux  $CAB$ ,  $CAb$ , qui font ensemble l'angle  $BAb$ , seront donc moindres qu'un droit. Les deux autres cas se démontrent de la même manière.

## COROLLAIRE II.

88. A CAUSE des triangles semblables  $BAb$ ,  $BGC$ , il est clair que la ligne  $AB$  est divisée par l'asymptote  $CG$  en deux parties égales au point  $G$ , & que  $CG$  est la moitié de  $Ab$ ; puisque  $BC$  est la moitié de  $Bb$ . On prouvera de même que  $Ab$  est divisée par l'asymptote  $Cg$  en deux parties égales au point  $g$ , & que  $Cg$  est la moitié de  $AB$ . Donc toutes les lignes  $CG$ ,  $GA$ ,  $GB$ ,  $Cg$ ,  $gA$ ,  $gb$ , sont égales entr'elles; puisqu'elles sont égales chacune à la moitié de l'une ou l'autre des lignes  $AB$ ,  $Ab$ , que l'on sçait être égales entr'elles, suivant la définition 5<sup>e</sup>.

## COROLLAIRE III.

89. LA puissance d'une Hyperbole est égale à la quatrième partie de la somme des quarrés des deux demi-axes. Car nommant  $CA$ ,  $t$ ;  $CB$ ,  $c$ ;  $CG$ ,  $m$ ; on aura  $BA = 2m$ , \*Art. 88. & à cause du triangle rectangle  $ACB$ , le quarré  $AB$  ( $4mm$ )  $= t^2 + c^2$ . Et par conséquent  $CG^2$  ( $mm$ )  $= \frac{t^2 + c^2}{4}$ .

## PROPOSITION III.

## Theorème.

FIG. 40.

90. Si l'on mène par un point quelconque  $M$  de l'une ou de l'autre des Hyperboles opposées, une ligne droite  $Rr$  perpendiculaire au premier axe  $Aa$  qu'elle rencontre en  $P$ , & terminée par les asymptotes en  $R$  &  $r$ ; je dis que le rectangle de  $RM$  par  $Mr$ , est égal au carré de  $BC$ , moitié du second axe  $Bb$ .

Il faut prouver que  $RM \times Mr = \overline{BC}^2$ .

Nommant les connues  $CA$ ,  $t$ ;  $CB$ ,  $c$ ; & les indéterminées  $CP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; les triangles semblables  $ACB$ ,  $CPr$ , &  $ACb$ ,  $CPR$ , donnent  $CA(t) \cdot CB$  ou  $Cb(c) :: CP(x) \cdot Pr$ , ou  $PR = \frac{cx}{t}$ . Donc  $RM$ , ou  $PR \pm PM = \frac{cx}{t} \pm y$ ; &  $Mr$ , ou  $Pr \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$ . Et par conséquent  $RM \times Mr = \frac{cx^2}{t^2} - yy = \overline{BC}^2$  ( $cc$ ) en mettant

\* Art. 81. pour  $yy$  sa valeur \*  $\frac{cx^2}{t^2} - cc$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

91. Il est clair que  $\overline{PM}^2 (\frac{cx^2}{t^2} - cc)$  est toujours moindre que  $\overline{PR}^2$  ou  $\overline{Pr}^2 (\frac{cx^2}{t^2})$ ; Et par conséquent que tous les points des Hyperboles opposées, tombent dans les angles faits par leurs asymptotes; de sorte qu'il n'en peut tomber aucun dans les angles d'à côté.

## COROLLAIRE II.

92. Si l'on mène par deux points quelconques  $M$ ,  $N$ , d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux lignes droites  $Rr$ ,  $Kk$ , perpendiculaires au premier axe, & terminées par les asymptotes: il est évident que les rectangles  $RM \times Mr$ ,  $KN \times Nk$ , seront toujours égaux entr'eux; puisqu'ils sont égaux chacun au carré de la

moitié  $BC$  du second axe  $Bb$ . D'où l'on voit que  $RM.KN :: Nk.Mr$ .

## PROPOSITION IV.

## Theorème.

93. Si l'on mène par deux points quelconques  $M, N$ , d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites  $Hh, Ll$ , parallèles entr'elles, & terminées par les asymptotes; je dis que les rectangles  $HM \times Mh, LN \times Nl$ , seront égaux entr'eux.

Il faut prouver que  $HM \times Mh = LN \times Nl$ .

Ayant mené les droites  $Rr, Kk$ , perpendiculaires au premier axe  $Aa$ , il est clair que les triangles  $MRH, NKZ$ , &  $Mrh, Nkl$ , sont semblables; puisqu'ils sont formés par des parallèles. On aura donc  $RM.KN :: HM.LN$ . Et  $Nk.Mr :: Nl.Mh$ . Or \*  $RM.KN :: Nk.Mr$ . Donc  $HM.LN :: Nl.Mh$ . Et par conséquent  $HM \times Mh = LN \times Nl$ . Ce qu'il falloit &c. \* Art. 91.

## COROLLAIRE I.

94. Si l'on suppose que la ligne  $NZ$  parallèle à  $MH$ , passe par le centre  $C$ , c'est à dire, qu'elle devienne  $CE$ : il est clair que les deux points  $L, l$ , se réuniront au centre  $C$ ; & partant que le rectangle  $LN \times Nl$ , deviendra le carré  $EC$ . D'où l'on voit que si l'on mène d'un point quelconque  $E$ , de l'une des Hyperboles opposées au centre  $C$ , la droite  $CE$ , & par un autre point quelconque  $M$  de l'une ou de l'autre de ces Hyperboles, une ligne  $MHh$ , parallèle à  $CE$ , & qui rencontre les asymptotes en  $H$  &  $h$ ; le carré de  $CE$  sera égal au rectangle de  $HM$  par  $Mh$ .

## COROLLAIRE II.

95. Si l'on mène par un point quelconque  $N$ , de l'une des Hyperboles opposées, une ligne droite  $Ll$ , terminées par les asymptotes, & qui rencontre l'une ou

H ij

l'autre de ces Hyperboles en un autre point  $n$ ; les parties  $LN$ ,  $ln$ , de cette droite prises entre les points des Hyperboles & la rencontre des asymptotes, seront égales entr'elles. Car nommant  $LN$ ,  $a$ ;  $Nn$ ,  $b$ ;  $nl$ ,  $c$ ; on aura  $LN \times Nl (ab \mp ac) = HM \times Mb = Ln \times nl. (bc \mp ac)$ , d'où l'on tire  $LN(a) = ln(c)$ .

## COROLLAIRE III.

96. Si l'on suppose dans le Corollaire précédent que la ligne  $Nn$ , terminée par les Hyperboles opposées, passe par le centre  $C$ , c'est à dire, qu'elle devienne le premier diamètre  $ED$ : il est évident que les deux points  $L, l$ , se réuniront au centre  $C$ ; & qu'ainsi  $NL$  deviendra  $EC$ , &  $nl$ ,  $CD$ . D'où l'on voit que tout premier diamètre  $DE$ , est divisé en deux également par le centre  $C$ .

## COROLLAIRE IV.

97. Si deux lignes droites  $Mm$ ,  $Nn$ , parallèles entr'elles, sont terminées par une Hyperbole ou par les Hyperboles opposées, & rencontrent une asymptote aux points  $H, L$ ; je dis que les rectangles  $MH \times Hm$ ,  $NL \times Ln$ , seront égaux entr'eux. Car prolongeant, s'il est nécessaire, ces deux lignes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre asymptote aux points  $h, l$ ; les parties *Art. 95.*  $MH$ ,  $mh$ , &  $NL$ ,  $nl$ , seront égales \* entr'elles: & partant, puisque  $HM \times Mb = LN \times Nl$ , il s'ensuit que  $MH \times Hm = NL \times Ln$ .

## PROPOSITION V.

## Theorème.

FIG. 41.

98. Si l'on mène par deux points quelconques  $M, N$ , d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites  $MH$ ,  $NL$ , parallèles entr'elles & terminées par une asymptote; & deux autres droites  $Mh$ ,  $Nl$ , aussi parallèles entr'elles, & terminées par l'autre asymptote; je dis que les rectangles

$HM \times Mh$ ,  $NL \times Nl$ , sont égaux entr'eux.

Cette Proposition se prouve de la même manière que la précédente, & il n'y a rien à changer dans la démonstration.

## COROLLAIRE I.

99. Si les droites  $MH$ ,  $Mh$ , &  $NL$ ,  $Nl$ , sont pa- Fig. 42  
rallèles aux deux asymptotes; il est clair que les parallélogrammes  $MHCh$ ,  $NLCI$ , aussi-bien que les triangles  $CHM$ ,  $CLN$ , qui en sont les moitiés, sont égaux entr'eux; puisque les côtés de ces parallélogrammes autour des angles égaux  $H M h$ ,  $L N l$ , sont réciproquement proportionnels.

## COROLLAIRE II.

100. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent, il est visible que  $CH \times HM = CL \times LN$ ; puisque dans cette supposition  $Mh = CH$ , &  $Nl = CL$ : c'est à dire, que si l'on mène par deux points quelconques  $M$ ,  $N$ , de l'une, ou des Hyperboles opposées, deux droites  $MH$ ,  $NL$ , parallèles à l'une des asymptotes, & terminées par l'autre; les rectangles  $CH \times HM$ ,  $CL \times LN$ , seront toujours égaux entr'eux; & qu'ainsi  $CH. CL :: LN. MH$ .

## COROLLAIRE III.

101. Puisque l'extrémité  $A$  du premier axe, est un des points de l'Hyperbole, & que la ligne  $AB$ , qui coupe en  $G$ , l'asymptote  $CG$ , est parallèle à l'autre asymptote  $Cg$ ; il s'ensuit \* que le rectangle  $CH \times HM$  sera \* *Art. 100.*  
toujours égal au même rectangle  $CG \times GA$ , ou \* au quar- \* *Art. 88.*  
ré  $\overline{CG}$ , c'est à dire, selon la définition 12<sup>e</sup>, à la puissance de l'Hyperbole. Si donc l'on nomme la donnée  $CG$ ,  $m$ ; & les indéterminées  $CH$ ,  $x$ ;  $HM$ ,  $y$ ; on aura toujours  $CH \times HM (xy) = \overline{CG} (mm)$ . Or comme cette propriété convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en détermine la position par

rapport à ses asymptotes, il s'ensuit que l'équation  $xy = mm$  en exprime parfaitement la nature par rapport à ses asymptotes.

## COROLLAIRE IV.

102. IL suit de ce que  $HM(y) = \frac{mm}{x}$ , que plus  $CH(x)$  augmente, plus au contraire  $HM(y)$  diminue, de sorte que  $CH(x)$  étant infiniment grande,  $HM(y)$  sera alors infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. D'où l'on voit que l'Hyperbole  $AM$ , & son asymptote  $CH$  (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver. Il en est de même pour l'autre asymptote  $Cg$ .

## COROLLAIRE V.

103. ENTRE toutes les lignes qui passent par le centre  $C$ .  
 1°. Celles qui, comme  $Aa$ , tombent dans les angles faits par les asymptotes du côté des Hyperboles, rencontrent chacune des Hyperboles opposées en un seul point  $A$ , ou  $a$ ; & étant prolongées, elles passent au dedans de ces Hyperboles. Car à cause des angles  $GCA$ ,  $gCA$ , & de leurs opposés au sommet, il est clair que la ligne  $Aa$ , s'éloigne de plus en plus de l'un & de l'autre asymptote; au lieu que  
 \* Art. 102. les Hyperboles opposées s'en approchent toujours \* de plus en plus. 2°. Celles qui, comme  $Bb$ , tombent dans les angles d'à côté, faits aussi par les asymptotes, ne peuvent jamais rencontrer les Hyperboles opposées, quoiqu'on les prolonge à l'infini; puisqu'aucun des points des  
 \* Art. 9. Hyperboles \* ne peut tomber dans ces angles.  
 \* Def. 9. D'où l'on voit \* que tous les premiers diamètres, tombent dans les angles faits par les Asymptotes du côté des Hyperboles, & que les seconds tombent dans les angles d'à côté.

## COROLLAIRE VI.

104. **S**I l'on mène par un point quelconque  $H$ , de l'une des asymptotes  $CE$ , une parallèle  $HM$ , à l'autre  $Ce$ ; elle ne rencontrera l'Hyperbole qu'en un seul point  $M$ ; & étant continuée, elle passera au dedans. Car la distance de  $Ce$ , demeure par tout la même, au lieu que l'Hyperbole s'en approche \* toujours de plus en plus. \* Art. 102.

## COROLLAIRE VII.

105. **D**E-LA il est évident que si par un point quelconque  $M$ , d'une Hyperbole, l'on mène deux droites indéfinies  $MH$ ,  $Mh$ , parallèles à ses asymptotes  $Ce$ ,  $CE$ .

1°. Tous les points de l'Hyperbole qui lui est opposée, tomberont dans l'angle  $H M h$ ; puisqu'ils tombent tous \* dans l'angle fait par ses asymptotes, lequel est renfermé dans l'angle  $H M h$ . \* Art. 91.

2°. Les deux portions de l'Hyperbole, tomberont dans les deux angles à côté de celui-ci; ainsi aucun de ses points ne tombera dans l'angle opposé au sommet à l'angle  $H M h$ .

3°. Toutes les lignes qui, comme  $MF$ , tombent dans l'angle  $H M h$ , rencontrent (étant prolongées du côté de  $F$ ) l'Hyperbole opposée en un point  $N$ , & passent au dedans; puisqu'elles s'écartent de plus en plus des droites  $MH$ ,  $Mh$ , & par conséquent de ses deux asymptotes qui leur sont parallèles: mais étant prolongées de l'autre côté du point  $M$ , elles entrent au dedans de l'Hyperbole qui passe par ce point, & ne la rencontrent jamais ailleurs.

4°. Toutes les lignes qui, comme  $Ee$ , tombent dans les angles à côté de l'angle  $H M h$ , rencontrent les deux asymptotes de l'Hyperbole qui passe par le point  $M$ ; ainsi lorsqu'elles passent au dedans de l'une de ses portions, elles la rencontrent nécessairement en quelque point  $N$ , puisqu'elles vont rencontrer l'asymptote qui tombe au dehors de cette portion.

## COROLLAIRE VIII.

106. 1°. SI l'on mène par un point quelconque  $M$ , d'une Hyperbole, une ligne droite  $Ff$ , qui rencontre l'une de ses asymptotes au point  $F$ , & l'une des asymptotes de l'Hyperbole opposée au point  $f$ ; & qu'on la prolonge en  $N$ , en sorte que  $fN$ , soit égale à  $FM$ : je dis que le point  $N$ , sera à l'Hyperbole opposée. Car la ligne  $Ff$ , tombe dans l'angle  $HMb$ , & rencontre par conséquent l'Hyperbole opposée en quelque point  $N$ , comme l'on vient de démontrer dans le Corollaire précédent. Donc \* &c.

\* Art. 95.

2°. Si l'on mène par un point quelconque  $M$ , d'une Hyperbole, une ligne droite  $Ee$ , terminée par ses asymptotes, & qu'on prenne sur cette ligne, la partie  $eN$ , égale à  $EM$ : je dis que le point  $N$ , sera encore l'un des points de cette Hyperbole. Car menant  $MH$ , parallèle à l'asymptote  $Ce$ , & terminée par l'autre en  $H$ , si l'on prend sur cette autre asymptote, la partie  $CL$ , égale à  $HE$ , & qu'on tire  $LN$ , parallèle à  $HM$ ; on a démontré dans l'article 104 qu'elle rencontrera l'Hyperbole en un point  $N$ , & dans l'article 100. que ce point sera tel que  $CL$  ou  $HE$ ,  $HM :: CH$  ou  $EL$ ,  $LN$ ; d'où l'on voit que la ligne  $LN$ , rencontre l'Hyperbole dans le même point où elle rencontre la droite  $Ee$ . Mais à cause des parallèles  $HM$ ,  $LN$ , il est clair que  $eN = EM$ , puisque  $CL = HE$ . Donc &c.

## PROPOSITION VI.

## Problème.

Fig. 45.

107. D'UN point donné  $M$ , sur une Hyperbole dont les asymptotes  $CE$ ,  $Ce$ , sont données; mener la tangente  $DmD$ ; & démontrer qu'on n'en peut mener qu'une seule.

Ayant mené du point donné  $M$ , une parallèle  $MH$ , à l'une des asymptotes  $Ce$ , & terminée par l'autre  $CE$ , au point  $H$ ; on prendra sur cette asymptote, la partie  $HD$ ,



$HD$  égale à  $HC$ ; on tirera par le point donné  $M$ , la droite  $DM$ , qui rencontre l'asymptote  $Ce$  en un point  $d$ . Je dis en premier lieu, que cette ligne  $Dmd$ , touchera l'Hyperbole au point  $M$ .

Car à cause des triangles semblables  $CDd$ ,  $HDM$ ; la ligne  $Dd$ , terminée par les asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point  $M$ , de même que  $CD$ , l'est en  $H$ . Or s'il étoit possible qu'elle rencontrât l'Hyperbole en un autre point  $O$ , il est clair que  $Od$ , seroit \* égale à  $MD$ , & par conséquent à  $Md$ , c'est à \* Art. 95. dire, la partie au tout; ce qui ne pouvant être, il s'ensuit que la ligne  $Dmd$ , ne peut rencontrer l'Hyperbole, qu'au seul point  $M$ . De plus, si elle passoit au dedans, comme la ligne  $Ee$ , il est visible qu'elle rencontreroit la portion de l'Hyperbole, au dedans de laquelle elle passeroit en quelque point  $N$ ; puisqu'elle iroit, rencontrer en un point  $e$ , l'asymptote  $Ce$ , qui tombe \* au dehors de cette portion. Il est donc évident que la ligne  $Dd$ , ne rencontre l'Hyperbole, qu'au seul point  $M$ , & qu'elle n'entre point au dedans; c'est à dire, qu'elle est tangente en ce point. \* Art. 91.

Je dis en second lieu, qu'il n'y a que la seule ligne  $Dmd$ , qui puisse toucher l'Hyperbole au point  $M$ ; car si l'on prend sur l'asymptote  $CE$ , la partie  $HE$ , plus grande ou moindre que  $HD$ , & qu'on tire par le point donné  $M$ , la droite  $EM$ , qui rencontre l'autre asymptote  $Ce$ , au point  $e$ , il est clair à cause des parallèles  $MH$ ,  $Ce$ , que  $ME$  sera plus grande ou moindre que  $Me$ ; puisque  $HE$  a été prise plus grande ou moindre que  $HD$  ou que  $HC$ . Or cela posé, si l'on prend sur la plus grande partie  $Me$ , le point  $N$ , en sorte que  $Nc$  soit égale à  $ME$ , il est évident que ce point \* sera encore à l'Hyperbole, & qu'ainsi la ligne  $Ee$ , \* Art. 106. ne la touchera point au point  $M$ . Ce qui restoit à démontrer,

## REMARQUE.

108. ON a démontré dans l'art. 102. que plus  $CH$  devient grande, plus au contraire  $HM$  diminue; de sorte que  $CH$  étant infiniment grande,  $HM$  devient infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. Or  $CH$  étant infiniment grande,  $HD$  (qui lui est égale) la fera aussi; & par conséquent les lignes  $MD$ ,  $HD$ , qui ne se rencontrent que dans l'infini, pouvant être regardées comme parallèles, tomberont l'une sur l'autre, puisque le point  $M$  se confond alors avec le point  $H$ : c'est à dire, que l'asymptote  $CE$ , étant prolongée à l'infini, aussi bien que l'Hyperbole, peut être regardée comme une ligne qui la touche dans son extrémité. Il en est de même de l'autre asymptote  $Ce$ , laquelle peut être regardée comme touchant la même Hyperbole dans son autre extrémité.

D'où l'on voit que les deux asymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les Hyperboles opposées dans leurs extrémités.

## COROLLAIRE I.

109. COMME il n'y a que la seule ligne  $DMd$ ; laquelle étant terminée par les asymptotes, soit coupée en deux parties égales au point  $M$ ; il s'ensuit que si une ligne droite  $DMd$ , terminée par les asymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point  $M$ , qui coupe cette ligne droite en deux parties égales; elle sera tangente de cette Hyperbole en ce point. Et réciproquement que si une ligne droite  $DMd$ , terminée par les asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point  $M$ ; elle sera coupée en deux parties égales par ce point.

## COROLLAIRE II.

FIG. 44.

110. SI par le point touchant  $M$  d'une tangente quelconque  $DMd$ , terminée par les asymptotes  $CL$ ,

$Cl$ , d'une Hyperbole, l'on mene un premier diametre  $Mcm$ ; & que par le point  $m$ , où il rencontre l'Hyperbole opposée, l'on tire une parallele  $Ee$ , à la tangente  $Dd$ , terminée par les asymptotes aux points  $E, e$ : je dis que cette ligne sera tangente au point  $m$ . Car les triangles  $CMD, CmE$ , seront semblables & égaux, puisque \* *Art. 96.*  $CM$  est égal à  $Cm$ . La ligne  $mE$ , sera donc égale à  $MD$ . On prouvera de même (à cause des triangles semblables & égaux  $CMd, Cme$ ) que  $me$  est égale à  $Md$ . C'est pourquoi la ligne  $Ee$  est divisée en deux également au point  $m$ ; puisque  $Dd$  l'est au point  $M$ . Et par conséquent \* elle sera tangente en  $m$ . *Art. 109.*

D'où l'on voit que les tangentes  $Dd, Ee$ , qui passent par les extremités d'un premier diametre quelconque  $Mm$ , sont paralleles entr'elles; & de plus égales, lorsqu'elles sont terminées par les asymptotes.

D E F I N I T I O N S.

13.

S'il y a deux diametres  $Mm, Ss$ , dont l'un  $Ss$ , soit *Fig. 44.* parallele aux tangentes qui passent par les extremités de l'autre  $Mm$ ; & de plus terminé en  $S, s$ , par les droites  $MS, Ms$ , menées de l'une des extremités  $M$  du diametre  $Mm$ , parallelement aux asymptotes: ces deux diametres  $Mm, Ss$ , seront appellés ensemble *Conjugués*.

14.

Les lignes droites menées des points des Hyperboles opposées parallelement à l'un des diametres conjugués, & terminées par l'autre, sont nommées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi  $NO$ , est une ordonnée au diametre  $Mm$ .

15.

Si l'on prend une troisième proportionnelle à deux diametres conjugués, elle sera le *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion.

## COROLLAIRE I.

III. LA définition 13<sup>e</sup> convient aux deux axes ; puisqu'on voit selon l'article 84. le second axe est parallèle aux tangentes qui passent par l'extrémité du premier ; & que de plus, selon la définition 11<sup>e</sup>, il est terminé par deux droites menées de l'une des extrémités du premier axe, parallèlement aux asymptotes. D'où l'on voit que les deux axes peuvent être regardés comme deux diamètres conjugués qui font entr'eux des angles droits.

## COROLLAIRE II.

II2. COMME le diamètre  $SCs$ , est parallèle à la tangente  $DMd$ , qui passe par l'une des extrémités  $M$  du diamètre  $Mcm$ , & que cette tangente rencontre les deux asymptotes  $CD$ ,  $Cd$ , de l'Hyperbole, qui passe par le point  $M$  : il s'ensuit qu'il tombe dans les angles à côté de l'angle  $DCd$ , fait par les asymptotes de cette Hyperbole ; Et qu'ainsi c'est un second diamètre.

D'où l'on voit qu'entre deux diamètres conjugués  $Mcm$ ,  $SCs$  ; il y en a toujours un premier  $Mm$ , & un second  $Ss$ .

## COROLLAIRE III.

II3. LE second diamètre  $SCs$ , est coupé par le milieu au centre  $C$ , & de plus égal à la tangente  $DMd$ , qui passant par l'une des extrémités  $M$  du premier diamètre  $Mm$ , qui lui est conjugué, est terminée par les asymptotes. Car à cause des parallèles  $MS$ ,  $Cd$ , &  $Ms$ ,  $CD$  ; il est clair que  $CS$  est égale à  $Md$ , &  $Cs$  à  $MD$ .

\* Art. 109. Or  $DMd$ , est divisée\* en deux parties égales au point touchant  $M$ . Donc &c.

## COROLLAIRE IV.

II4. DEUX diamètres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , étant donnés, & sachant lequel des deux est un premier diamètre ; il ne faut pour avoir les asymptotes  $CD$ ,  $Cd$ , que

tirer par le centre  $C$ , des parallèles aux deux droites  $MS$ ,  $M s$ , menées de l'une des extrémités  $M$ , du premier diamètre  $Mm$ , aux deux extrémités  $S$ ,  $s$ , du second.

Et réciproquement les deux asymptotes  $CD$ ,  $Cd$ , d'une Hyperbole étant données, avec l'un de ses points  $M$ ; il ne faut pour avoir deux de ces diamètres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , que tirer  $MH$  parallèle à l'une des asymptotes  $Cd$ , qui rencontre l'autre asymptote  $CD$  en  $H$ ; & l'ayant prolongée en  $S$ , en sorte que  $HS$  soit égale à  $HM$ , mener les droites  $CM$ ,  $CS$ . Car tirant  $MD$  parallèle à  $CS$ , il est clair à cause des triangles semblables  $CHS$ ,  $MHD$ , que  $HD$  est égale à  $HC$ ; puisque  $MH$  est égale à  $HS$ ; & qu'ainsi \*  $MD$  est tangente en  $M$ : d'où il suit selon la définition 13<sup>e</sup>, que les lignes  $CM$ ,  $CS$ , sont deux demi-diamètres conjugués. \* Art. 107.

Il est donc évident que deux diamètres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , étant donnés de position & de grandeur, & sachant de plus lequel des deux est un premier diamètre; on a les deux asymptotes  $CD$ ,  $Cd$ , avec l'un des points  $M$ , de l'une des Hyperboles opposées.

Et réciproquement que les asymptotes  $CD$ ,  $Cd$ , d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points  $M$ ; on a deux de ses diamètres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , de position & de grandeur; & l'on fait lequel des deux est un premier diamètre; sçavoir, celui qui passe par le point donné  $M$ .

## COROLLAIRE IV.

115. UN second diamètre  $SCs$ , étant donné de position, pour en déterminer la grandeur, & trouver le premier diamètre  $Mm$ , qui lui est conjugué; on lui mène par tout où l'on voudra au dedans de l'angle fait par les asymptotes, une parallèle  $Zl$ , terminée par les asymptotes en  $Z$ ,  $l$ ; & par son point de milieu  $O$ , le premier diamètre  $CO$ , qui rencontrera l'Hyperbole en

un point  $M$ ; par lequel ayant tiré les droites  $MS$ ,  $M's$ , parallèles aux asymptotes; il est clair, selon la définition 13<sup>e</sup>, que les points  $S$ ,  $s$ , où elles rencontrent le second diamètre  $SCs$ , donné de position, en déterminent la grandeur, & que le premier diamètre  $MCm$  lui est conjugué. Car menant par le point  $M$ , la ligne  $Dd$ , parallèle à  $Ll$ , & terminée par les asymptotes, elle sera coupée en deux également au point  $M$ ; puisque  $Ll$ ,  
*\* Art. 109.* l'est au point  $O$ : & partant \* elle sera tangente en  $M$ :

De-là, il est évident qu'un second diamètre  $SCs$ , étant donné de position, la grandeur est déterminée en sorte qu'il ne peut en avoir qu'une seule; comme aussi la grandeur & la position du premier diamètre  $Mm$ , qui lui est conjugué.

## COROLLAIRE V.

116. **U**N second diamètre  $SCs$ , étant donné de position & de grandeur, avec son paramètre, & la position de ses ordonnées; il sera facile de trouver de position & de grandeur le premier diamètre  $MCm$ , qui lui est conjugué, avec son paramètre. Car ayant mené par le centre  $C$ , une parallèle indéfinie aux ordonnées du diamètre  $Ss$ , on marquera sur cette ligne deux points  $M$ ,  $m$ , également éloignés de part & d'autre du centre  $C$ , en sorte que  $Mm$ , soit égale à la moyenne proportionnelle entre le second diamètre  $Ss$ , & son paramètre. Puis ayant trouvé une troisième proportionnelle aux deux lignes  $Mm$ ,  $Ss$ , il est clair, selon les définitions 14 & 15, que  $Mm$ , sera le premier diamètre conjugué au diamètre  $Ss$ , & qu'il aura pour son paramètre cette troisième proportionnelle.

## PROPOSITION VII.

## Theorème.

**FIG. 44.** 117. **L**E carré d'une ordonnée quelconque  $ON$ , au premier diamètre  $Mm$ , est au rectangle de  $MO$  par  $Om$ , par-

ties de ce diametre prolongé; comme le quarré de son conjugué  $Ss$ , est au quarré de ce premier diametre  $Mm$ .

Il faut prouver que  $\overline{ON}^2 \cdot MO \times Om :: \overline{Ss}^2 \cdot \overline{Mm}^2$ .

Ayant mené par l'une des extremités  $M$ , du premier diametre  $Mm$ , une parallele  $Dd$  au second diametre  $Ss$ , terminée par les asymptotes; elle sera tangente en  $M$ , selon la définition 13<sup>e</sup>. Et par conséquent \* elle sera \* Art. 109.

coupée en deux également par ce point: c'est pourquoi, si l'on prolonge l'ordonnée  $ON$  (qui selon la définition 14. est parallele au diametre  $Ss$ ) de part & d'autre du diametre  $Mm$ , elle rencontrera les asymptotes en deux points  $L, l$ , qui seront également éloignés de part & d'autre du point  $O$ . Cela posé, soient nommées les données  $CM$ , ou  $Cm$ ,  $t$ ;  $CS$ , ou  $Cs$ , ou \*  $MD$ , ou  $Md$ , \* Art. 113.

$c$ ; & les indéterminées  $CO$ ,  $x$ ;  $ON$ ,  $y$ ; on aura à cause des triangles semblables  $CMD$ ,  $COL$ ; cette proportion:  $CM(t) \cdot MD(c) :: CO(x) \cdot OL$  où  $Ol = \frac{cx}{t}$ . Donc

$LN$  ou  $LO \pm ON = \frac{cx}{t} \pm y$ , &  $Nl$  ou  $Ol \mp NO = \frac{cx}{t} \mp y$ ; Et partant  $LN \times Nl = \frac{c^2 x^2}{t^2} - yy = * DM \times Md$  \* Art. 90.

$= cc$ . D'où il suit que  $\overline{ON}^2 (yy) \cdot MO \times Om (xx - tt) :: \overline{Ss}^2 (4cc) \cdot \overline{Mm}^2 (4tt)$ . Puisqu'en multipliant les Extrêmes & les Moyens, on trouve  $4tt yy = 4ccxx - 4cc tt$ , c'est à dire (en divisant par  $4tt$ , & transposant à l'ordinaire) l'équation même précédente  $\frac{c^2 x^2}{t^2} - yy = cc$ . Ce qu'il falloit démontrer.

#### COROLLAIRE GENERAL.

118. IL est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde \*, par rapport aux deux axes  $Aa$ , \* Art. 79.  $Bb$ , s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques,  $Mm$ ,  $Ss$ . Or comme les articles 80, 81, 82, 83, 84 & 85, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle  $ACB$ , soit droit ou qu'il ne le soit pas; il s'en

suit que si l'on suppose dans ces articles que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, soient deux diamètres conjugués quelconques, ces articles seront encore vrais dans cette supposition : car leur démonstration demeure toujours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entièrement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diamètre*.

## PROPOSITION VIII.

### Theorème.

**FIG. 45.** 119. SOIENT deux tangentes quelconques *DE*, *FG*, d'une Hyperbole *MA*, terminées par les asymptotes, & qui s'entrecoupent en un point *O* ; je dis que les côtés des triangles *CDE*, *CFG*, autour de l'angle commun *C*, sont réciproquement proportionnels,

*Il faut prouver que*  $CD. CF :: CG. CE$ .

Ayant mené par les points touchans *M*, *A*, les parallèles *MH*, *AL*, à l'asymptote *CG* ; il est clair à cause des triangles semblables *CDE*, *HDM*, que *CD* est double de *CH*, & *CE* double de *HM* ; puisque *DB* \* *Art. 109*, est \* double de *DM*, Et à cause des triangles semblables *CFG*, *LFA*, que *CF* est double de *CL*, & *CG* \* *Art. 100*, double de *LA* ; puisque *FG*, est double de *FA*. Or \*  $CH. CL :: LA. HM$ . Et partant si l'on prend le double de chaque terme ; on aura  $2CH$  ou *CD*.  $2CL$  ou *CF* ::  $2LA$  ou *CG*.  $2HM$  ou *CE*. Ce qu'il falloit &c.

### COROLLAIRE,

120. IL suit de cette Proposition que les droites *DG*, *FE*, sont parallèles entr'elles. D'où il est évident :

1°. Que les triangles *CDE*, *CFG*, sont égaux ; car les triangles *FDE*, *FGE*, qui ont la même base *FE*, & qui sont entre les mêmes parallèles *DG*, *FE*, sont égaux ; Et partant, si l'on ajoute de part & d'autre le même







même triangle  $C F E$ , on formera les triangles  $C D E$ ,  $C F G$ , qui seront égaux entr'eux.

2°. Que la ligne  $D E$ , est coupée en même raison aux points  $M$ ,  $O$ , que la ligne  $F G$  l'est aux points  $A$ ,  $O$ . Car menant par les points rouchans la droite  $M A$ , il est clair qu'elle sera parallèle aux deux droites  $D G$ ,  $F E$ ; puisqu'elle coupe par le milieu les droites  $D E$ ,  $F G$ , renfermées entre ces parallèles.

## PROPOSITION IX.

## Theorème.

121. *Si par un point quelconque M d'une Hyperbole, l'on mene une ordonnée MP à tel de ses diamètres Aa que l'on voudra, & une tangente MT qui le rencontre en T; je dis que CP. CA :: CA. CT. en observant que les points P, T, tombent du même côté du centre C, lorsque la ligne Aa est un premier diamètre; & au contraire qu'ils tombent de part & d'autre du centre, lorsque c'est un second diamètre.* Fig. 46. & 47.

*Premier cas.* Lorsque la ligne  $A a$  est un premier diamètre. On prolongera la tangente  $M T$  jusqu'à ce qu'elle rencontre les asymptotes  $C D$ ,  $C G$ , aux points  $D$ ,  $E$ ; & l'ordonnée  $P M$ , jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote  $C D$  au point  $N$ ; on menera ensuite par le point  $A$  la ligne  $A K$ , parallèle à  $D E$ , qui rencontre l'asymptote  $C G$  au point  $K$ , & la tangente  $F G$  terminée par les asymptotes, qui sera parallèle \* à  $P M$ , & qui rencontre \* *Def. 14.* au point  $O$  l'autre tangente  $D E$ . Fig. 46.

Cela posé,  $A P$  est à  $A C$ , ou  $F N$  à  $F C$ , en raison composée de  $F N$  à  $F D$ , ou de  $O M$  à  $O D$ , ou \* de  $O A$  à  $O G$ , ou \* *Art. 120.* de  $E K$  à  $E G$ , & de  $F D$  à  $F C$ , ou \* de  $E G$  à  $E C$ . Or  $A T$  est à \* *Art. 120.*  $T C$ , ou  $K E$  à  $E C$ , en raison composée de  $E K$  à  $E G$ , & de  $E G$  à  $E C$ . Donc  $A P. A C :: A T. T C$ . puisque les raisons composantes de ces deux raisons sont les mêmes; & par conséquent  $A P + A C$  ou  $C P. C A :: A T + T C$  ou  $C A. C T$ . Ce qui étoit proposé en premier lieu.

K

FIG. 47.

*Second cas.* Lorsque la ligne  $Aa$  est un second diamètre. Ayant mené par le centre  $C$  la ligne  $CK$  parallèle à l'ordonnée  $PM$ , qui rencontre l'Hyperbole au point  $B$ , & la tangente  $MT$  au point  $R$ , & par le point touchant  $M$  la ligne  $MK$  parallèle à  $Aa$ ; il est clair que  $CB$  sera le premier demi-diamètre conjugué au second  $Aa$ , & qu'ainsi  $MK$  sera ordonnée à ce diamètre.

Cela posé, si l'on nomme les données  $CA$  ou  $Ca$ ,  $z$ ;  $CB$ ,  $c$ ; & les indéterminées  $CP$  ou  $MK$ ,  $x$ ;  $PM$  ou  $CK$ ,  $y$ ; on aura selon ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas,  $CR = \frac{cz}{y}$ ; & partant  $RK$  ou  $CK - CR = \frac{y-cz}{y}$ . Or les triangles semblables  $KRM$ ,  $CRT$ , donnent  $KR \left( \frac{y-cz}{y} \right) \cdot RC \left( \frac{cz}{y} \right) :: MK (x) \cdot$

*\* Art. 80.*  $CT = \frac{cx}{y-cz} = \frac{z}{x}$ . en mettant pour  $yy - cz$  sa valeur  
 & 118.  $\frac{cx}{z}$  tirée de ce que  $yy = * \frac{cx}{z} - cz$ . C'est à dire que  $CP \cdot CA :: CA \cdot CT$ . Ce qui restoit à démontrer.

## PROPOSITION X.

## Theorème.

FIG. 48. & 49. 122. SI par un point quelconque  $M$  d'une Hyperbole qui a pour centre le point  $C$ , on mène une ordonnée  $MP$  à l'un ou à l'autre axe  $Aa$ , & une perpendiculaire  $MG$  à la tangente  $MT$ , laquelle passe par  $M$ : Je dis que  $CP$  sera toujours à  $PG$  en la raison donnée de l'axe  $Aa$  à son Paramètre.

Car nommant le demi-axe  $CA$  ou  $Ca$ ,  $z$ ; & les indéterminées  $CP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; on aura  $* CT = \frac{z}{x}$ ; Et partant  $PT = \frac{x \mp z}{x}$ , selon que  $Aa$  est le premier ou le second axe. Or les triangles rectangles semblables  $TPM$ ,  $MPG$ , donnent  $TP \left( \frac{x \mp z}{x} \right) \cdot PM (y) :: PM$

(y).  $PG = \frac{xy}{xx+tt}$ . D'où l'on tire cette proportion  $CP$   
 (x).  $PG \left( \frac{xy}{xx+tt} \right) :: \overline{CP}^2 + \overline{CA}^2 (xx+tt) . \overline{PM}^2 (yy)$ .  
 puisqu'en multipliant les moyens & les extrêmes, on  
 trouve le même produit  $xyy$ . Mais  $\overline{CP}^2 + \overline{CA}^2$  est à  
 $\overline{PM}^2$ , comme \* l'axe  $Aa$  est à son parametre. Donc \* Art. 81.  
 $CP$  est aussi à  $PG$  en cette même raison. *Ce qu'il falloit*  
*démontrer.*

## PROPOSITION XI.

## Theorème.

123. SI d'un point quelconque  $M$  d'une Hyperbole, l'on FIG. 50.  
 tire à ses deux foyers  $F, f$ , les droites  $MF, Mf$ ; je dis que  
 la tangente  $MT$ , qui passe par ce point  $M$ , divise en deux  
 également l'angle  $FMf$ .

Car ayant mené les perpendiculaires  $FD, fd$ , sur  
 la tangente  $MT$ ; le premier axe  $Aa$ , qui passe par les  
 foyers  $F, f$ , & qui rencontre la tangente en  $T$ ; & l'or-  
 donnée  $MP$ , à cet axe: on nommera les données  $CA$   
 ou  $Ca$ ,  $t$ ;  $CF$  ou  $Cf$ ,  $m$ ; & l'indéterminée  $CP$ ,  $x$ .  
 L'on aura  $MF^2 \left( \frac{mx}{t} - t \right) . Mf^2 \left( \frac{mx}{t} - t \right) :: TF$  ou  $CF^2$  \* Art. 78.

$(m) - CT^2 \left( \frac{t}{x} \right) . Tf$  ou  $Cf^2 (m) - CT^2 \left( \frac{t}{x} \right)$ . puisqu'en \* Art. 121.  
 multipliant les extrêmes & les moyens, ou forme le  
 même produit. Or les triangles rectangles semblables  
 $TFD, Tfd$ , donnent  $TF . Tf :: FD . fd$ . L'hypothe-  
 nuse  $MF$  du triangle rectangle  $MTF$ , sera donc à  
 l'hypothénuse  $Mf$  du triangle rectangle  $MTf$ , comme  
 le côté  $DF$  est au côté  $df$ ; & par conséquent ces deux  
 triangles seront semblables. Donc les angles  $FMD$ ,  
 $fMd$ , qui sont opposés aux côtés homologues  $DF, df$ ,  
 seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE.

124. DE-LA il est évident, que la tangente  $MT$ , étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant  $M$ , laisse l'Hyperbole  $AM$ , toute entière du côté de son foyer intérieur  $F$ . Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de cette Hyperbole qu'on prenne le point  $M$ , il est visible qu'elle sera concave dans toute son étendue autour de son foyer intérieur  $F$ .

## PROPOSITION XII.

## Theorème.

FIG. 51. 125. LA différence des quarrés de deux diametres conjugués quelconques  $Mm$ ,  $Ss$ , est égale à la différence des quarrés des deux axes  $Aa$ ,  $Bb$ .

Il faut prouver que  $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$ , ou que  $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$ .

\*Def. 11. & 13. Si l'on mene les droites  $MS$ ,  $AB$ , elles seront\* parallèles à l'asymptote  $Cg$ , & de plus coupées en deux également par l'autre asymptote  $CG$ , aux points  $H$ ,  $G$ ;  
 \*Def. 11. & 13. puisque\* les lignes  $Ms$ ,  $Ab$ , sont parallèles à cette asymptote, & que les seconds diametres  $Ss$ ,  $Bb$ , sont coupés\* en deux également au centre  $C$ : C'est pourquoi si l'on mene sur l'asymptote  $CG$ , les perpendiculaires  $AF$ ,  $BE$ ,  $ML$ ,  $SK$ , on formera les triangles  $GAF$ ,  $GBE$ , &  $HML$ ,  $HSK$ , qui seront semblables & égaux. Cela  
 \*Art. 113. posé, soient nommées les données  $CG$  ou\*  $GA$ ,  $m$ ;  $GE$  ou  $GF$ ,  $a$ ;  $AF$  ou  $BE$ ,  $b$ ; & les indéterminées  $CH$ ,  $x$ ;  $HM$ ,  $y$ : ce qui donne  $CE = m - \frac{1}{2}a$ ,  $CF = m - a$ ;  $\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$  ou  $\overline{CB}^2 = mm - \frac{1}{2}am + aa + bb$ ,  $\overline{CF}^2 + \overline{FA}^2$  ou  $\overline{CA}^2 = mm - am + aa + bb$ . Et partant  $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = am$ . Or les triangles semblables  $GAF$ ,  $HML$ , fournissent  $GA(m) \cdot AF(b) :: HM(y) \cdot ML$  ou  $KS = \frac{b}{m}$ . Et  $GA(m) \cdot GF(a) :: HM$

(y).  $HL$  ou  $HK = \frac{ay}{m}$ . Donc  $CK = x + \frac{ay}{m}$ ,  $CL = x - \frac{ay}{m}$ ;  $\overline{CK}^2 - \overline{KS}^2$  ou  $\overline{CS}^2 = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{a^2yy}{mm} + \frac{b^2yy}{mm}$ ,  $\overline{CL}^2 - \overline{LM}^2$  ou  $\overline{CM}^2 = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{a^2yy}{mm} - \frac{b^2yy}{mm}$ . Et partant  $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \frac{4axy}{m} = 4am$ , en mettant pour  $xy$  la valeur \*  $mm$ . Donc  $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$ ; Ce. \* *Art.* 101. qu'il falloit démontrer.

Si l'angle  $G C g$ , fait par les asymptotes, étoit aigu, au lieu que dans cette figure & le raisonnement qui lui est approprié, il est obtus;  $CF$  seroit alors plus grande que  $CE$ , & on prouveroit de la même manière que  $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$ . Mais si l'angle  $G C g$  fait par les asymptotes étoit droit, il est visible alors que les lignes  $AB$ ,  $MS$ , seroient perpendiculaires sur l'asymptote  $CG$ ; & qu'ainsi les deux demi-diamètres conjugués  $CM$ ,  $CS$ , seroient égaux entr'eux, de même que les deux demi-axes  $CA$ ,  $CB$ . Or comme alors la différence des deux diamètres conjugués  $Mm$ ,  $Ss$ , est nulle, aussi-bien que celle des deux axes  $Aa$ ,  $Bb$ ; il s'ensuit que cette Proposition est vraie dans tous les cas.

## COROLLAIRE.

126. **D**E-LA il est évident qu'un premier diamètre quelconque  $Mm$ , est moindre, plus grand, ou égal au second diamètre  $Ss$ , qui lui est conjugué; selon que l'angle  $G C g$ , fait par les asymptotes, est obtus, aigu, ou droit.

## DÉFINITION.

16.

Les deux Hyperboles opposées sont appelées *Equilates*, lorsque deux de leurs diamètres conjugués quelconques sont égaux entr'eux; ou bien lorsque l'angle fait par leurs asymptotes est droit.

## COROLLAIRE.

FIG. 52.

127. Si d'un point quelconque  $M$  d'une Hyperbole équilatère, l'on mene une ordonnée  $MP$  à tel de ses diamètres  $Aa$  qu'on voudra, on aura \*  $\overline{MP} = \overline{CP} \mp \overline{CA}$ : sçavoir —, lorsque  $Aa$  est un premier diamètre; & +, lorsque c'est un second. Car le diamètre conjugué au diamètre  $Aa$  \* lui sera toujours égal.

\* Art. 81. &  
118.

\* Art. 126.

## PROPOSITION XIII.

## Problème.

FIG. 53. 54.  
& 55.

\* Art. 114.

128. DEUX diamètres conjugués quelconques étant donnés, & sçachant lequel des deux est le premier; on ce qui revient \* au même, les asymptotes  $CD$ ,  $CF$ , d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points quelconques  $M$ : mener deux diamètres conjugués  $Aa$ ,  $Bb$ , qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné.

Ayant coupé dans un cercle quelconque qui a pour centre le point  $o$ , un arc  $dcf$  capable de l'angle  $DCF$  fait par les asymptotes; on mènera par le point de milieu  $e$ , de la corde  $df$ , la ligne  $ec$  qui fasse avec cette corde de part ou d'autre l'angle  $dec$  ou  $fec$  égal à l'angle donné; & par le point  $c$ , où elle rencontre l'arc  $dcf$ , les droites  $cd$ ,  $cf$ . Cela fait, on prendra sur les asymptotes les parties  $CD$ ,  $CF$ , égales aux cordes  $cd$ ,  $cf$ ; & ayant tiré  $DF$ , l'on mènera le second diamètre  $Bb$  parallèle à cette ligne, & le premier diamètre  $Aa$  qui passe par son milieu  $E$ . Je dis que ces deux diamètres  $Aa$ ,  $Bb$ , font entr'eux un angle égal à l'angle donné, & qu'ils sont conjugués l'un à l'autre.

Car par la construction l'angle  $dcf$  est égal à l'angle  $DCF$  fait par les asymptotes; & par conséquent les triangles  $DCF$ ,  $dcf$ , &  $DCE$ ,  $dce$ , sont égaux & semblables. L'angle  $BCa$ , que font entr'eux les deux diamètres  $Aa$ ,  $Bb$ , sera donc égal à l'angle  $DEC$  ou  $dec$



qui a été fait égal à l'angle donné. De plus, si l'on mène par le point  $A$ , que je suppose être l'une des extrémités du premier diamètre  $Aa$ , une parallèle à  $DF$ ; il est clair qu'elle sera coupée également par ce point, puisque  $DF$  l'est au point  $E$ ; & qu'ainsi \* elle sera tangente \* *Art. 109.* en  $A$ ; d'où il suit \* que les diamètres  $Aa$ ,  $Bb$ , sont conjugués. \* *Def. 13.*

Maintenant pour déterminer la grandeur de ces deux diamètres, on tirera par le point donné  $M$ , une parallèle  $MKL$  au premier diamètre  $Aa$ , laquelle rencontre l'asymptote  $CD$  au point  $K$ , & l'autre asymptote  $CF$ , prolongée au delà du centre  $C$ , au point  $L$ : & ayant pris  $CA$  moyenne proportionnelle entre  $KM$ ,  $ML$ ; il est clair \* que le point  $A$  sera l'une des extrémités du premier diamètre  $Aa$ ; & qu'ainsi menant les lignes  $AB$ ,  $ab$ , parallèles aux asymptotes  $CF$ ,  $CD$ , elles \* détermineront par leurs points de rencontre  $B$ ,  $b$ , la grandeur du second diamètre  $Bb$ . \* *Art. 94.* \* *Def. 13.*

Comme l'on peut mener deux différentes lignes  $ec$ ,  $ec$ , qui fassent avec la corde  $df$ , de part & d'autre des angles  $dec$ ,  $fec$ , égaux à l'angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; il s'ensuit qu'on pourra toujours trouver alors deux différens diamètres conjugués  $Aa$ ,  $Bb$ , qui satisfieront également, comme l'on voit dans les figures 54. & 55. Mais il est à remarquer que les diamètres conjugués  $Aa$ ,  $Bb$ , de la fig. 55. ont une position semblable par rapport à l'asymptote  $CF$ ; à ceux de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote  $CD$ ; & que leur grandeur demeure la même dans ces deux différentes positions. Car,

1<sup>o</sup>. Menant du centre  $c$  au point  $e$ , milieu de la corde  $df$ , la ligne  $ce$ , elle sera perpendiculaire à cette corde, & par conséquent les angles  $oec$ ,  $oec$ , seront égaux; c'est pourquoi tirant les rayons  $oc$ ,  $oc$ , les triangles  $oec$ ,  $oec$ , qui ont le côté  $oe$  commun, les angles  $oec$ ,  $oec$ , & les côtés  $oc$ ,  $oc$ , égaux entr'eux; auront aussi leur troisièmes côtés  $ec$ ,  $ec$ , égaux. Les triangles  $fec$ ,  $dec$ , qui ont les côtés  $ef$ ,  $ed$ , &  $ec$ ,  $ec$ , & les

angles *fec*, *dec*, égaux, seront donc égaux & semblables; d'où l'on voit que l'angle *ecf*, ou *ECF*, de la figure 55. est égal à l'angle *ecd*, ou *ECD*, de la fig. 54. & qu'ainsi la position du diamètre *Aa*, de la fig. 55. par rapport à l'asymptote *CF*, est semblable à celle du diamètre *Aa*, de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote *CD*.

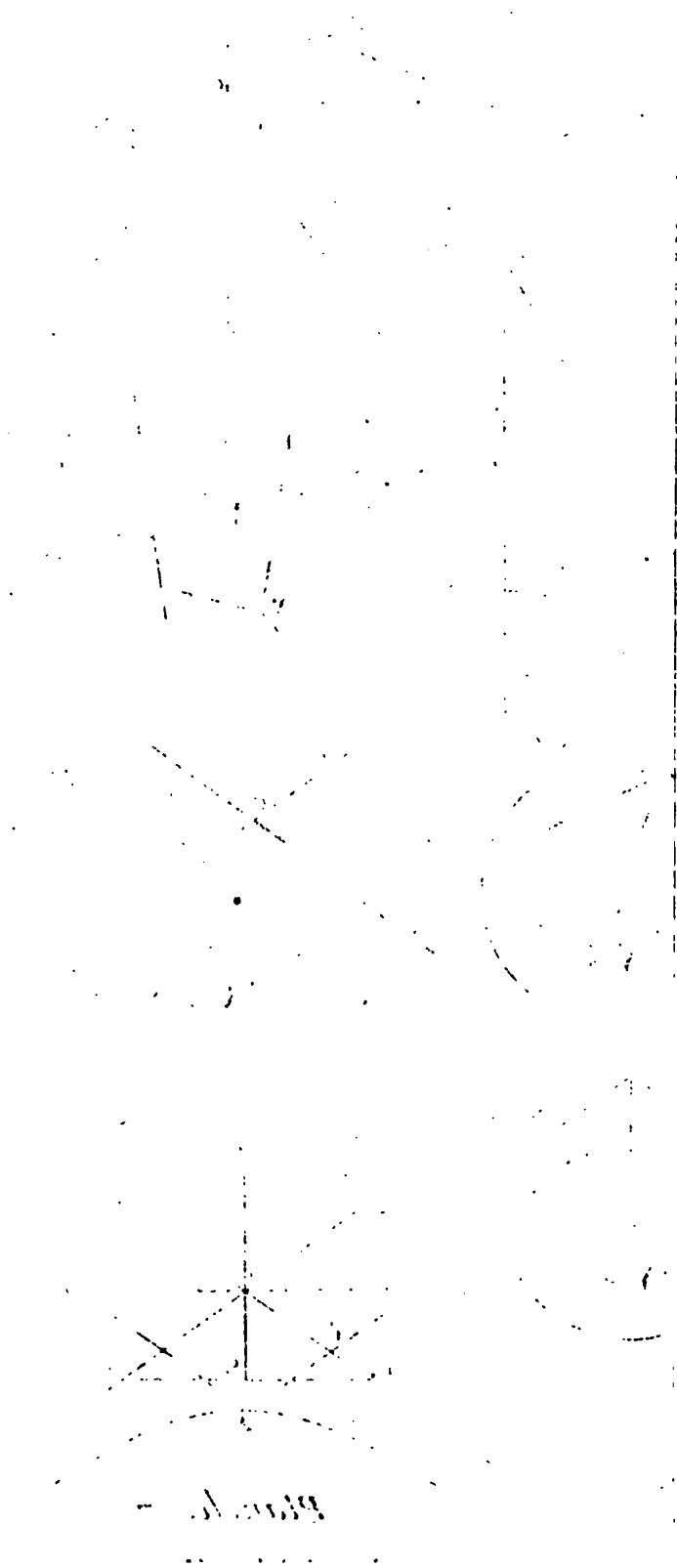
2°. Si l'on mène dans la figure 55. la ligne *MI*, qui fasse avec l'asymptote *CF*, prolongée du côté du centre *C*, l'angle *MI**C* égal à l'angle *MLC* ou *ECF*, de la figure 54: il est clair que les lignes *MI*, *Mk*, de la figure 55. seront égales aux lignes *ML*, *MK*, de la figure 54; puisqu'on suppose que la position du point *M* par rapport aux asymptotes, est la même dans ces deux figures. Or l'angle *MI**L*, complément à deux droits de l'angle *MI**C*, de la figure 55. ou de *ECF* de la figure 54, est égal à l'angle *MKk*, complément à deux droits de l'angle *ECD* de la figure 55. ou de *ECF* de la fig. 54; Et par conséquent dans fig. 55. les deux triangles *LM**I*, *kM**K*, qui ont l'angle en *M* commun, & les angles aux points *I*, *K*, égaux, seront semblables: ce qui donne *LM*. *MI* :: *kM*, *MK*. Et partant *LM* × *MK* = *IM* × *Mk* ou *LM* × *MK* de la figure 54. D'où l'on voit \* que les premiers demi-diamètres *CA*, *CA*, des figures 54 & 55, sont égaux. Il en est de même du diamètre *Bb*; puisque sa position & sa grandeur dépendent de celles du premier diamètre *Aa*, auquel il est conjugué.

Comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne *ec*, qui fasse avec la corde *df* de part ou d'autre, un angle égal à l'angle donné, lorsque cet angle est droit; il s'ensuit qu'il n'y a que deux diamètres conjugués *Aa*, *Bb*, qui fassent entr'eux un angle droit; & qu'ainsi \* ils seront les deux axes. Mais le triangle *dcf* ou *DCF*, étant alors isoscèle, le premier axe *Aa* divisera par le milieu l'angle *DCF* fait par les asymptotes; d'où l'on voit que pour trouver de position les deux axes, il n'y a qu'à tirer deux lignes droites *Aa*, *Bb*, perpendiculaires entr'elles, dont l'une d'elles *Aa*, divisée par le milieu l'angle *DCF*,

FIG. 56. &  
57.

\* Art. III.





$DCF$ , fait par les asymptotes: après quoi l'on en déterminera la grandeur, comme on vient de l'enseigner pour les diamètres conjugués.

On peut encore trouver les deux axes de cette autre manière. Soit menée par le point donné  $M$  une parallèle  $MH$  à l'une des asymptotes  $CF$ , & terminée par l'autre  $CD$  au point  $H$ . Soit prise sur l'asymptote  $CD$ , la partie  $CG$  égale à la moyenne proportionnelle entre  $CH$ ,  $HM$ : & soit tirée par le point  $G$  une parallèle  $AB$  à  $CF$ , telle que chacune de ses parties  $GA$ ,  $GB$ , soit égale à  $CG$ . Il est évident que les lignes  $CA$ ,  $CB$ , \* seront les deux demi-axes de position & de grandeur. \* Art. 101.  
 & 88.

## COROLLAIRE.

129. IL est donc évident, 1°. Qu'il n'y a que deux diamètres conjugués qui fassent entr'eux un angle droit; & qu'ainsi il ne peut y avoir que deux axes. 2°. Qu'on peut toujours trouver deux différens diamètres conjugués qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; que les deux premiers ont une position semblable par rapport à une asymptote, à celle des deux autres par rapport à l'autre asymptote, d'où il suit qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre des deux axes, puisque les deux axes divisent par le milieu les angles faits par les asymptotes; & qu'enfin leur grandeur demeure la même dans ces deux différentes positions.

## PROPOSITION XIV.

## Problème.

130. DEUX diamètres conjugués quelconques étant donnés, & sachant lequel des deux est le premier; ou ce qui est la même chose \* les asymptotes de deux Hyperboles opposées étant \* Art. 114. données avec un de leurs points quelconque: décrire ces Hyperboles par un mouvement continu.

## PREMIÈRE MANIÈRE.

On cherchera les deux axes, comme l'on vient d'enseigner dans la Proposition précédente; & l'on décrira ensuite les Hyperboles opposées selon l'article 76.

## SECONDE MANIÈRE.

FIG. 58.

Soient  $Aa$ ,  $Bb$ , les diamètres conjugués donnés, entre lesquels le diamètre  $Aa$  est le premier; ou bien  $CG$ ,  $Cg$ , les asymptotes données, avec le point  $A$ , un de ceux des Hyperboles opposées. Ayant mené par le point donné  $A$  une parallèle  $AG$ , à l'une des asymptotes  $Cg$ , & terminée par l'autre en  $G$ , on fera glisser le long de l'asymptote  $CG$ , indéfiniment prolongée de part & d'autre du centre  $C$ , une droite  $HK$  égale à  $CG$ , qui entraînera par son extrémité  $H$  une parallèle  $HM$  à l'asymptote  $Cg$ , & par son autre extrémité  $K$ , une droite  $KA$  mobile autour du point fixe  $A$ . Je dis que l'intersection continuelle  $M$  des droites  $AK$ ,  $HM$ , décrira dans ce mouvement les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

\* Art. 101.

Car à cause des triangles semblables  $KHM$ ,  $KGA$ , on aura toujours  $KH$  ou  $CG$ .  $HM :: KG$  ou  $CH$ .  $GA$ . Et partant  $CH \times HM = CG \times GA$ . Le point  $M$  sera donc \* un des points de l'Hyperbole qui passe par le point donné  $A$ , & qui a pour asymptotes les droites données  $CG$ ,  $Cg$ ; ou de l'Hyperbole opposée.

## PROPOSITION XV.

## Problème.

131. LES mêmes choses étant données que dans la Proposition précédente; décrire les Hyperboles opposées par plusieurs points.

## PREMIÈRE MANIÈRE.

FIG. 59.

Soient  $CD$ ,  $CE$ , les asymptotes données, &  $A$  le

point donné. Ayant mené par ce point  $A$  autant de lignes  $DE, DE, DE, \&c.$  qu'on voudra, terminées par les asymptotes; & ayant pris sur ces lignes droites les parties  $EM, EM, EM, \&c.$  égales à  $AD, AD, AD, \&c.$ ; sçavoir chacune à sa correspondante; il est clair \* 1<sup>o</sup>. Que les points  $M, M, M, \&c.$  seront à l'Hyperbole qui passe par le point  $A$ , lorsque les points  $E, E, E, \&c.$  tombent au dessous du centre. 2<sup>o</sup>. Que ces Hyperboles ont pour asymptotes les droites  $CD, CE$ . Faisant donc passer par tous les points  $M, M, M, \&c.$  qui tombent dans l'angle fait par les asymptotes, une ligne courbe, & par les autres points  $M, M, M, \&c.$  qui tombent dans l'angle opposé au sommet à celui-ci, une autre ligne courbe; ces deux lignes seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande. \* Art. 106.

## SECONDE MANIERE.

Soient les lignes  $Aa, Bb$ , les deux diamètres conjugués donnés, entre lesquels  $Aa$  est le second. Ayant pris sur le premier demi-diamètre  $CB$  prolongé indéfiniment du côté de  $B$ , de petites parties  $CE, EE, EE, \&c.$  égales entr'elles, autant & de telle grandeur qu'on voudra; on menera par celui des points  $E$ , qui est le plus proche du centre  $C$ , la ligne  $EP$  parallèle à  $BA$ ; & on prendra sur le second diamètre  $Aa$  de part & d'autre du centre  $C$ , autant de petites parties  $CP, PP, PP, \&c.$  toutes égales à  $CP$ , qu'il y a de petites parties  $CE, EE, EE, \&c.$  Ayant tiré  $CD$  perpendiculaire & égale à  $CB$ , on menera par tous les points  $P, P, P, \&c.$  des parallèles  $MPM, MPM, MPM, \&c.$  au premier diamètre  $Bb$ , sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point  $P$ , des parties  $PM, PM$ , égales chacune à sa correspondante  $ED$ . Je dis que les deux lignes courbes qui passent par tous les points  $M$  ainsi trouvés, seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

FIG. 60.

Car nommant les données  $CA, i$ ;  $CB$  ou  $CD, c$ ; &

L ij

les indéterminées  $CP, x$ ;  $PM, y$ ; les triangles semblables  $CAB, CPE$ , donneront cette proportion  $CA(s). CB(c) :: CP(x). CE = \frac{cx}{s}$ . Et à cause du triangle  $ECD$  rectangle en  $C$ , (en imaginant chaque hypothenuse  $ED$  qu'on a omise de peur de confusion dans la figure) le quarré  $\overline{ED}^2$  ou  $\overline{PM}^2 (yy) = \overline{CE}^2 (\frac{c^2 x^2}{s^2})$

\* Art. 81.  $\phi$   $\rightarrow \overline{CD}^2 (cc)$ . La ligne  $PM$  fera donc \* une ordonnée  
118. au second diametre  $Aa$ , qui a pour conjugué le premier  $Bb$ ; & comme cette démonstration convient à toutes les lignes  $PM$ , puisque chaque  $CP$  est toujours à la correspondante  $CE$ , en la raison de  $CA$  à  $CB$ : il s'ensuit &c.

FIG. 61. Lorsque les diametres conjugués  $Aa, Bb$ , sont égaux  
\* Def. 16. entr'eux, c'est à dire \*, lorsque les Hyperboles qu'on demande sont équilateres; la construction devient beaucoup plus aisée. Car ayant mené  $CD$  perpendiculaire & égale à  $CA$ , & tiré par un point quelconque  $P$  du diametre  $Aa$ , une parallele  $MPM$  au premier diametre  $Bb$ ; il n'y aura qu'à prendre sur cette ligne de part & d'autre du point  $P$ , les parties  $PM, PM$ , égales chacune à  $PD$ , pour avoir deux points des Hyperboles opposées. Car à cause du triangle  $PCD$  rectangle en  $C$  (en imaginant chaque hypothenuse  $CD$ ) on aura toujours  $\overline{PD}^2$  ou  $\overline{PM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CD}^2$  ou  $\overline{CA}^2$ ; Et partant la ligne  $PM$  fera \* une ordonnée au second diametre  $Aa$ , qui a pour conjugué le premier  $Bb$  qui lui est égal.

#### DEFINITION.

17.

FIG. 62. Soient deux Hyperboles opposées  $AM, am$ , qui aient pour premier axe la ligne  $Aa$ , & pour second axe la ligne  $Bb$ ; & soient deux autres Hyperboles opposées  $BS, bs$ , qui aient au contraire pour premier axe la ligne  $Bb$ , & pour second axe la ligne  $Aa$ : ces deux nouvelles Hyperboles  $BS, bs$ , sont appellées *Conjuguées*



aux deux premières  $AM, am$ ; & les quatre ensemble sont appellées Hyperboles conjuguées.

## COROLLAIRE.

132. Il est clair que les lignes  $Ba, Ab$ , sont parallèles; puisque les droites  $Aa, Bb$ , terminées par ces lignes, s'entrecoupent\* en deux également au point  $C$ . D'où il suit, selon la définition 11<sup>e</sup>. que l'Hyperbole  $BS$  conjuguée à  $AM$ , a pour l'une de ses asymptotes la ligne  $CG$  asymptote de l'Hyperbole  $AM$ ; & pour l'autre, la ligne  $Cg$  autre asymptote de l'Hyperbole  $AM$  indéfiniment prolongée du côté de  $C$ : puisque ces deux lignes passent par le centre  $C$ , & sont parallèles aux deux droites  $Ba, BA$ , menées de l'extrémité  $B$  du premier axe  $Bb$  de l'Hyperbole  $BS$  aux deux extrémités  $A, a$ , du second. Il est donc évident que les deux droites  $CG, Cg$ , parallèles à  $Ab, AB$ , indéfiniment prolongées de part & d'autre du centre  $C$ , sont non seulement les asymptotes des Hyperboles opposées  $AM, am$ ; mais aussi des deux autres  $BS, bs$ , qui leur sont conjuguées.

\*Def. 4 &  
5.

## PROPOSITION XVI.

## Theorème.

133. Si l'on mene par un point quelconque  $H$  d'une asymptote  $CG$  commune aux deux Hyperboles  $AM, BS$ , une parallèle  $MS$  à l'autre asymptote  $Cg$ ; je dis qu'elle rencontrera ces deux Hyperboles en des points  $M, S$ , qui seront également éloignés de part & d'autre du point  $H$ .

Car, 1<sup>o</sup>. La ligne  $MS$  rencontrera\* chacune des Hyperboles  $AM, BS$ , en un point, 2<sup>o</sup>. À cause de l'Hyperbole  $AM$ , le rectangle\*  $CH \times HM = CG \times GA$ ; & à cause de l'Hyperbole  $BS$ , le rectangle  $CH \times HS = CG \times GB$ . Donc, puisque\*  $GB = GA$ , il s'ensuit que  $CH \times HS = CH \times HM$ ; Et qu'ainsi  $HS = HM$ . Ce qu'il falloit démontrer.

\*Art. 104.

\*Art. 101.

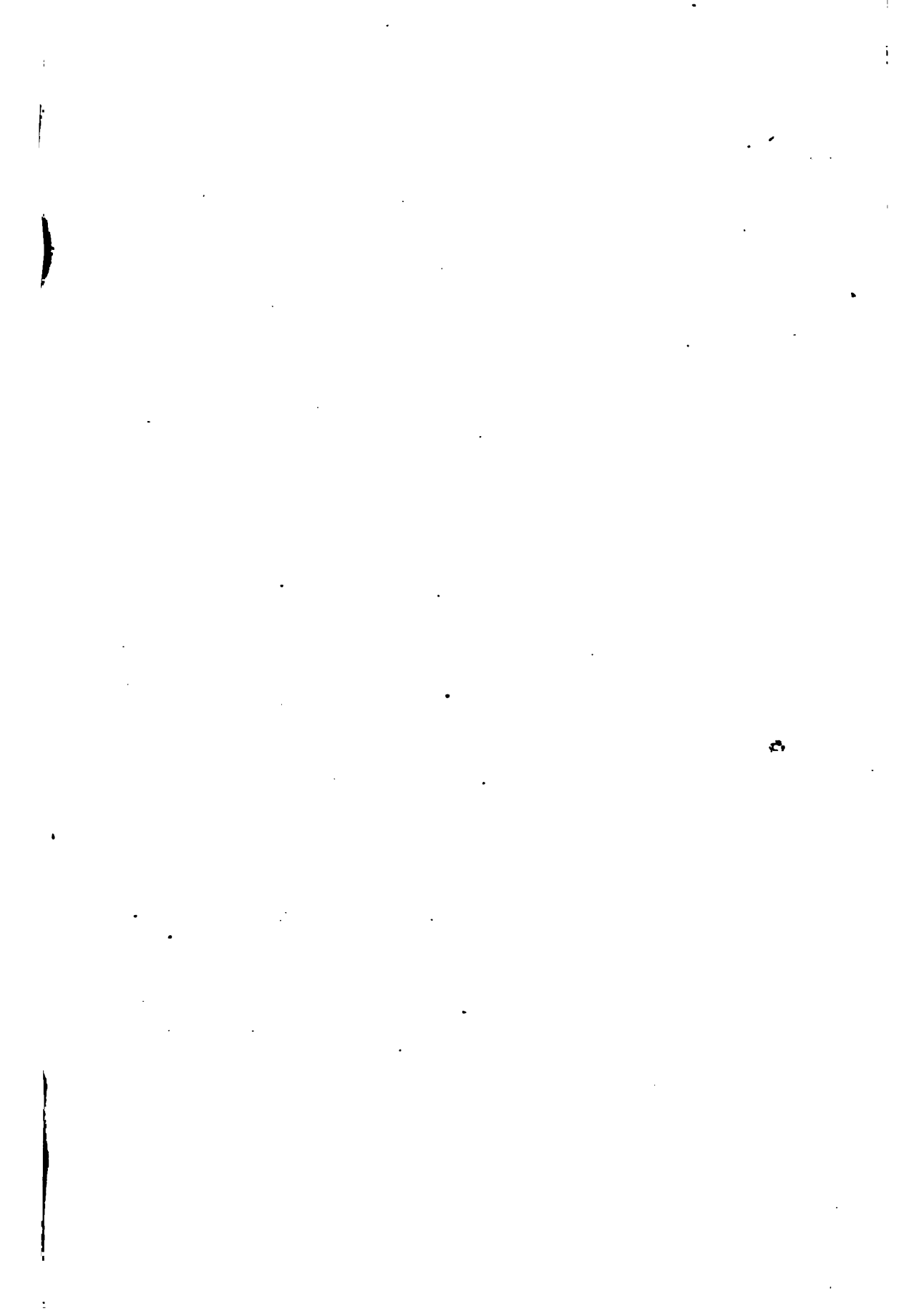
\*Art. 88.

## COROLLAIRE I.

134. *Art. 114.* Si l'on mène des points  $M, S$ , des deux Hyperboles  $AM, BS$ , les diamètres  $MCm, SCs$ , terminés par les deux autres Hyperboles  $am, bs$ ; il est clair \* que le diamètre  $Ss$  sera le second diamètre conjugué au premier  $Mm$  des deux Hyperboles opposées  $AM, am$ ; & réciproquement que le diamètre  $Mm$  sera le second diamètre conjugué au premier  $Ss$  des deux Hyperboles opposées  $BS, bs$ . D'où l'on voit que deux diamètres conjugués quelconques  $Mm, Ss$ , de deux Hyperboles opposées  $AM, am$ , sont aussi deux diamètres conjugués des deux autres Hyperboles  $BS, bs$ , qui leur sont conjuguées, avec cette différence que le premier diamètre  $Mm$  devient le second, & qu'au contraire le second  $Ss$  devient le premier.

## COROLLAIRE II.

135. DE-LA il est manifeste que les Hyperboles conjuguées  $BS, bs$ , aux deux  $AM, am$ , passent par les extrémités  $S, s$ , de tous les seconds diamètres  $SCs$  de ces Hyperboles: & réciproquement que les Hyperboles  $AM, am$ , passent par les extrémités  $M, m$ , de tous les seconds diamètres  $MCm$  des deux Hyperboles  $BS, bs$ , qui leur sont conjuguées.





# QUATRIÈME LIVRE.

## Des trois Sections Coniques.

### DÉFINITION.

ON entend par le terme general de *Section Conique*, chacune des trois lignes Courbes dont l'on vient de parler dans les Livres précédens, sçavoir, la *Parabole*, l'*Ellipse*, l'*Hyperbole* ou les *Hyperboles opposées*.

### PROPOSITION I.

#### Theorème.

136. SI par l'extrémité A d'un diamètre quelconque Aa d'une Ellipse, ou d'un premier diamètre Aa d'une Hyperbole, l'on mene une parallèle AG à ses ordonnées PM, qui soit égale à son paramètre; & qu'on tire de l'autre extrémité a, la droite aG, qui coupe en O une ordonnée quelconque PM prolongée s'il est nécessaire: je dis que le carré de l'ordonnée PM est égal au rectangle de AP par PO. FIG. 63. & 64.

Il faut prouver que  $PM^2 = AP \times PO$ .

Selon les articles 41 & 55. du second Livre, 81 & 118. du troisième, on aura  $Aa. AG :: AP \times Pa. \overline{PM}$ . Or à cause des triangles semblables  $aAG, aPO$ , il vient  $Aa. AG :: Pa. PO :: AP \times Pa. AP \times PO$ . Donc  $PM^2 = AP \times PO$ . Ce qu'il falloit démontrer.

### COROLLAIRE I.

137. DE-LA il est évident que le carré d'une ordonnée quelconque PM à un diamètre Aa, est toujours moindre dans l'Ellipse, & toujours plus grand dans l'Hyperbole, que le rectangle fait du paramètre AG.

par la partie  $AP$  de ce diamètre, prise entre son origine ou extrémité  $A$ , & la rencontre  $P$  de l'ordonnée ;  
 \* Art. 7. & au lieu que dans la Parabole \* ils sont égaux. Or c'est à  
 20. cause de cette propriété, que Apollonius, surnommé le  
 FIG. 65. Grand Geometre, a imposé aux Sections Coniques les  
 noms que nous avons marqués : car il a voulu donner  
 à entendre par celui de *Parabole*, la justesse ou exactitu-  
 de ; par celui d'*Ellipse*, le deffaut ou manquement ; &  
 par celui d'*Hyperbole*, l'excès qui se trouve dans la com-  
 paraïson des quarrés des ordonnées  $PM$ , avec les rec-  
 tangles correspondans  $AP \times AG$ .

## PROPOSITION II.

Theorème.

FIG. 66. & 138. DANS une Ellipse tout diamètre  $Aa$ , & dans les  
 67. Hyperboles opposées tout premier diamètre  $Aa$  est divisé en  
 deux également par le centre  $C$ , & ne rencontre la Section  
 qu'en deux points.

On a démontré cette Proposition dans les articles 50  
 du second Livre ; 96 & 103 du troisième.

## PROPOSITION III.

Theorème.

139. IL ne peut y avoir qu'une seule tangente  $LAL$  qui  
 passe par un point donné  $A$  sur une Section Conique.

Cette Proposition se trouve démontrée dans les arti-  
 cles 21 du Livre premier ; 56 du Livre second ; & 107 du  
 troisième. •

## PROPOSITION IV.

Theorème.

140. LES tangentes  $LAL$ ,  $lal$ , qui passent par les ex-  
 tremités  $A, a$ , d'un diamètre quelconque d'une Ellipse, ou de  
 deux

## DES TROIS SECTIONS CONIQUES. 39

*deux Hyperboles opposées ; sont paralleles entr'elles.*

Ceci a été démontré dans les articles 44 & 55 du Livre second, & 110 du Livre troisième.

### PROPOSITION V.

#### Theorème.

141. **UN** diametre quelconque étant donné dans l'Ellipse ou dans les Hyperboles opposées ; je dis que la position du diametre qui lui est conjugué, est déterminée, de maniere qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

Car 1°. Si la Section est une Ellipse, ou qu'étant les Hyperboles opposées le diametre donné  $Aa$  soit un premier diametre ; il est clair selon l'article 56 du Livre second, & la définition 13<sup>e</sup> du troisième Livre, que son conjugué  $Bb$  sera parallele à la tangente  $LAL$ , qui passe par l'une de ses extremités  $A$ . Donc \* &c.

\* Art. 139.

2°. Si la Section étant les deux Hyperboles opposées, le diametre donné  $Bb$  est un second diametre, la chose a été démontrée dans l'article 115 du troisième Livre.

#### COROLLAIRE.

142. **IL** est donc évident qu'une Section Conique étant donnée avec un de ses diametres, la position des ordonnées à ce diametre, sera déterminée de maniere que chacune n'en peut avoir qu'une seule, & qu'elles sont toutes paralleles entr'elles. Car elles doivent être paralleles dans la Parabole \* à la tangente qui passe par l'origine du diametre donné, & dans les autres \* Sections au diametre conjugué au diametre donné.

\* Art. 21.

\* Def. 12, II.

& 14, III.

### PROPOSITION VI.

#### Theorème.

143. **DANS** une Ellipse tout diametre  $Aa$ , & dans les Hyperboles opposées tout premier diametre  $Aa$  divisé  
M

la Section en des portions  $AM$ ,  $am$ , qui étant prises de part & d'autre de ce diamètre dans des positions contraires, sont parfaitement semblables & égales entr'elles.

- Car ayant pris sur le diamètre  $Aa$  (prolongé lorsqu'il s'agit des Hyperboles opposées,) de part & d'autre du centre  $C$  deux parties quelconques  $CP$ ,  $Cp$ , égales entr'elles; & mené de part & d'autre les ordonnées  $PM$ ,  $pm$ , il est clair que ces ordonnées sont \* égales entr'elles, & que les angles  $CPM$ ,  $Cpm$ , sont \* égaux. Si donc l'on conçoit que le plan  $Cpm$  séparé de celui qu'on voit ici, soit placé de l'autre côté du diamètre  $Aa$  dans une position contraire, en sorte que la droite  $Cp$  tombe sur  $CP$ , &  $pm$ , sur  $PM$ ; il est visible que le point  $a$  tombera \* sur le point  $A$ , & le point  $m$  sur le point  $M$ . Et comme cela arrivera toujours de quelque grandeur qu'on puisse prendre les parties  $CP$ ,  $Cp$ ; il s'ensuit que tous les points  $m$  de la portion  $am$ , tomberont exactement sur tous les points  $M$  de la portion  $AM$ ; & qu'ainsi ces deux portions se confondront l'une avec l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.
- \* Art. 45.  
55. 85. &  
118.  
\* Art. 142.  
\* Art. 138.

## PROPOSITION VII.

### Theorème.

- FIG. 68. 69. 144. Si l'on mène par un point quelconque  $P$  d'un diamètre  $Aa$  d'une Section Conique (prolongé lorsque la Section étant une Hyperbole, c'est un premier diamètre) une parallèle  $MPM$  aux ordonnées à ce diamètre; je dis qu'elle rencontrera la Section en deux points  $M$ ,  $m$ , également éloignés de part & d'autre du point  $P$ , & non en davantage: Et réciproquement que si une ligne  $MM$  terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diamètre  $Aa$  en un point  $P$ , autre que le centre, elle sera parallèle aux ordonnées à ce diamètre.

Ceci a été démontré dans les articles 9, 11 & 10 du Livre premier; 43, 45 & 55 du Livre second; 83, 85 & 118 du Livre troisième.



## COROLLAIRE I.

145. **D**E-LA il est manifeste que si une ligne quelconque  $MM$  terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diamètre  $Aa$  en un point  $P$  autre que le centre; toutes les parallèles à cette ligne terminées par la Section, le seront aussi.

## PROPOSITION VIII.

## Problème.

146. **U**NE Section Conique étant donnée, en trouver un diamètre.

Ayant mené deux droites  $MM$ ,  $NN$ , parallèles entr'elles, & terminées par la Section; on tirera par leurs points de milieu  $P$ ,  $Q$ , une ligne droite  $Aa$  qui sera un diamètre.

Car \* le diamètre qui passe par le point  $P$  milieu de \* *Art. 145.*  
 $MM$ , doit aussi passer par le point  $Q$  milieu de  $NN$ .

## COROLLAIRE I.

147. **S**i l'on mene en même sorte un autre diamètre quelconque  $Dd$ ; il est clair que la Section conique sera une parabole \* lorsque  $Dd$  est parallèle à  $Aa$ ; une Ellipse \* lorsque  $Dd$  rencontre  $Aa$  au dedans de la Section; & \* *Def. 7. I.*  
\* *Def. 9. II.* enfin une Hyperbole \* ou les Hyperboles opposées lorsque les diamètres  $Dd$ ,  $Aa$ , se rencontrent en un point  $C$  hors de la Section; & que dans ces deux derniers cas le point de rencontre  $C$  est le centre. Cela est une suite des définitions des diamètres de ces trois lignes courbes. \* *Def. 9. III.*

Lorsque l'Ellipse est donnée toute entière, il suffit pour avoir le centre de mener un diamètre  $Aa$ ; car sa grandeur étant déterminée par la rencontre de l'Ellipse, il n'y a \* qu'à le diviser par le milieu en  $C$ . Il en est de même \* *Art. 50.*  
lorsque \* les Hyperboles opposées sont données. \* *Art. 96.*

COROLLAIRE II.

148. **D**E-LA il suit qu'une Séction Conique étant donnée, avec un point  $O$  sur le même plan, on peut toujours mener un diamètre  $Dd$  qui passe par ce point. Car il ne faut dans la Parabole que mener par le point donné,  $O$  une parallèle  $Dd$  à un diamètre quelconque  $Aa$ ; & dans l'Ellipse, ou dans l'Hyperbole, ou dans les Hyperboles opposées, une ligne droite  $Dd$  qui passe par le point donné  $O$ , & par le centre  $C$  que l'on aura trouvé par le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

149. **D**E-LA il est évident qu'une ligne droite  $MM$ , ne peut rencontrer une Séction Conique qu'en deux points  $M, M$ ; & jamais en davantage. Car si l'on mène par le point de milieu  $P$  de la ligne  $MM$  un diamètre  $Aa$ , il est clair selon l'article 144, qu'elle sera parallèle aux ordonnées à ce diamètre; d'où il suit selon le même article qu'elle ne peut rencontrer la Séction qu'aux deux points  $M, M$ .

Si la ligne droite passoit par le centre  $C$ ; on auroit recours à l'article 138. où cela a déjà été démontré.

COROLLAIRE IV.

150. **U**NE Ellipse ou une Hyperbole (*fig. 69. 70.*) étant donnée; trouver deux de ses diamètres conjugués  $Aa, Bb$ ; & de plus mener les asymptotes  $CG, Cg$ , lorsque c'est une Hyperbole.

Ayant trouvé un diamètre  $Aa$  par le moyen des deux parallèles  $MM, NN$ , & mené par le centre  $C$  une parallèle  $Bb$ , à ces deux lignes: il est clair\* que les diamètres  $Aa, Bb$ , seront conjugués; puisque les lignes  $MM, NN$ , étant coupées en deux également par le diamètre  $Aa$  aux points  $P, Q$ , seront\* ordonnées de part & d'autre à ce diamètre.

\*Def. 12, II.  
 & 14. III.

\*Art. 144.

Maintenant pour mener (*fig. 70.*) les asymptotes  $CG$ ,  $Cg$ ; on fera  $AP \times Pa. PM :: CA. CB$  ou  $Cb$ . ou (ce qui est la même chose) comme la moyenne proportionnelle entre  $AP$ ,  $Pa$ , est à  $PM$ , de même  $CA$  est à  $CB$  ou  $Cb$ . Et ayant tiré les droites  $AB$ ,  $Ab$ , on leur mènera par le centre  $C$  les parallèles indéfinies  $Cg$ ,  $CG$ , qui seront les asymptotes cherchées. Car il est clair que  $Bb$  sera \* la grandeur du second diamètre conjugué au premier  $Aa$ ; & le reste est évident selon les définitions 13 & 14 du troisième Livre.

\* Art. 81. & 118.

## PROPOSITION IX.

## Problème.

151. **U**NE Section Conique étant donnée, avec un de ses diamètres  $Aa$ ; trouver la position des ordonnées  $PM$  à ce diamètre.

Ayant mené deux parallèles au diamètre donné  $Aa$  qui en soient également éloignées de part & d'autre, & qui rencontrent la Section en des points  $M$ ,  $M$ ; je dis que la ligne  $MM$  qui coupe le diamètre donné au point  $P$ , est ordonnée de part & d'autre à ce diamètre, pourvu que le point  $P$  ne tombe point sur le centre.

Fig. 68. 69.  
70. 71.

Car par la construction la ligne  $MM$  sera coupée en deux également par le diamètre  $Aa$  au point  $P$ ; & par conséquent elle sera \* ordonnée de part & d'autre à ce diamètre.

\* Art. 144.

On peut toujours par cette manière trouver la position d'une ordonnée  $PM$  à un diamètre donné  $Aa$ . Car 1°. Dans la Parabole & l'Hyperbole (*fig. 68. & 70.*) lorsque le diamètre donné  $Aa$  est un premier diamètre; il est clair qu'à quelque distance qu'on mene de part & d'autre les deux parallèles au diamètre  $Aa$ , elles rencontreront chacune la Section en un point  $M$ ; puisque \* la Section s'éloigne toujours de plus en plus à l'infini du diamètre  $Aa$ . 2°. Dans l'Ellipse (*fig. 69.*), & dans les Hyperboles opposées (*fig. 71.*) lorsque le diamètre donné

\* Art. 10. 10.  
84. & 118.

*Aa* est un second diamètre : il est clair qu'on peut toujours mener deux parallèles de part & d'autre du diamètre *Aa*, qui coupent la Section chacune en un point *M*, en sorte que la ligne *MM* rencontre le diamètre donné *Aa* en un point *P* autre que le centre ; puisque dans l'Ellipse \* les ordonnées du diamètre *Aa* vont toujours en diminuant depuis le centre *C* jusqu'en *A*, & \* *Art. 44.* qu'au contraire dans les Hyperboles opposées \* elles vont toujours en augmentant à mesure qu'elles s'éloignent du centre *C*.

\* *Art. 44.*

\* 55.

\* *Art. 84.*

118.

## COROLLAIRE I.

152. DÉ-LA on tire (*fig. 68, 69, 70.*) une nouvelle manière de mener une tangente par un point donné *A* sur une Section Conique donnée. Car \* ayant mené par ce point un diamètre *Aa*, & trouvé une double ordonnée \* *Art. 10, 20,* *MPM* à ce diamètre ; il est clair \* que si l'on mène par 44. 53. 84. le point *A* une parallèle à *MM*, elle sera tangente 118. & *Def.* en *A*.

9, I. 12, II. 7,

III.

## COROLLAIRE II.

153. DÉ-LA on voit encore comment une Ellipse ou les Hyperboles opposées (*fig. 69, 70, 71.*) étant données avec un de leurs diamètres quelconques *Aa* ; on peut trouver le diamètre *Bb* qui lui est conjugué. Car il n'y a qu'à mener par le centre *C* une parallèle *Bb* aux ordonnées à ce diamètre.

Ou bien ; soit *Bb* le diamètre donné, & qu'il faille trouver son conjugué *Aa*. Ayant tiré *MM* parallèle à *Bb* & terminée par la Section, on menera par son point de milieu *P*, & le milieu *C* de *Bb*, le diamètre cherché *Aa*.

## COROLLAIRE III.

154. UNE Hyperbole *MAM* (*fig. 70.*) étant donnée, avec un de ses seconds diamètres *Bb* de position ; en terminer la grandeur, & trouver en même temps la position de ses ordonnées.

## DES TROIS SECTIONS CONIQUES. 91

On cherchera le premier diamètre  $Aa$  conjugué au second  $Bb$ , par le moyen de la seconde manière du Corollaire précédent; & ayant fait  $AP \propto Pa. PM^2 :: CA. CB$  ou  $Cb$ . Il est clair \* que  $Bb$  fera la grandeur \* Art. 81. & du second diamètre  $Bb$ , & que ses ordonnées seront parallèles au diamètre  $Aa$ . 118.

### PROPOSITION X.

#### Problème.

155. D'UN point donné  $T$  hors une Section Conique donnée, mener deux tangentes  $TM, TM$ , à cette Section. FIG. 72. 73. 74.

#### POUR LA PARABOLE.

Ayant mené (fig. 72.) par le point donné  $T$  \* un diamètre qui rencontre la Parabole au point  $A$ , & pris la partie  $AP$  égale à  $AT$ ; on tirera par le point  $P$  \* une parallèle aux ordonnées qui rencontrera \* la Parabole en deux points  $M, M$ ; par lesquels & par le point donné  $T$  on tirera les droites  $TM, TM$ , qui seront \* les tangentes cherchées. \* Art. 148. \* Art. 152. \* Art. 144. \* Art. 22. & 23.

#### POUR L'ELLIPSE.

Ayant mené (fig. 73.) par le point donné  $T$  \* le diamètre  $Aa$ , & pris  $CP$  troisième proportionnelle à  $CT, CA$ ; on mènera par le point  $P$ , une parallèle aux ordonnées qui rencontrera \* l'Ellipse en deux points  $M, M$ ; par lesquels & par le point donné  $T$  on tirera les droites  $TM, TM$ , qui seront \* les tangentes cherchées. \* Art. 148. \* Art. 144. \* Art. 57. & 58.

#### POUR L'HYPÉRBOLÉ & LES HYPÉRBOLÉES OPPOSÉES.

Ayant mené (fig. 74.) par le point donné  $T$ , \* le diamètre  $Aa$ , dont on déterminera la grandeur \* s'il est un second diamètre; on prendra  $CP$  troisième proportion-

nelle à  $CT$ ,  $CA$  (du même côté du point donné  $T$ , par rapport au centre, lorsque ce point tombe dans l'un des angles faits par les asymptotes; & du côté opposé, lorsqu'il tombe dans l'un des angles à côté): & l'on mène par le point  $P$  une parallèle aux ordonnées qui rencontrera \* l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points  $M$ ,  $M$ ; par lesquels & par le point donné  $T$ , on tirera les droites  $TM$ ,  $TM$ , qui seront \* les tangentes cherchées.

Si le point donné tomboit sur le centre  $C$ , les deux tangentes seroient alors \* les asymptotes  $CG$ ,  $Cg$ ; & on les tireroit comme l'on a enseigné dans l'art. 150. Et enfin si le point donné tomboit sur une asymptote comme en  $S$ , on tireroit par le point  $H$  milieu de  $CS$ , une parallèle  $HM$  à l'autre asymptote  $CG$ , laquelle rencontreroit \* l'Hyperbole en un point  $M$ , par où & par le point donné  $S$ , on tireroit une droite  $SM$  qui seroit \* une des tangentes cherchées; & l'autre seroit l'asymptote même  $Cg$  sur laquelle se trouve le point donné  $S$ .

## COROLLAIRE I.

156. COMME la ligne  $MPM$  parallèle aux ordonnées rencontre toujours \* la Section en deux points  $M$ ,  $M$ , également éloignés de part & d'autre du point  $P$ , & non en davantage; il s'ensuit qu'on ne peut mener d'un point donné  $T$  hors une Section Conique que les deux tangentes  $TM$ ,  $TM$ . D'où il est évident que le diamètre qui passe par le point de rencontre  $T$  de deux tangentes, coupe par le milieu en  $P$  la ligne  $MM$  qui joint les points touchans; & réciproquement que le diamètre qui coupe par le milieu en  $P$  une ligne droite  $MM$  qui joint les points touchans de deux tangentes  $MT$ ,  $MT$ , passe par leur point de rencontre  $T$ .

COROL. II.

## COROLLAIRE II.

157. **T**OUTES les tangentes de la Parabole (*fig. 72.*) se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est nécessaire. Car si l'on joint deux points touchans quelconques  $M, M$ , par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en  $P$ , on prenne sur le diamètre qui passe par ce point, & qui rencontre la Parabole en  $A$ , la partie  $AT$  égale à  $AP$ ; il est clair que les deux tangentes  $MT, MT$ , qui passent par les points  $M, M$ , se rencontreront en ce point  $T$ .

## COROLLAIRE III.

158. **I**L est encore évident (*fig. 74.*) que toutes les tangentes d'une Hyperbole se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est nécessaire; & toujours au dedans de l'angle fait par les asymptotes. Car si l'on joint deux points touchans quelconques  $M, M$ , par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en  $P$ , on prenne sur le diamètre qui passe par ce point & qui rencontre l'Hyperbole en  $A$ , la partie  $CT$  troisième proportionnelle à  $CP, CA$ ; il est clair que les deux tangentes  $MT, MT$ , se rencontreront en ce point  $T$ , lequel sera toujours \* au dedans de l'angle fait par les \* *Art. 103.* asymptotes, puisque le demi-diamètre  $CA$  tombe au dedans de cet angle.

## COROLLAIRE IV.

159. **T**OUTES les tangentes d'une Ellipse ou des Hyperboles opposées (*fig. 73. 74.*) se rencontrent deux à deux, lorsque la ligne qui joint les deux points touchans ne passe point par le centre; sçavoir, celles de l'Ellipse du même côté du centre par rapport à cette ligne, & celles des Hyperboles opposées de l'autre côté. Cela se prouve par le moyen de la Proposition cy-dessus,

comme l'on vient de faire voir dans les deux Corollaires précédens.

## PROPOSITION XL

### Problème.

160. *UNE SECTION Conique étant donnée, en trouver un diamètre qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à un angle donné.*

### POUR LA PARABOLE.

\* Art. 146. Ayant trouvé \* un de ses diamètres  $AP$ , on menera  
Fig. 75. 76. par son origine  $A$ , la ligne  $AN$ , qui fasse avec  $AP$  de part ou d'autre l'angle  $PAN$  égal à l'angle donné, & qui rencontre la Parabole au point  $N$ . Ayant divisé  $AN$  par le milieu en  $O$ , & tiré  $OM$  parallèle à  $AP$ ; je dis que la ligne  $MO$  est le diamètre qu'on cherche.

Car 1°. Tous les diamètres d'une Parabole devant être parallèles entr'eux, selon la définition septième du premier Livre; il s'ensuit que  $MO$  sera un diamètre; puisque  $AP$  en est un,

2°. La ligne  $AN$  terminée par la Parabole étant coupée en deux parties égales par le diamètre  $MO$ , elle lui sera \* ordonnée de part & d'autre.  
\* Art. 144

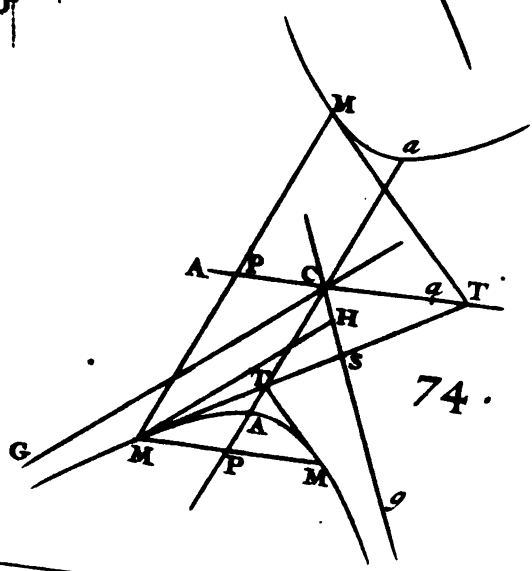
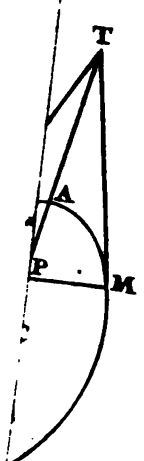
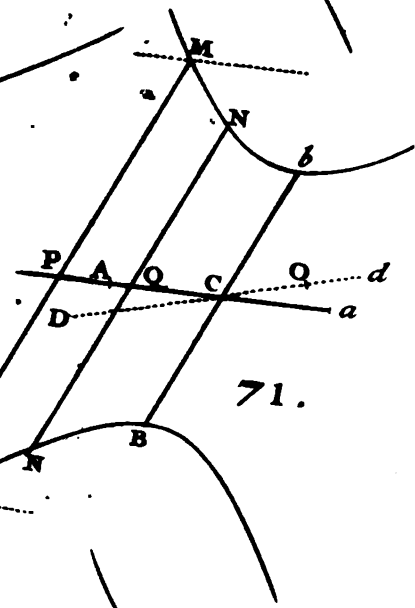
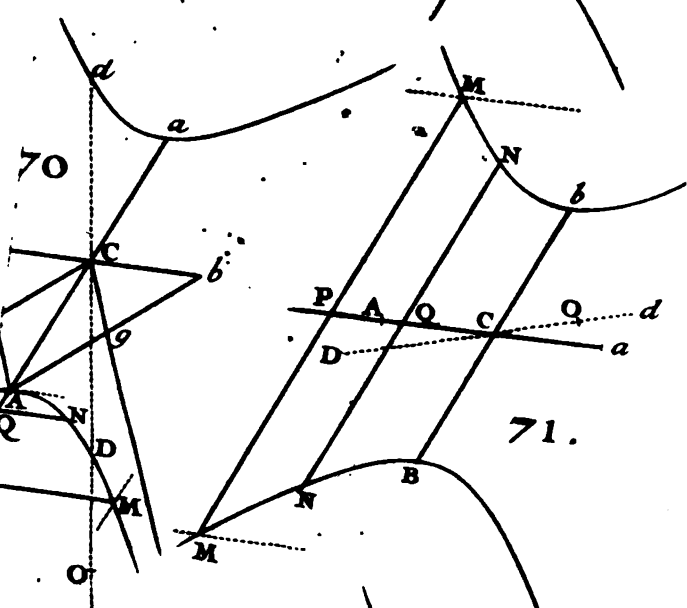
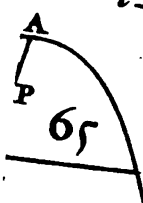
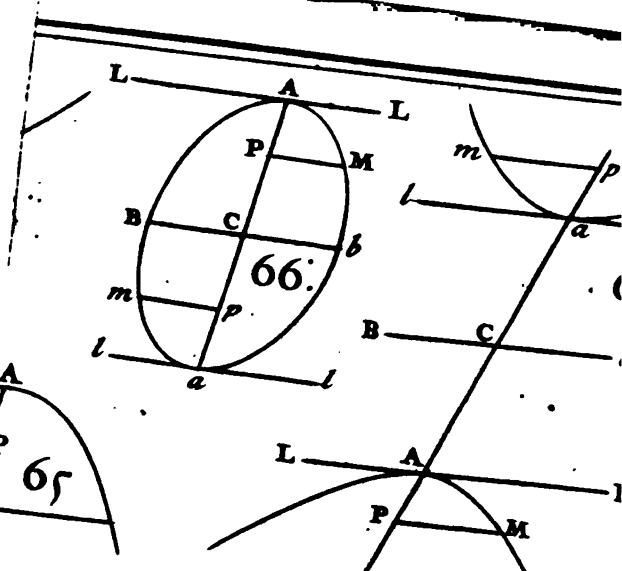
3°. A cause des parallèles  $MO$ ,  $AP$ , l'angle  $MOA$  que fait le diamètre  $MO$  avec son ordonnée  $OA$ , sera égal à l'angle  $PAN$  qui a été fait égal à l'angle donné. Donc &c.

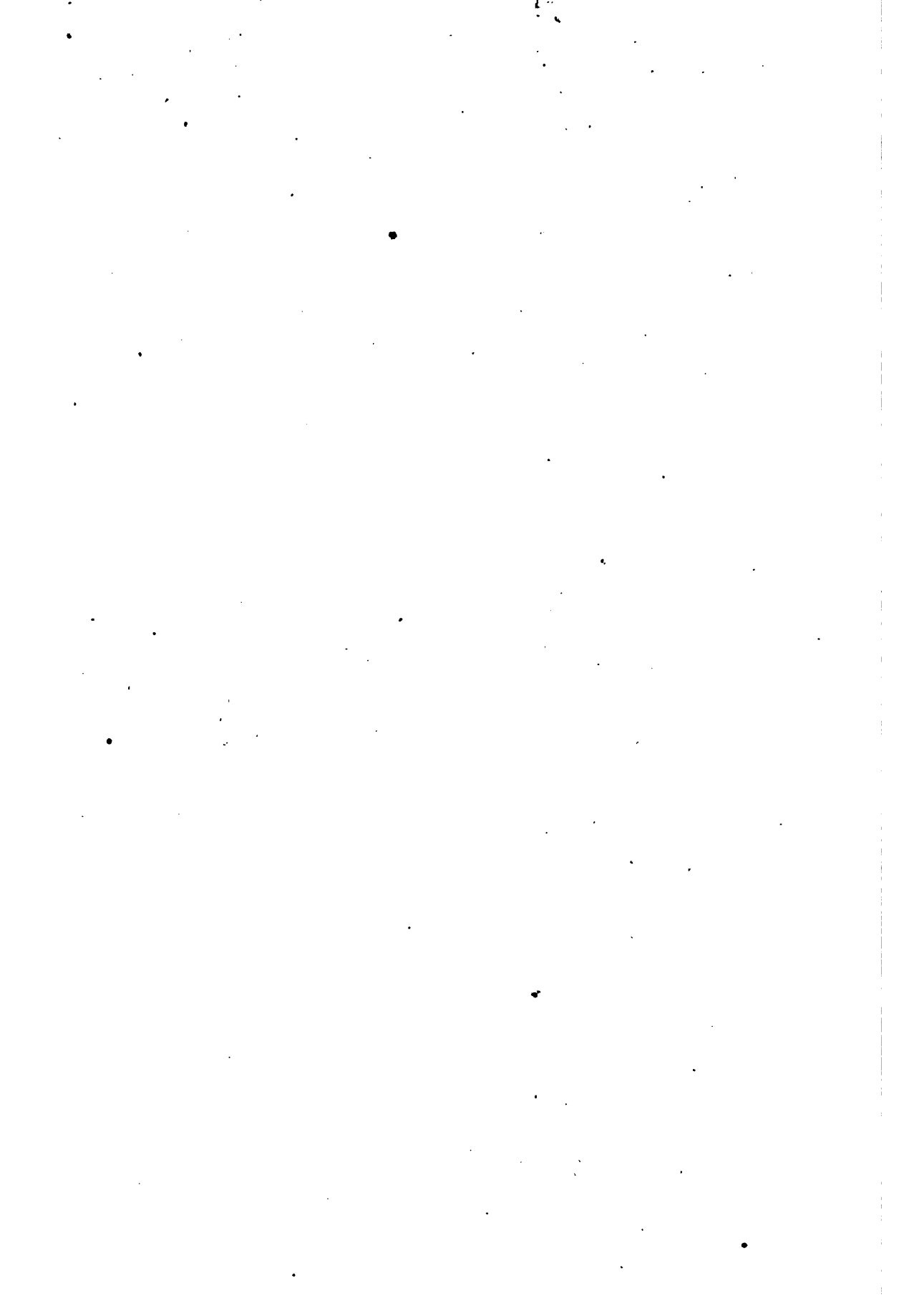
Si l'angle donné est droit, il est manifeste que le diamètre  $MO$  qu'on trouvera par cette methode sera \* l'axe de Parabole.  
\* Art. 23.

### POUR LES AUTRES SECTIONS.

\* Art. 146. Ayant trouvé \* un de leurs diamètres  $Aa$ , & décrit sur ce diamètre de part ou d'autre un arc de cercle  $ANa$   
Fig. 77. 78. capable de l'angle donné ou de son complément à deux  
79. 80. droits; on menera du point  $N$  où il rencontre la Sec-







## DES TROIS SECTIONS CONIQUES.

tion, aux deux extrémités  $A, a$ , du diamètre  $Aa$ , les lignes  $NA, Na$ ; par les milieux desquelles  $O, Q$ , & par le centre  $C$ , on tirera deux diamètres  $Mm, Ss$ . Je dis que chacun de ses diamètres fera de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à l'angle donné.

Car la ligne  $AN$  terminée par la Section, étant coupée en deux également au point  $O$  par le diamètre  $Mm$ , elle sera \* ordonnée de part & d'autre à ce diamètre. \* Art. 144. Or le diamètre  $Mm$  est parallèle à la ligne  $Na$ , puisqu'il divise par le milieu aux points  $C, O$ , les lignes  $Aa, AN$ ; & partant l'angle  $MOA$  que fait le diamètre  $Mm$  avec son ordonnée  $AO$ , sera égal à l'angle  $aNA$ , qui par la construction est égal à l'angle donné, ou à son complément à deux droits. On prouvera de même que le diamètre  $Ss$  fait avec son ordonnée  $QN$  un angle égal à l'angle donné, ou à son complément à deux droits. Donc &c.

Il est visible 1°. Que le diamètre  $Ss$  est \* conjugué au \* Def. 12, II. diamètre  $Mm$ ; puisqu'il est parallèle à son ordonnée & 14, III.  $ON$ . 2°. Que les diamètres conjugués  $Mm, Ss$ , deviennent \* les deux axes, lorsque l'angle donné est droit. \* Art. 38, & 128.

## PROPOSITION XII.

### Problème.

161. **U**N diamètre d'une Section Conique étant donné, avec son paramètre, & la position de ses ordonnées, & sachant de plus si c'est un premier ou second diamètre lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole; décrire la Section par une méthode uniforme pour toutes les trois.

### PREMIERE MANIERE.

*Pour la Parabole.* Ayant trouvé \* l'axe  $AP$ , son ori- \* Art. 27. gine  $A$ , & son paramètre  $AG$  que l'on prendra sur l'axe prolongé du côté de son origine; on menera par le point  $G$  une ligne droite indéfinie  $DD$  perpendiculaire à  $PG$ . FIG. 81.

N ij

On fera mouvoir ensuite une ligne droite indéfinie  $DM$  le long de  $GD$  toujours parallèlement à  $AG$ , en entraînant par son extrémité  $D$  le côté  $DA$  de l'angle droit  $DAM$ , mobile sur son sommet  $A$  autour de l'origine  $A$  de l'axe  $AP$ . Je dis que l'intersection continuelle  $M$  de la ligne  $DM$  & du côté  $AM$ , décrira dans ce mouvement la Parabole qu'on demande.

Car menant  $MP$  perpendiculaire à l'axe, les triangles rectangles  $AGD$ ,  $MPA$ , seront semblables; puisque chacun des angles  $GAD$ ,  $PMA$ , étant joint à l'angle  $PAM$ , vaut un droit. On aura donc  $AG.GD$  ou  $PM :: PM.AP$ . D'où il suit que  $\overline{PM} = GA \times AP$ ; & qu'ainsi  $PM$  est une \* ordonnée à l'axe  $AP$ .

\* Art. 7.

On a déjà donné cette construction dans le Livre premier article 29, d'une manière qui convient à tous les diamètres: On ne la repète ici, & on ne la restreint à l'axe, que pour en faire voir la liaison & le rapport qu'elle a avec celle qu'on va donner pour les autres Sections.

*Pour les autres Sections.* Ayant trouvé entre le diamètre donné & son paramètre une moyenne proportionnelle, & l'ayant placée en sorte qu'elle soit parallèle aux ordonnées, & coupée en deux également par le centre; il est clair \* qu'on aura deux diamètres conjugués; par le moyen desquels on cherchera \* les deux axes, & ensuite le paramètre de celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse, & du premier dans l'Hyperbole. Cela fait.

\* Def. 13. II.

& 15. III.

\* Art. 64.

& 128.

Fig. 82. 83.

On prolongera dans l'Ellipse, & on coupera dans l'Hyperbole l'axe  $Aa$  en  $G$ ; en sorte que  $aG$  soit à  $GA$ , comme l'axe  $Aa$  est à son paramètre. Ayant tiré par le point  $G$  une perpendiculaire indéfinie  $DD$  à l'axe  $Aa$ , on fera mouvoir le point  $D$  le long de cette ligne, en entraînant avec lui la ligne droite  $Da$  mobile autour de l'extrémité  $a$  de l'axe  $Aa$ , & le côté  $DA$  de l'angle droit  $DAM$  mobile sur son sommet  $A$  autour de l'autre extrémité  $A$  de l'axe  $Aa$ . Je dis que l'intersection

DES TROIS SECTIONS CONIQUES. 101  
 continue  $M$  des lignes  $AM$ ,  $aD$ , décrira dans ce mouvement la Section requise.

Car menant  $MP$  perpendiculaire sur l'axe  $Aa$ , les triangles semblables  $aPM$ ,  $aGD$ , donnent  $aP. PM :: aG. GD$ . Or les triangles rectangles  $AGD$ ,  $MPA$ , sont semblables; puisque chacun des angles  $GAD$ ,  $PMA$ ; étant joint à l'angle  $PAM$ , vaut un droit; Et partant  $AP. PM :: GD. GA$ . Si donc l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premières raisons, par ceux de ces deux dernières; on aura  $aP \times PA. PM :: aG \times GD. GD \times GA :: aG. GA$ , c'est à dire, comme l'axe  $Aa$  est à son parametre. Donc  
 \* &c.

\* Art. 41. 8.

Il est à remarquer que plus le point  $D$  s'éloigne du point  $G$  sur la ligne  $DD$ ; plus l'angle  $PAM$  augmente, & plus au contraire l'angle  $PAM$  diminue; de sorte que les lignes  $aM$ ,  $AM$ , deviennent paralleles dans l'Hyperbole, & se coupent ensuite de l'autre côté de la ligne  $DD$ , où elles décrivent par leur intersection continue l'Hyperbole opposée.

Si l'on conçoit dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole, que le point  $a$  s'éloigne à l'infini du point  $A$ , ou (ce qui est la même chose) que l'axe  $Aa$  devienne infiniment grand; les lignes  $GA$ ,  $Da$ , qui ne se rencontrent que dans l'infini, peuvent être regardées comme paralleles: ainsi cette dernière construction retombe dans le cas de la précédente. C'est pourquoi l'Ellipse ou l'Hyperbole deviendrait alors une Parabole qui auroit pour parametre la ligne  $AG$ ; Et par conséquent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipse ou une Hyperbole dont l'axe est infini: sçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse.

## SECONDE MANIERE.

Pour la Parabole. Soit un triangle isoscèle  $HAL$ , dont l'un des côtés  $AH$  soit situé sur le diametre donné  $AP$  prolongé indéfiniment de part & d'autre de son

FIG. 84

origine  $A$ , & l'autre côté  $AL$  sur la tangente indéfinie  $LAL$  qui passe par le point  $A$ . Soit conçue la base  $HL$  se mouvoir toujours parallèlement à elle-même en entraînant par l'une de ses extrémités  $L$  la ligne indéfinie  $LM$  parallèle à  $AP$ , & par l'autre extrémité  $H$  la ligne  $HF$  parallèle à  $AL$  & égale au paramètre donné du diamètre  $AP$ , laquelle entraîne aussi par son extrémité  $F$  la droite  $FA$  mobile autour du point fixe  $A$ . Je dis que l'intersection continuelle  $M$  des deux droites  $FA$ ,  $LM$ , décrit pendant que la ligne  $HL$  se meut dans l'angle  $HAL$  & son opposé ou sommet, la Parabole  $MAM$  qu'on demande.

Car menant l'ordonnée  $MP$  au diamètre  $AP$ , les triangles semblables  $AHF$ ,  $APM$ , donnent  $\frac{AH}{AL}$  ou  $\frac{PM}{AP}$ .  $HF :: AP. PM$ , & partant  $\overline{PM} =$

\* Art. 7. &  $AP \times HF$ . Donc \* &c.

20.

On doit observer que le point  $H$  doit tomber au delà de l'origine  $A$  du diamètre  $AP$ ; lorsque les points  $F$ ,  $L$ , tombent de part & d'autre de ce diamètre.

FIG. 85. 86. Pour les autres Sections. La construction est la même que pour la Parabole, à l'exception que la ligne  $LM$  doit tourner autour de l'autre extrémité  $a$  du diamètre donné  $Aa$ ; au lieu que dans la Parabole elle lui est parallèle. On suppose dans l'Hyperbole que le diamètre donné est un premier diamètre, car si c'étoit un second, on trouveroit selon l'article 115 du Livre troisième, le premier qui lui est conjugué & son paramètre.

Car menant  $MP$  ordonnée au diamètre  $Aa$ , les triangles semblables  $aPM$ ,  $aAL$ , &  $APM$ ,  $AHF$ , donnent  $aP. PM :: aA. AL$  ou  $aH$ . Et  $AP. PM :: AH. HF$ . Et partant, si l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premières raisons par ceux des deux secondes, on aura  $aP \times PA. \overline{PM} :: aA \times AH$ .

\* Art. 41. 55.

81. & 118.

$AH \times HF :: aA. HF$ . Donc \* &c.

Il faut observer que les points  $H$ ,  $a$ , doivent tomber de part & d'autre du point  $A$  dans l'Ellipse, & du même côté dans l'Hyperbole, lorsque les points  $F$ ,  $L$ , tom-

COROLLAIRE I.

162. DE-LA on voit comment un diamètre  $Aa$  étant donné avec une de ses ordonnées  $PM$ ; on peut trouver son paramètre  $HF$ . Car 1°. Dans la Parabole on prendra sur le diamètre  $AP$  la partie  $AH$  égale à  $PM$ ; & ayant tiré la ligne  $HF$  parallèle à  $PM$ , & terminé en  $F$  par la ligne  $AM$  tirée de l'origine  $A$  du diamètre par l'extrémité  $M$  de l'ordonnée, il est clair que cette ligne  $HF$  sera le paramètre du diamètre  $AP$ . Fig. 84.

2°. Dans les autres Sections, on menera par l'une des extrémités  $a$  du diamètre donné  $Aa$  la ligne  $aM$  qui rencontre la tangente  $AL$ , qui passe par l'autre extrémité  $A$ , au point  $L$ ; & ayant pris sur le diamètre  $Aa$  la partie  $AH$  égale à  $AL$ , on tirera  $HF$  parallèle à  $PM$ , laquelle rencontrant en  $F$  la ligne  $AM$ , sera le paramètre du diamètre  $Aa$ . Fig. 85. 86.

COROLLAIRE II.

163. ON tire de la seconde manière qu'on vient d'expliquer, une méthode uniforme & très-exacte dans la pratique de décrire une Section Conique par plusieurs points. La voici dans l'Ellipse: & elle servira de Règle pour les autres Sections.

Ayant pris sur la tangente  $AL$ , qui passe par l'une des extrémités  $A$  du diamètre donné  $Aa$ , la partie  $AG$  égale à son paramètre, & mené une parallèle indéfinie  $GE$  à  $Aa$ ; on tirera librement par le point  $A$  autant de lignes droites  $AF$ ,  $AF$ , &c. qu'on voudra. Ayant pris sur la tangente indéfinie  $AL$ , les parties  $AL$ ,  $AL$ , &c. égales aux correspondantes  $GF$ ,  $GF$ , &c. & mené les droites  $aL$ ,  $aL$ , &c.; je dis que les intersections  $M$ ,  $M$ , &c. des droites correspondantes  $FA$ ,  $La$ ,  $FA$ ,  $La$ , &c. seront des points de l'Ellipse qui a pour diamètre la ligne  $Aa$ , pour tangente la ligne  $AL$ , & pour paramètre du Fig. 87.

\* *Hyp.* diametre  $Aa$  la ligne  $AG$ . Cela est visible en menant  $FH$  parallèle à  $AG$ , & tirant la ligne  $HL$  par le point  $L$  correspondant au point  $F$ . Car le triangle  $HAL$  sera isoscèle, puisque \*  $AL$  est égale à  $GF$  ou  $AH$ , &  $HF$  sera égale au parametre du diametre  $Aa$ : c'est pourquoi cette construction retombe dans celle de la seconde des deux manières précédentes.

Comme les lignes  $GF, AL$ , deviennent fort grandes, lorsqu'il s'agit de trouver des points  $M$  qui soient proches du point  $a$ ; on pourra se servir, pour trouver ces points, de la tangente  $al$  qui passe par l'autre extrémité  $a$  du diametre  $Aa$ , & de la ligne  $gf$  parallèle à  $Aa$ , comme l'on voit dans cette figure.

\* *Art. 43.* Si l'on mene les ordonnées  $MP, MP$ , &c. parallèles à la tangente  $AL$ , & qu'on les prolonge de l'autre côté du diametre  $Aa$  en  $M, M$ , &c, en sorte qu'elles soient coupées chacune en deux également par ce diametre; il est clair \* que ces nouveaux points  $M, M$ , &c, seront encore à la même Ellipse.

On pourroit se servir d'une même ouverture de compas  $GF$  ou  $AL$  pour marquer sur les lignes  $GF, AL$ , autant de points  $F, F$ , &c,  $L, L$ , &c, qu'on voudra; car par ce moyen toutes ces petites parties étant égales entr'elles, chaque  $GF$  seroit égale à la correspondante  $AL$ ; ce qui est le fondement de la démonstration.

## PROPOSITION XIII.

### Theorème.

*FIG. 88. 89.* 164. S'IL y a deux droites  $MN, AR$ , terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point  $P$ , & qui soient parallèles à deux droites données de position; je dis que le rectangle  $MP \times PN$  sera toujours au rectangle  $AP \times PR$  en raison donnée, en quelque endroit de la Section que puissent tomber les droites  $MN, AR$ .

POUR







## POUR LA PARABOLE.

Soient (fig. 88.) les tangentes  $CB, EB$ , qui se rencontrent au point  $B$ , parallèles aux droites  $MN, AR$ :

Dis que  $MP \times PN. AP \times PR :: CB^2. EB^2$ .

Car ayant mené \* par le point  $G$  milieu de  $MN$  le \* Art. 148.  
diamètre  $CG$ , & tiré par son origine  $C$  la parallèle  $CB$   
à  $MN$ ; il est clair \* qu'elle sera tangente en  $C$ . On mè- \* Art. 10. &  
nera de la même sorte la tangente  $EB$  parallèle à  $AR$ , 21.  
que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le dia-  
mètre  $CG$  au point  $K$ ; & tirant par le point touchant  $E$   
l'ordonnée  $EL$ , on aura \*  $KC = CL$ ; & par consé- \* Art. 22. &  
quent  $KB = BE$ . On tirera ensuite  $AD$  ordonnée, & 23.  
 $AF$  parallèle au diamètre  $CG$ , & on nommera les don-  
nées  $KB$  ou  $BE, m$ ;  $BC, n$ ;  $CK, e$ ; le paramètre  
 $CH$  du diamètre  $CG, p$ ; & les indéterminées  $AP, x$ ;  
 $PM, y$ ;  $AD, r$ ;  $CD, s$ .

Cela posé, les triangles semblables  $KBC, APF$ , donne-  
ront  $PF = \frac{nx}{m}$ ,  $AF$  ou  $DG = \frac{ex}{m}$ : Et par conséquent

$$CG = \frac{ex}{m} + s, GM \text{ ou } GN = y + \frac{nx}{m} + r, PN \text{ ou } GN$$

$$+ GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r; MP \times PN = yy + \frac{2nx}{m}y +$$

$$2ry, GM^2 = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nx}{m}x + \frac{2nr}{m}x + r^2$$

$$\text{Or } * CD(s). CG\left(\frac{ex}{m} + s\right) :: AD^2(rr). GM^2 = rr * \text{Art. 8. } \&$$

$$+ \frac{nr}{m}x = rr + \frac{ex}{m}x, \text{ puisque } AD^2(rr) = CD \times CH^{20}.$$

( $ps$ ). Et comparant ensemble ces deux valeurs de  $GM^2$ ,

$$\text{on formera l'équation } yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nx}{m}x +$$

$$+ \frac{2nr}{m}x - \frac{ex}{m}x = 0, \text{ qui convient également à tous les}$$

points de la Parabole, lorsque la ligne  $AR$  tombe au  
dessus du diamètre  $CG$ , & que le point d'intersection  $P$   
tombe entre les points  $A, R$ .

Maintenant si l'on fait dans cette équation  $y = 0$ ,  
on aura (en effaçant tous les termes où  $y$  se rencontre)

$\frac{nn}{mm}xx + \frac{2ny}{m}x - \frac{y^2}{m}x = e$ . D'où l'on tire  $x = \frac{emp}{nn} - \frac{2ny}{n}$   
 $= AR$ ; puisque  $PM(y)$  devenant nulle ou zero, il  
est clair que  $AP(x)$  devient  $AR$ . Donc  $AP \times PR$   
 $= \frac{emp}{nn}x - \frac{2ny}{n}x - xx$ ; & par conséquent  $MP \times PN$   
 $(yy + \frac{2nx}{m}y - 2xy)$ .  $AP \times PR (\frac{emp}{nn}x - \frac{2ny}{n}x - xx)$ .

$\therefore \overline{CB} (nn)$ .  $\overline{EB} (mm)$ , puisqu'en multipliant les ex-  
trêmes & les moyens, on retrouve l'équation précéden-  
te. Or comme les tangentes  $CB$ ,  $BE$  demeurent tou-  
jours les mêmes, en quelque endroit de la Parabole que  
tombent leurs parallèles  $MN$ ,  $AR$ ; il s'ensuit &c.

Il peut arriver différens cas, selon les différentes po-  
sitions des droites  $MN$ ,  $AR$ ; mais comme la démon-  
stration demeure toujours la même, & qu'il ne peut y  
avoir de changement que dans quelques lignes, ou dans  
quelques termes qui s'évanouissent, je ne m'arrêterai  
point à les expliquer en détail. On doit observer la mê-  
me chose dans les deux autres Sections.

#### POUR LES AUTRES SECTIONS.

Ayant mené (fig. 89. 90. 91.) les deux demi-diamè-  
tres  $CO$ ,  $CB$ , parallèles aux droites  $MN$ ,  $AR$ ; je  
dis que  $MP \times PN$ .  $AP \times PR :: \overline{CO}$ .  $\overline{CB}$ .

Soit mené le diamètre  $CG$  qui ait pour double or-  
donnée  $MN$ , sur lequel soient abaissées les droites  $BE$ ,  
 $AD$ , parallèles à  $MN$ ; & ayant tiré  $AF$  parallèle à  
 $CG$ , soient nommées les données  $CB$ ,  $m$ ;  $BE$ ,  $n$ ;  $CE$ ,  $e$ ;  
& le demi-diamètre  $CK$ ,  $r$ ; son demi-conjugué  $CO$ ,  $c$ ;  
& les interminées  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ;  $AD$ ,  $r$ ;  $CD$ ,  $s$ .

Cela posé, les triangles semblables  $CBE$ ,  $APF$ , don-  
neront  $PF = \frac{nx}{m}$ ,  $AF$  ou  $DG = \frac{ex}{m}$ . Par conséquent  
dans l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées (fig. 90.  
& 91.) on aura  $CG = \frac{ex}{m} \pm s$ ,  $GM$  ou  $GN = y$   
 $+ \frac{nx}{m} - r$ ,  $PN$  ou  $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} - 2r$ ;  $MP \times PN$

$$yy + \frac{2xx}{m}y - 2ry, GM^2 = yy + \frac{2xx}{m}y - 2ry + \frac{mm}{mm}xx \\ - \frac{2xy}{m}x + rr. \text{ Or } \overline{GD}^2 + \overline{CK}^2 (ss + tt). \overline{CG}^2 + \overline{CK}^2 \text{ * Art. 82. } \circ \\ \left( \frac{2xy}{mm} + \frac{2xy}{mm} + ss + tt \right) :: \overline{AD}^2 (rr). \overline{GM}^2 = rr \quad 118. \\ + \frac{2xyxx + 2xyxx}{mmmm} = rr + \frac{2xyxx + 2xyxx}{mmmm}, \text{ en mettant}$$

pour  $\frac{rr}{ss + tt}$  sa valeur  $\frac{cc}{ss}$ . Et comparant ensemble ces \* Art. 82.  $\circ$  118.

$$yy + \frac{2xx}{m}y - 2ry + \frac{mm}{mm}xx = \frac{2xyxx + 2xyxx}{mmmm} x = b, \text{ dans la,} \\ \text{quelle mettant à la place de } \frac{2xyxx + 2xyxx}{mmmm} \text{ sa valeur } \frac{cc}{ss} \text{ (il} \\ \text{faut imaginer l'Hyperbole conjuguée qui passe par l'ex-} \text{ * Art. 134.} \\ \text{trémité } B, \text{ lorsque } CB \text{ est la moitié d'un second diamètre)} \\ \text{tirée de ce que } \overline{CE}^2 + \overline{CK}^2 (cc + tt). \overline{EB}^2 (nn) :: \text{ * Art. 81. } \circ \\ \overline{CK}^2 (tt). \overline{CO}^2 (cc). \text{ on aura celle-ci } yy + \frac{2xx}{m}y - 2ry \quad 118.$$

$$+ \frac{cc}{mm}xx - \frac{2xyxx + 2xyxx}{mmmm}x = 0, \text{ qui convient à tous les} \\ \text{points de la Section, lorsque les points } A, R, \text{ tombent} \\ \text{de part \& d'autre du diamètre } CG, \text{ \& que le point d'in-} \\ \text{tersection } P \text{ tombe entre les points } A, R.$$

Maintenant si l'on fait dans cette équation  $y = 0$ , on

$$\text{aura (en effaçant tous les termes où } y \text{ se rencontre) } \frac{cc}{mm}xx \\ - \frac{2xyxx + 2xyxx}{mmmm}x = 0, \text{ d'où l'on tire } x = \frac{2xyxx + 2xyxx}{ccmm} \quad .22.0.7$$

$= AR$ ; puisque  $PM (y)$  devenant nulle ou zéro, il est

clair que  $AP (x)$  devient  $AR$ . Donc  $AP \times PR$

$$\left( \frac{2xyxx + 2xyxx}{ccmm}x - xx \right). MP \times PN \left( yy + \frac{2xx}{m}y - 2ry \right) \\ :: \overline{CB}^2 (mm). \overline{CO}^2 (cc). \text{ Car multipliant les extrêmes}$$

& les moyens de cette proportion, on retrouve l'équa-  
tion précédente. Or comme les demi-diamètres  $CO$ ,  
 $CB$ , demeurent toujours les mêmes en quelque endroit  
de la Section que tombent leurs parallèles  $MN$ ,  $AR$ ;  
il s'ensuit &c.

Je ne mets point ici en particulier le calcul pour l'Ellip-  
se, parce qu'il ne diffère de celui de l'Hyperbole qu'en  
quelques lignes. Oij

## COROLLAIRE I.

FIG. 92.

165. S'IL y a deux lignes droites  $MN$ ,  $AR$ , terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point  $P$ ; & qu'on mene par tout où l'on voudra deux autres droites  $FG$ ,  $BD$ , paralleles aux deux premières, & terminées aussi par la Section, lesquelles se rencontrent en un point  $Q$ : il est clair que  $MP \times PN$ .  $AP \times PR :: FQ \times QG$ .  $BQ \times QD$ . Car les deux droites  $AR$ ,  $BD$ , étant paralleles entr'elles, seront paralleles à la même droite  $CZ$  donnée de position; comme aussi les deux droites  $MN$ ,  $FG$ , à la même droite  $CX$  donnée pareillement de position.

## COROLLAIRE II.

166. S'IL y a deux paralleles  $AR$ ,  $BD$ , terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent aux points  $E$ ,  $Q$ , une ligne droite  $FG$  terminée par la même Section; je dis que  $FE \times EG$ .  $AE \times ER :: FQ \times QG$ .  $BQ \times QD$ . Car concevant dans le premier Corollaire que  $MN$  tombe sur  $FG$ , il est clair que les rectangles  $MP \times PN$ ,  $AP \times PR$ , deviennent  $FE \times EG$ ,  $AE \times ER$ .

## COROLLAIRE III. POUR LE CERCLE.

FIG. 93.

167. ON peut tirer de ce Theorème la propriété du cercle qui est si connue de tous les Geometres; sçavoir que si par un point quelconque  $P$  pris au dedans ou au dehors d'un cercle, on mene autant de lignes qu'on voudra  $AR$ ,  $MN$ ,  $HL$ , &c. terminées par la circonference, les rectangles  $AP \times PR$ ,  $MP \times PN$ ,  $HP \times PL$ , &c. seront tous égaux entr'eux. Car menant les demi-diametres  $CB$ ,  $CO$ ,  $CD$ , &c. paralleles à ces lignes, il est clair par le Theorème, que tous ces rectangles seront entr'eux, comme les quarrés de ces demi-diametres ou rayons, lesquels par la propriété essentielle du cercle sont tous égaux entr'eux.

## COROLLAIRE IV. POUR LA PARABOLE.

168. S'il y a une ligne droite  $MN$  terminée par une Parabole, & qu'on mene par un des points quelconques  $A$  de la Parabole un diamètre  $AF$  qui rencontre cette ligne au point  $F$ : je dis que le rectangle  $MF \times FN$  est égal au rectangle de  $AF$  par le paramètre  $CH$  du diamètre  $CG$ , qui passe par le milieu de  $MN$ .

Car concevant dans le Theorème que  $AP$  tombe sur  $AF$ , il est clair que la ligne  $PF$  ( $\frac{n}{m}x$ ) devient nulle ou zero, & qu'ainsi  $\frac{n}{m} = 0$ . C'est pourquoi effaçant dans l'équation à la Parabole  $yy - \frac{2nx}{m}y + 2ry - \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{r^2}{m}x = 0$ , tous les termes où  $\frac{n}{m}$  se rencontre, on en formera celle-ci  $yy - 2ry - \frac{r^2}{m}x = 0$ . Or  $AF = \frac{2r}{m}$ ,  $CH = p$ , &  $MF \times FN = yy - 2ry$ . Donc &c.

Ce n'est que pour faire voir la généralité du Theorème, que j'en déduis cette propriété; car on la peut démontrer plus aisément sans y avoir recours, en cette sorte.  $\overline{GM} = GC \times CH$ ,  $\overline{AD}$  ou  $\overline{GF} = DC \times CH$ , & partant  $\overline{GM} - \overline{GF}$  ou  $MF \times FN = GC - DC \times CH = AF \times CH$ .

## COROLLAIRE V. POUR LA PARABOLE.

169. DE-LÀ il est évident,

1°. Que s'il y a deux droites  $MN$ ,  $EL$ , terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles; & qu'on mene par deux points quelconques  $A$ ,  $B$ , de cette Parabole, deux diamètres  $AF$ ,  $BP$ , qui rencontrent ces lignes aux points  $F$ ,  $P$ : il est évident, dis-je, que  $MF \times FN. EP \times PL :: AF. BP$ . Car le diamètre  $CG$  qui passe par le milieu de  $MN$ , passe aussi par le milieu

de  $EL$ ; & par conséquent le rectangle  $EP \times PL = BP \times CH$ , de même que  $MF \times FN = AF \times CH$ .

2°. Que s'il y a une ligne droite  $MN$  terminée par une Parabole, & qui rencontre deux de ses diamètres  $AF, BK$ , aux points  $F, K$ ; on aura  $MF \times FN. MK \times KN :: AF. BK$ .

3°. Que s'il y a deux lignes droites  $MN, EL$ , terminées par une Parabole, & parallèles entr'elles, qui rencontrent un de ses diamètres quelconques  $BP$  aux points  $K, P$ ; on aura  $MK \times KN. EP \times PL :: BK. BP$ .

#### COROLLAIRE VI. POUR LA PARABOLE.

170. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole qui passe par trois points donnés  $A, M, N$ , & dont les diamètres  $AF, CG$ , soient parallèles à une ligne droite donnée de position; & démontrer qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

Car ayant mené une ligne  $MN$  qui joigne deux des points donnés  $M, N$ ; on tirera par le troisième  $A$  un diamètre  $AF$  parallèle à la ligne donnée de position, & qui rencontre la ligne  $MN$  au point  $F$ , & par le point de milieu  $G$  de  $MN$  une parallèle  $GC$  à  $AF$ . On fera ensuite  $MF \times FN. MG \times GN. \text{ou } \overline{GM}^2 :: AF. GC$ . Et ayant pris  $CH$  troisième proportionnelle à  $CG, GM$ ,

\* Art. 29. & 30. on décrira \* du paramètre  $CH$ , & du diamètre  $CG$  dont l'origine est en  $C$ , une Parabole dont les ordonnées soient parallèles à  $MN$ ; elle satisfera à la question.

\* Art. 7. & 20. Car 1°. Elle passera \* par les points  $M, N$ ; puisque par la construction  $CH \times CG = \overline{GM}^2$  ou  $\overline{GN}^2$ . 2°. Elle passera par le point  $A$ , puisque  $MG \times GN. MF \times FN :: CG. FA$ . 3°. Les diamètres  $AF, CG$ , seront parallèles à la droite donnée de position.

Comme la Parabole qui satisfait au Problème, a nécessairement pour diamètre la ligne  $CG$ , qui a pour origine le point  $C$ , & pour paramètre la ligne déterminée  $CH$ ; il s'ensuit qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.



## COROLLAIRE VII. POUR LA PARABOLE.

171. **S**IL y a deux droites  $AR$ ,  $MN$ , terminées Fig. 88.  
 par une Parabole, lesquelles se rencontrent en un point  
 $P$ ; & qu'ayant fait  $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}. \overline{PF}$ ,  
 on tire la ligne  $AF$ : je dis que cette ligne fera un dia-  
 metre. Car ayant mené les tangentes  $CB$ ,  $EB$ , paral-  
 leles aux droites  $MN$ ,  $AR$ , & par le point touchant  
 $C$  le diamètre  $CG$  qui rencontre  $EB$  prolongée en  $K$ ;  
 on aura  $\overline{EB}. \overline{BC} :: \overline{KB}. \overline{BC} :: AP \times PR. MP \times PN ::$   
 $\overline{AP}. \overline{PF}$ , & par conséquent  $KB. CB :: AP. PF$ .  
 Les triangles  $KBC$ ,  $APF$  seront donc semblables, &  
 leurs côtés  $AF$ ,  $KC$ , parallèles entr'eux: d'où il suit  
 que la ligne  $AF$  qui se trouve ainsi parallèle au diamètre  
 $CG$ , sera un diamètre; puisque dans la Parabole \* tous \* Def. 7. I.  
 les diamètres sont parallèles entr'eux.

## COROLLAIRE VIII. POUR LA PARABOLE.

172. **O**N tire du Corollaire précédent une manière  
 de décrire une Parabole qui passe par quatre points  
 donnés  $A$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $N$ .

Car ayant joint ces quatre points par deux droites  
 $AR$ ,  $MN$ , qui s'entrecoupent en un point  $P$ , & fait  
 $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}. \overline{PF}$ , on tirera la ligne  $AF$ ,  
 & on décrira \* une Parabole qui passe par les trois points \* Art. 170.  
 $A$ ,  $M$ ,  $N$ , & dont les diamètres soient parallèles à la  
 ligne  $AF$ . Elle sera celle qu'on demande; car selon le  
 Theorème la ligne  $AD$  doit rencontrer cette Parabole  
 en un point  $R$ , tel que  $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{EB}$   
 ou  $\overline{KB}. \overline{BC} :: \overline{AP}. \overline{PF}$ .

Si l'on eut pris le point  $F$  de l'autre côté du point  $P$ , Fig. 95.  
 on auroit décrit une autre Parabole qui auroit encore  
 passé par les quatre points donnés. Mais l'on doit remar-  
 quer que lorsqu'un de ces points  $F$  tombe sur l'un des

points donnés  $M$  ou  $N$ , il ne peut y avoir qu'une Parabole qui satisfasse ; & que lorsque tous les deux tombent sur les points  $M$ ,  $N$ , il n'y en peut avoir aucune ; puisqu'alors le diamètre  $AF$  de la Parabole passeroit par deux de ses points, ce que l'on a démontré \* être impossible.

## COROLLAIRE IX.

POUR L'HYPÉRBOLE OU LES HYPÉRBOLES OPPOSÉES.

FIG. 96, 97. 173. S'IL y a une ligne droite  $MN$  terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, laquelle rencontre une asymptote  $CB$  au point  $Q$ , & qui soit parallèle à une ligne donnée de position ; & qu'on tire par un point quelconque  $A$  de la Section une droite  $AP$  parallèle à cette asymptote, & qui rencontre au point  $P$  la ligne  $MN$  : je dis que le rectangle  $MP \times PN$  sera toujours au rectangle  $AP \times PQ$  en raison donnée, en quelque endroit de la Section que tombent les droites  $MN$ ,  $AP$ .

Car concevant dans le Théorème ( fig. 90. 91. ) que le demi-diamètre  $CB$  devienne une asymptote, il est clair \* qu'alors les trois côtés du triangle  $CBE$  deviennent chacun infini. C'est pourquoi menant ( fig. 96. 97. ) par l'extrémité  $K$  du diamètre  $LK$  qui passe par le milieu de  $MN$ , une parallèle  $KS$  à  $MN$ , qui rencontre l'asymptote  $CB$  en  $S$ , on formera un triangle  $CKS$  dont tous les côtés seront finis, & qui sera semblable au triangle  $CBE$  ; & partant on aura  $CK (t)$ .  $KS$  ou \*  $CO (c)$  ::  $CE (e)$ .  $EB (n)$ . Ce qui donne  $ce = nt$ . Si l'on met à la place de  $ce$  sa valeur  $nt$  dans l'équation à l'Hyperbole  $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nnx^2 - cce}{mmx}x - \frac{2nxt + 2ccs}{ms}x = 0$  que l'on a trouvée dans le Théorème, on en formera celle-ci  $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry - \frac{2nxt + 2nct}{ms}x = 0$  ou  $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry = \frac{2nxt + 2nct}{ms}x$ . Or en prolongeant  $AD$ , s'il est nécessaire,

cessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote  $CB$  en  $H$ , les triangles semblables  $CKS$ ,  $CDH$ , donneront  $CK(t) : KS(c) :: CD(s) : DH = \frac{cs}{t}$ . Et partant

$AH$  ou  $PQ = \frac{n \pm cs}{t}$ . On aura donc  $MP \times PN$

$(yy - \frac{2csy}{m} - 2ry) : 2AP \times PQ (\frac{2cy \pm 2cs}{t} x) :: EB(n)$ .

$CB(m) :: KS. CS$ . Puisqu'en multipliant les extrêmes

& les moyens on retrouve l'équation précédente. Or les

lignes  $KS$ ,  $CS$ , demeurent toujours les mêmes en

quelque endroit de la Section que tombent les droites

$MN$ ,  $AP$ ; parce que le diamètre  $LK$  qui passe par le

milieu de  $MN$ , passe aussi\* par le milieu de toutes les pa-

ralles à  $MN$  terminées par la Section, en quelque

endroit qu'elles se rencontrent. Donc &c.

On peut démontrer ce Corollaire immédiatement, *E10. 96,*

& sans avoir recours au Theorème, en cette sorte. Soient

les données  $CK=t$ ,  $KS$  ou  $CO=c$ ,  $CS=m$ , & les

indéterminées  $CD=s$ ,  $AD$  ou  $DI=r$ ,  $AP=x$ ,

$PM=y$ . Les triangles semblables  $CKS$ ,  $APF$ , don-

nent  $PF = \frac{cs}{m}$ ,  $AF$  ou  $DG = \frac{cs}{m}$ ; Et partant  $GM$  ou

$GN = y - \frac{cs}{m} - r$ ,  $CG = \frac{cs}{m} + s$ . Or à cause des trian-

gles semblables  $CKS$ ,  $CDH$ ,  $CGQ$ , on aura  $CK(t)$ ,

$KS(c) :: CD(s) : DH = \frac{cs}{t} :: CG(\frac{cs}{m} + s) : GQ$

$= \frac{cs}{m} + \frac{cs}{t}$ . Et partant  $MQ \times QN$  ou  $\overline{GQ}^2 - \overline{GM}^2$

$= \frac{2csy}{m} + \frac{cs^2}{t} - yy - \frac{2csy}{m} - 2ry + \frac{2cs^2}{m} - rr = AH \times HI$  \* *Art. 97.*

ou  $\overline{DH}^2 - \overline{DI}^2 = \frac{cs^2}{t} - rr$ ; d'où l'on tire (en effaçant de

part & d'autre  $\frac{cs^2}{t} - rr$ , & transposant d'une part tous

les termes où  $y$  se rencontre) cette équation  $yy - \frac{2csy}{m}$

$- 2ry = \frac{2cs^2}{m} - \frac{2csy}{m}$ , laquelle étant reduite en propor-

tion, donne  $MP \times PN (yy - \frac{2csy}{m} - 2ry) : 2AP \times PQ$

$\left(\frac{2csx}{r} + 2rx\right) :: KS(c). CS(m).$  Ce qu'il falloit démontrer.

La démonstration est la même pour les Hyperboles opposées à quelques signes près.

## COROLLAIRE X.

POUR L'HYPÉROLE OU LES HYPÉROLES OPPOSÉES.

Fig. 98.

174. Il suit du Corollaire précédent,

1°. Que s'il y a deux droites parallèles entr'elles  $MN$ ,  $HG$ , terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, & qui rencontrent une asymptote  $CS$  aux points  $Q, I$ ; & qu'on mene par deux points quelconques  $A, B$ , de la Section deux parallèles  $AP, BD$ , à l'asymptote  $CS$ , qui rencontrent ces lignes aux points  $P, D$ : les rectangles  $MP \times PN$ ,  $AP \times PQ$  seront entr'eux, comme les rectangles  $HD \times DG$ ,  $BD \times DI$ ; & partant on aura  $MP \times PN. HD \times DG :: AP \times PQ. BD \times DI$ .

2°. Que s'il y a deux droites parallèles entr'elles  $MN$ ,  $HG$ , terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, & qui rencontrent une asymptote  $CS$  aux points  $Q, I$ ; & qu'on mene par un point quelconque  $A$  de la Section, une parallèle  $AO$  à  $CS$ , qui rencontre ces lignes aux points  $P, O$ : on aura (en concevant dans le cas précédent que  $BD$  tombe sur  $AP$ ) cette proportion,  $MP \times PN. HO \times OG :: AP \times PQ. AO \times OI :: AP. AO$ . puisque  $PQ = OI$ .

3°. Que s'il y a une ligne droite  $HG$  terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, & qui rencontre une asymptote  $CS$  en  $I$ ; & qu'on mene par deux points quelconques de la Section  $A, B$ , deux parallèles  $AO, BD$ , à  $CS$ , qui rencontrent cette ligne aux points  $O, D$ : on aura  $HO \times OG. HD \times DG :: AO \times OI. BD \times DI$ . Cela est encore une suite du premier cas, en concevant que la ligne  $MN$  tombe sur  $HG$ .

## COROLLAIRE XI.

175. Si l'on conçoit qu'une ligne droite  $BD$  qui rencontre une Section Conique en deux points  $B, D$ , se meuve parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rase la Section, c'est à dire, jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente  $LS$ : il est clair que les deux points d'intersection  $B, D$ , se réunissent alors au point touchant  $L$ ; & qu'ainsi on peut considérer un point touchant comme deux points d'intersection qui tombent l'un sur l'autre. Or cela posé, on voit naître des Corollaires 1, 2, 5, 10, plusieurs cas dont voici les principaux.

FIG. 91.

1<sup>o</sup>. S'il y a deux tangentes  $KS, LS$ , qui se rencontrent en un point  $S$ , & deux autres droites  $MN, AR$ , parallèles à ces tangentes & terminées par la Section, lesquelles se rencontrent en un point  $P$ ; je dis que  $MP \times PN. AP \times PR :: KS^2. LS^2$ . Ceci a été démontré dans le Theorème à l'égard de la Parabole: mais pour les autres Sections, concevant dans le premier Corollaire que  $FG$  tombe sur la tangente  $KS$ , &  $BD$  sur  $LS$ ; il est clair que les deux points d'intersection  $F, G$ , se réunissent au point touchant  $K$ , comme aussi les deux  $B, D$ , au point touchant  $L$ ; & qu'ainsi les rectangles  $FQ \times QG, BQ \times QD$ , deviennent les quarrés  $KS^2. LS^2$ .

2<sup>o</sup>. Si dans une Ellipse ou dans des Hyperboles opposées, l'on mène une tangente  $TX$  parallèle à  $KS$ , & qui rencontre  $SL$  au point  $X$ , on prouvera comme dans le nombre précédent, que  $MP \times PN. AP \times PR :: TX^2. LX^2$ . D'où il suit que  $KS^2. LS^2 :: TX^2. LX^2$ . Et  $KS. SL :: TX. LX$ . C'est à dire, que si deux tangentes parallèles  $KS, TX$ , rencontrent une troisième tangente  $LS$  aux points  $S, X$ , on aura  $KS. LS :: TX. LX$ . ou  $KS. TX :: LS. LX$ .

3<sup>o</sup>. Si dans une Ellipse, dans une Hyperbole ou dans des Hyperboles opposées, il y a deux tangentes  $KS, LS$ , qui se rencontrent en un point  $S$ , & qu'on mène

aux points  $R, F$ : on aura (en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire dixième, que les deux Secantes  $MN, GH$ , tombent sur les deux tangentes  $KR, LF$ ) 1°. Le quarré  $KR^2 \cdot LF^2 :: AR \times RS. BF \times FV$ ,  
2°. Le quarré  $KR^2 \cdot LE^2 :: AR. AE$ .

## PROPOSITION XIV.

## Problème.

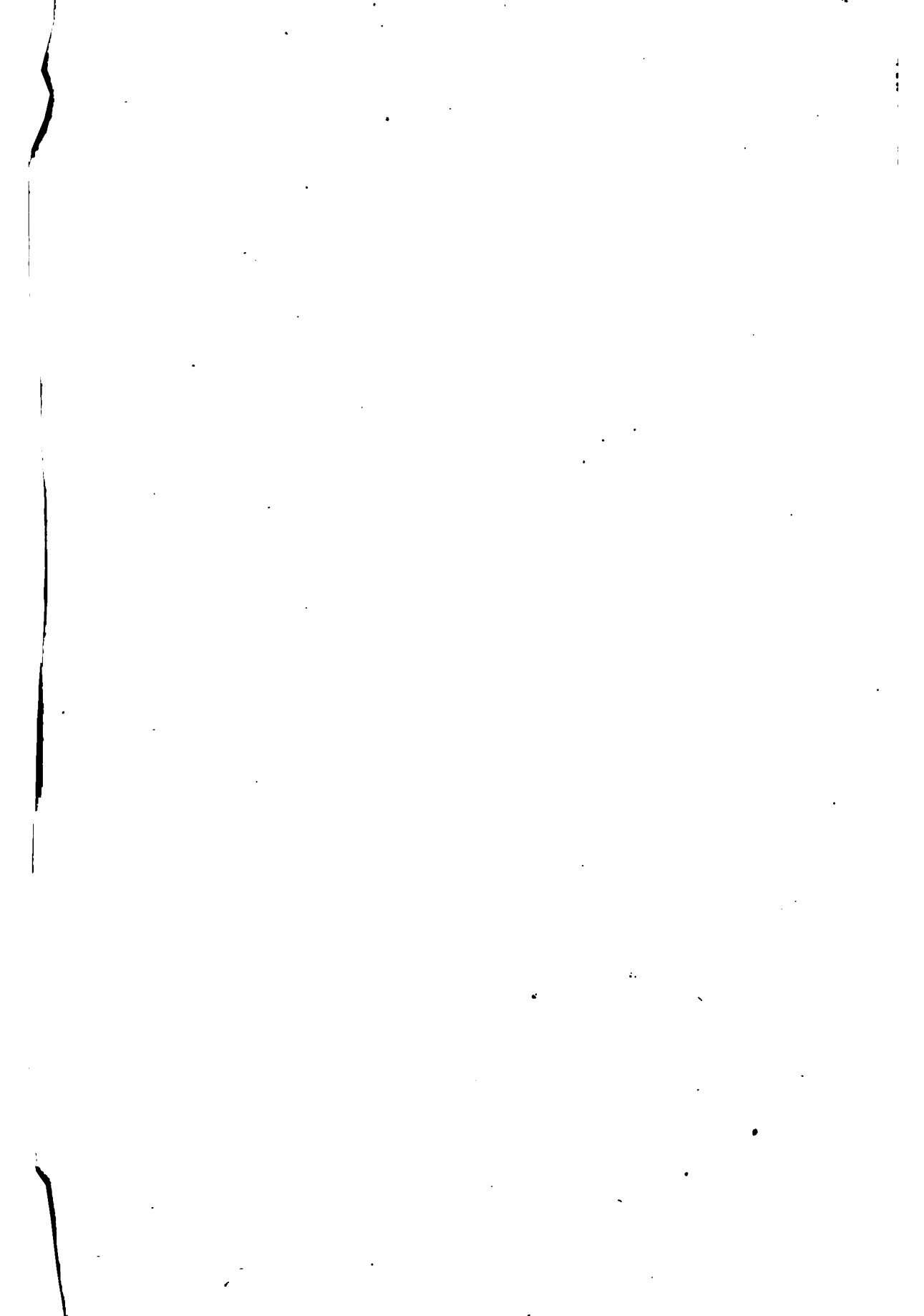
FIG. 99. 100.  
& 101.

176. *DECRIRE une Ellipse ou deux Hyperboles opposées autour d'un parallélogramme donné  $FGHK$ , & dont l'un de ses diamètres  $AB$  parallèle aux deux côtés  $FK, GH$ , soit à son conjugué  $DE$ , en la raison donnée de  $m$  à  $n$ .*

Ayant mené les lignes  $AB, DE$ , qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallélogramme donné  $FGHK$ , il est clair \* qu'elles seront sur deux diamètres conjugués de la Section qu'on demande, & qu'ainsi leur point d'intersection en sera le centre; puisque selon l'une des conditions du Problème, les parallèles  $FG, KH$ , doivent être terminées par la Section, aussi-bien que les deux autres parallèles  $FK, GH$ . Or cela posé, si l'on prend  $AB, DE$ , pour ces deux diamètres conjugués, & qu'on nomme (les points  $L, O$ , coupent en deux parties égales les lignes  $FG, KH$ ,) les données  $CL$  ou  $CO$ ,  $a$ ;  $LF$  ou  $OK$ ,  $b$ ; & l'inconnue  $CA$  ou  $CB$ ,  $t$ ; on aura.

\* Art. 41. & 55. 1°. Lorsque \* la Section est une Ellipse,  $BL \times LA (tt - aa) \cdot LF^2 (bb) :: AB^2 \cdot DE^2 :: mm. nn$ . Et partant  $tt = aa$

\* Art. 81. & 118.  $+ \frac{mmbb}{nn}$ . 2°. Lorsque \* la Section doit être deux Hyperboles opposées,  $CL^2 - CA^2 (aa - tt) \cdot LF^2 (bb) :: AB^2 \cdot DE^2 :: mm. nn$ , ce qui donne  $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$  ou  $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$ ; sçavoir  $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$  lorsque la ligne  $AB$  est un premier diamètre, &  $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$  lorsque c'est un second. D'où l'on tire la construction sui-







# DES TROIS SECTIONS CONIQUES. 119

tante que je distingue en trois differens cas.

*Premier cas.* Lorsque la Section est une Ellipse; soit fait un triangle rectangle  $VST$  dont l'un des côtés  $ST=CL$ , & l'autre  $SV=\frac{m}{n}LF$ ; & soit décrit du demi-diametre  $CA=TV$ , qui soit à son demi-conjugué  $CD$ , comme  $m$  est à  $n$  une Ellipse: Je dis qu'elle satisfera au Problème. Car 1°. Le diametre  $AB$  parallèle aux côtés  $FK, GH$ , est à son conjugué  $DE$ , en la raison donnée de  $m$  à  $n$ . 2°. A cause du triangle  $TSV$  rectangle en  $S$ , le quarré  $TV$  ou  $CA$  ( $tt$ )  $= TS$  ( $aa$ )  $+ SV$  ( $\frac{mmbb}{nn}$ ); & partant  $BL \times LA$  ( $tt-aa$ )  $= \frac{mmbb}{nn}$ : c'est pburquoi l'on aura  $BL \times LA$  ( $\frac{mmbb}{nn}$ )  $= LF$  ( $bb$ )  $:: mm. nn :: AB^2. DE^2$ . D'où l'on voit que  $LF$  est une ordonnée au diametre  $AB$ ; & qu'ainsi la Section passe par le point  $F$ . On prouvera de même que la Section passera par les points  $G, H, K$ ; puisque  $GL=LF=OK=OH$ , & que  $CO=CL$ .

*Second cas.* Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que  $CL$  est plus grande que  $\frac{m}{n}LF$ : soit formé un triangle  $TSV$  rectangle en  $S$ , dont l'un des côtés  $SV=\frac{m}{n}LF$ , & l'hypothénuse  $VT=CL$ ; & soient décrites du premier demi-diametre  $CA=TS$ , qui soit à son demi-conjugué  $CD$ , comme  $m$  est à  $n$ , deux Hyperboles opposées.

*Troisième cas.* Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que  $CL$  est plus petite que  $\frac{m}{n}LF$ : on formera un triangle  $TSV$  rectangle en  $T$  dont l'un des côtés  $TS=CL$ , & l'hypothénuse  $SV=\frac{m}{n}LF$ . On décrira ensuite du second demi-diametre  $CA=TV$ , qui soit à son demi-conjugué  $CD$ , comme  $m$  est à  $n$ , deux Hyperboles opposées.

La démonstration de ces deux derniers cas est semblable à celle du premier; mais il faut remarquer que

lorsque  $CL = \frac{m}{n} LF$ , le Problème est impossible;

## COROLLAIRE I.

177. COMME la position des deux diamètres conjugués  $AB$ ,  $DE$ , est déterminée, aussi-bien que leur grandeur; puisque selon les conditions du Problème ils doivent couper par le milieu les côtés opposés du parallélogramme, & qu'on ne trouve pour le demi-diamètre  $CA$  ou  $CB$  qu'une seule valeur: il s'ensuit qu'il ne peut y avoir qu'une seule Section qui satisfasse.

## COROLLAIRE II.

178. DE-LA on voit comment on peut décrire une Section Conique autour d'un parallélogramme donné  $FGHK$ , & qui passe par un point donné  $M$ .

Car ayant mené les deux diamètres conjugués  $AB$ ,  $DE$ , qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallélogramme, & du point donné  $M$  l'ordonnée  $MP$  au diamètre  $AB$ , laquelle rencontre les côtés opposés  $FK$ ,  $GH$ , aux points  $R$ ,  $Q$ , & la Section (que je suppose décrite) au point  $N$ ; il est clair que  $PN = PM$ , & qu'ainsi  $RN = QM$ , puisque  $PR = PQ$ . Le rectangle  $RM \times MQ$  sera donc égal au rectangle  $RM \times RN$ .

\* Art. 164. Or \*  $FR \times RK$ .  $MR \times RN$  ou  $RM \times MQ :: \overline{AB} \cdot \overline{DE}$ . Et par conséquent la raison du diamètre  $AB$  parallèle aux côtés  $FK$ ,  $GH$ , à son conjugué  $DE$ , est donnée; puisque les rectangles  $FR \times RK$ ,  $RM \times MQ$ , sont donnés. De plus la Section sera une Ellipse, lorsqu'entre les deux ordonnées  $MP$ ,  $KO$ , au diamètre  $AB$ , qui tombent du même côté du centre  $C$ , celle qui est la plus proche du centre est plus grande que la plus éloignée; & au contraire deux Hyperboles opposées, lorsqu'elle est plus petite. D'où l'on voit que cette question se réduit au Problème précédent.

## DES TROIS SECTIONS CONIQUES. 121

Si le point donné  $M$  tomboit sur l'un des côtés du parallélogramme, prolongé à discrétion, il est clair que ce Problème seroit alors impossible, puisque ce côté rencontreroit la Section en trois differens points; ce qui ne peut \* être.

\* Art. 149.

### COROLLAIRE III.

179. **D**E-LA on tire encore la manière de décrire une Section Conique, qui ait pour diametre une ligne  $AB$  donnée de position, pour centre le point donné  $C$ , & pour deux ordonnées à ce diametre les droites  $MP, KO$ .

Car ayant pris sur le diametre  $AB$  la partie  $CZ$  égale à  $CO$ , & mené  $ZF$  parallele & égale à  $OK$ ; il est clair qu'elle sera \* une ordonnée au diametre  $AB$ , \* Art. 45. 55. & qu'ainsi prolongeant  $KO$  en  $H$ , &  $FL$  en  $G$ , en sorte que  $OH = OK$ , &  $LG = LF$ , les droites égales & paralleles  $KH, FG$ , seront \* deux doubles ordonnées \* Art. 144. au diametre  $AB$ . D'où l'on voit que la Section doit être décrite autour du parallélogramme  $FGHK$ , & passer par le point donné  $M$ ; ce qui se fera par le moyen du Corollaire précédent.

Comme cette question se reduit à celle du Corollaire précédent, qui se reduit au Problème; & que selon le Corollaire premier, on ne peut trouver qu'une seule Section qui y satisfasse; il s'ensuit de même qu'on ne peut décrire qu'une seule Section qui remplisse les conditions de ce dernier Corollaire.

## PROPOSITION XV.

### Problème.

180. **D**ÉCRIRE une Section Conique qui passe par cinq points donnés  $F, M, K, G, N$ ; & démontrer qu'il n'y en peut avoir qu'une seule.

FIG. 102.

103.

Q

Ayant joint quatre des points donnés par deux lignes droites  $FG, MN$ , qui se rencontrent au point  $R$ , on menera par le cinquième point donné  $K$  deux droites  $KD, KH$ , parallèles aux droites  $FG, MN$ , & qui les rencontrent aux points  $E, Q$ . On prendra sur ces deux lignes prolongées, s'il est nécessaire, les points  $D, H$ , tels que  $MR \times RN. GR \times RF :: ME \times EN. KE \times ED$ . Et  $FR \times RG. MR \times RN :: FQ \times QG. HQ \times QK$ . en observant que les points  $K, D$ , ou  $K, H$ , doivent tomber de part & d'autre du point de rencontre  $E$ , ou  $Q$ , lorsque les points  $M, N$ , ou  $F, G$ , tombent aussi de part & d'autre de ce même point; & au contraire. On mena ensuite par les points de milieu des parallèles  $DK, FG$ , &  $MN, KH$ , les droites  $LI, AB$ , qui s'entre-

\* Art. 179. coupent au point  $C$ . On décrira enfin \* la Section Conique qui a pour diamètre la ligne  $AB$  donnée de position, pour centre le point donné  $C$ , & pour ordonnées les deux droites  $MP, KO$ . Je dis qu'elle satisfera au Problème, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

\* Art. 166. Car les deux points  $D, H$ , seront \* à la Section qui passe par les cinq points donnés  $F, M, K, G, N$ ; &

\* Art. 146. ainsi les lignes  $LI, AB$ , en seront \* deux diamètres, & 147. qui en détermineront par conséquent le centre par leur point d'intersection  $C$ . Il est donc évident que la Section Conique qui passe par les cinq points donnés, doit avoir nécessairement pour diamètre la ligne  $AB$  donnée de position, pour centre le point  $C$ , & pour ordonnées au diamètre  $AB$  les droites  $MP, KO$ . Or comme il n'y a qu'une seule Section Conique qui puisse remplir ces conditions, il s'ensuit que ce sera celle qu'on demande, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

S'il arrive que les diamètres  $AB, LI$ , soient parallèles entr'eux; la Section sera alors \* une Parabole qu'on décrira par l'article 170.

## LIVRE CINQUIÈME.

### *De la comparaison des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens.*

#### LEMME I.

181. *Si la difference de deux quantités diminue continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car si elles ne l'étoient pas, on pourroit assigner entr'elles quelque difference, ce qui est contre l'hypothese.

#### LEMME II.

182. *Si la raison de deux quantités est telle que l'antecedent demeurant toujours le même, sa difference avec son consequent diminue continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car par le Lemme\* précédent, l'antecedent sera égal \* Art. 181. à son consequent; & ainsi les quantités dont ils expriment le rapport, seront égales.

#### LEMME III.

183. *Si l'on suppose sur une ligne courbe quelconque ABG FIG. 104. un arc MN infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune grandeur donnée; & qu'on imagine par les extremités de cet arc les ordonnées MP, NQ, à l'axe ou diametre AC, avec les paralleles MR, NS, à ce diametre: je dis que les parallélogrammes PQRM, PQNS, peuvent être pris chacun pour l'espace PQNM renfermé entre les ordonnées PM, QN, la petite droite PQ, & le petit arc de la courbe MN.*

Tous les points d'une ligne courbe ou s'éloignent

Q ij

continuellement de plus en plus de son diamètre, ou bien s'en approchent continuellement de plus en plus ; ou enfin cette ligne courbe est composée de plusieurs portions, dont les unes s'éloignent de plus en plus, & les autres s'approchent de plus en plus de son diamètre. Car il est évident qu'il ne peut y avoir aucune portion dans une ligne courbe, dont tous les points soient également éloignés de son diamètre ; puisqu'alors cette portion ne seroit plus courbe, mais une ligne droite parallèle à ce diamètre.

Supposons 1°. Que l'arc  $MN$  soit sur une courbe  $AMB$  dont tous les points s'éloignent de plus en plus de son diamètre  $AC$ . Si l'on prend du côté du point  $N$  l'arc  $MO$  d'une grandeur finie, & qu'ayant mené l'ordonnée  $OF$  parallèle à  $MP$ , on tire les droites  $OD$ ,  $ME$ , parallèles au diamètre  $AC$  ; il est clair que l'espace curviligne  $PFO M$  sera plus grand que le parallélogramme inscrit  $P F E M$ , & moindre que le parallélogramme circonscrit  $P F O D$ . Or si l'on imagine que le point  $O$  se meuve suivant la courbe vers le point  $M$ , il est visible que le parallélogramme  $MEOD$  qui est la différence des parallélogrammes inscrits & circonscrits à l'arc  $OM$ , diminuera continuellement jusqu'à ce qu'enfin il devienne nul ou zero dans l'instant que le point  $O$  parvient en  $M$ . D'où il suit que lorsque le point  $O$  est arrivé en  $N$ , c'est à dire, infiniment près de  $M$ , le parallélogramme  $MEOD$ , qui devient  $MRNS$ , sera moindre qu'aucune grandeur donnée. Il est donc évident selon le Lemme \* premier, que les parallélogrammes  $PQRM$ ,  $PQNS$ , deviennent alors égaux entr'eux ; & par conséquent aussi égaux chacun à l'espace curviligne  $PQNM$ . Donc &c.

Supposons 2°. Que le petit arc  $MN$  soit sur une courbe  $BMG$  dont tous les points approchent de plus en plus de ceux de son diamètre  $CG$ . Il est visible que la démonstration demeure la même que pour le premier cas, en observant simplement que le parallélogramme

DE LA COMPARAISON DES SECT. CONIQ. 125  
 circonscrit  $PQNS$  devient inscrit dans ce cas-ci.

Supposons 3°. Qu'une ligne courbe telle que  $ABG$ , soit composée de plusieurs portions dont les unes, comme  $AB$ , s'éloignent de plus en plus du diamètre  $AG$ ; & les autres au contraire, comme  $BG$ , s'en approchent de plus en plus. Je dis que les points, comme  $B$ , qui séparent ces portions, ne peuvent tomber sur les arcs  $MN$ : car si cela étoit le point  $B$  seroit plus près du point  $M$  que n'est le point  $N$ ; ce qui est contre la supposition. Il est donc évident que ce dernier cas est nécessairement renfermé dans l'un ou dans l'autre des deux premiers.

#### COROLLAIRE I.

184. DE-LA il suit que si l'on mène par tout où l'on voudra une ordonnée  $CB$  parallèle à  $PM$ , & qu'on imagine que la portion de courbe  $AB$  soit divisée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits, tels que  $MN$ ; l'espace  $ACB$  renfermé par les droites  $AC$ ,  $CB$ , & par la portion de courbe  $AB$ , sera égal à la somme de tous les parallelogrammes tels que  $PQRM$  ou  $PQNS$ . Il s'ensuit de même que l'espace  $MPCB$  renfermé par les droites  $MP$ ,  $PC$ ,  $CB$ , & par la portion de courbe  $MB$ , sera égal à la somme de tout ce qu'il y aura de ces parallelogrammes dans cet espace; & de même dans toute l'étendue de la courbe  $ABG$ .

#### COROLLAIRE II.

185. S'IL y a une figure quelconque  $CMDOC$  ren- Fig. 105.  
 fermée entre deux paralleles  $CE$ ,  $DF$ , & qu'on imagine par tout où l'on voudra entre ces paralleles deux droites  $MO$ ,  $NL$ , infiniment proches l'une de l'autre, & qui leur soient aussi paralleles; je dis que l'espace  $OMNL$  qu'elles couperont dans la figure  $CMDOC$ , sera égal au rectangle d'une d'elles, comme de  $MO$ , par leur distance  $MR$  ou  $OS$ . Car menant la perpendicu-

laire  $AB$  sur les parallèles  $CE, DF$ ; laquelle rencontre les parallèles  $MO, NL$ , aux points  $P, Q$ ; il est  
 \* *Art.* 183. clair par le Lemme \* que l'espace  $PMNQ$  est égal au rectangle  $PMRQ$ , & l'espace  $POLQ$  au rectangle  $POSQ$ ; & par conséquent que l'espace  $OMNL$  est égal au rectangle  $OMRS$  ou  $OM \times PQ$ .

## COROLLAIRE III.

186. IL suit du Corollaire précédent, que s'il y a deux figures quelconques  $CMDOC, EGFHE$  renfermées entre deux parallèles  $CE, DF$ , & qui soient telles qu'ayant mené entre ces parallèles par tout où l'on voudra une ligne  $MH$  parallèles aux droites  $CE, DF$ ; les parties  $MO, GH$ , de cette ligne comprises dans les figures  $CMDOC, EGFHE$ , soient toujours entr'elles en raison donnée: il suit, dis-je, que ces deux figures (j'entends les espaces qu'elles comprennent) sont aussi entr'elles en raison donnée. Car imaginant une autre parallèle  $NK$  infiniment proche de  $MH$ , & tirant une perpendiculaire  $AB$  sur les parallèles  $CE, DF$ , laquelle rencontre les parallèles  $MH, NK$ , aux points  $P, Q$ ; il est clair par le Corollaire \* précédent que l'espace  $OMNL$  est égal au rectangle  $OM \times PQ$ , & de même que l'espace  $GHKI$  est égal au rectangle  $GH \times PQ$ . Ces deux espaces seront donc entr'eux comme  $MO$  est à  $GH$ ; & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on mené la droite  $MH$ , il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces  $MNLO$ , c'est à dire, l'espace  $CMDOC$  sera à la somme de tous les petits espaces  $GHKI$ , c'est à dire, à l'espace  $EGFHE$ , en la raison donnée.

On prouvera de même que la partie  $MDO$  de la figure  $CMDOC$ , est encore à la partie correspondante  $GFH$  de l'autre figure  $EGFHE$ , en la raison donnée: comme aussi les parties restantes  $CMO, EGH$ .

Il est visible que si la raison donnée est celle d'égalité,



c'est à dire, que si les parties  $MO$ ,  $GH$ , de la droite  $MH$ , sont toujours égales entr'elles; les espaces  $CMDOC$ ,  $EGFHE$ , & leur parties correspondantes  $MDO$ ,  $GFH$ , &  $CMO$ ,  $EGH$ , seront égales entr'elles.

## L E M M E IV.

187. *Si l'on suppose sur une ligne courbe quelconque un arc infiniment petit  $MN$ ; & qu'on imagine les tangentes  $MT$ ,  $NT$ , qui se rencontrent au point  $T$ , la soutendante  $MN$ , & la droite  $NS$  perpendiculaire sur  $MT$  prolongée: je dis qu'on peut prendre pour l'arc  $MN$  sa soutendante  $MN$ , ou la somme des deux tangentes  $MT$ ,  $NT$ , ou enfin la droite  $MS$ .* FIG. 106.

Toute ligne courbe est nécessairement ou toujours concave vers un certain endroit, ou composée de plusieurs portions dont les unes étant concaves vers une certaine part, les autres le sont vers le côté opposé. Or les points qui séparent ces portions \* ne peuvent point se trouver sur les arcs infiniment petits  $MN$ : puisqu'ils seroient plus près du point  $M$  que n'est le point  $N$ ; ce qui est contre la supposition. On peut donc toujours supposer que l'arc  $MN$  fait partie d'une courbe ou portion de courbe qui est toujours concave vers un certain côté. \* Art. 183.  
n. 3.

Maintenant si l'on prend sur la courbe du côté du point  $N$ , l'arc  $MO$  d'une grandeur finie, & qu'on tire la soutendante  $OM$ , la tangente  $OG$ , & la parallèle  $OD$  à  $NS$ : il est clair 1°. A cause du triangle  $MDO$  rectangle en  $D$ , que la tangente  $MD$  est moindre que la soutendante  $MO$ , & à plus forte raison moindre que l'arc  $MNO$ ; de sorte que l'arc  $MNO$  & la soutendante  $MO$  sont plus grands chacun que  $MD$ , & chacun moindre que la somme des deux tangentes  $MG$ ,  $OG$ . 2°. A cause de la concavité de l'arc  $MNO$  vers le même côté, si l'on mène par un point quelconque  $N$  de l'arc  $MO$  une tangente  $TR$ , les points  $T$ ,  $R$ , où elle rencontre les tangentes  $MG$ ,  $OG$ , seront situez entre les points  $M$ ,  $G$ , &  $O$ ,  $G$ ; ainsi

l'angle  $OGD$ , qui est externe au triangle  $TGR$ , est plus grand que l'angle  $RTG$  ou  $NTS$ .

Ceci supposé, si l'on mène les droites  $ME$ ,  $MF$ , parallèles aux tangentes  $OG$ ,  $NT$ , & qui rencontrent la droite  $DO$  aux points  $E$ ,  $F$ ; & qu'on imagine que le point  $O$  se meuve suivant la courbe vers le point  $M$ : il est visible que l'angle  $OGD$ , ou son égal  $EMD$ , diminuera continuellement jusqu'à ce qu'il s'évanouisse dans l'instant que le point  $O$  parvient en  $M$ ; puisqu'alors la tangente  $OG$  se confond avec la tangente  $MD$ : d'où il suit que la ligne  $ME$  diminuë continuellement, jusqu'à ce qu'enfin elle devienne égale à  $MD$  dans cet instant. Donc lorsque le point  $O$  est arrivé en  $N$ , c'est à dire, infiniment près du point  $M$ , la ligne  $ME$ , alors en  $MF$ , ne sera pour lors différente de la tangente  $MD$ , que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée; & par conséquent \* les lignes  $TN$ ,  $TS$ , dont elles expriment le rapport, seront égales entr'elles. Les deux tangentes  $MT$ ,  $TN$ , prises ensemble, seront donc égales à la droite  $MS$ , comme aussi à l'arc  $MN$ , & à la soustendante  $MN$ , *Ce qu'il falloit démontrer.*

#### COROLLAIRE I.

188. **P**UISQUE l'angle  $FMD$ , ou son égal  $NTS$ , est infiniment petit dans la supposition que le point  $N$  soit infiniment près du point  $M$ , il s'ensuit que dans le triangle  $MTN$ , l'angle interne  $NMT$ , qui est moindre que l'exterieur  $NTS$ , sera aussi infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucun angle donné; & qu'ainsi on ne pourra mener par le point  $M$  aucune ligne droite qui tombe dans l'angle  $TMN$ . D'où l'on voit que ces deux lignes  $MT$ ,  $NM$ , se confondent entr'elles, & qu'ainsi on peut regarder une tangente comme une ligne droite qui passe par deux points d'une ligne courbe infiniment proches l'un de l'autre.

COROL.

## COROLLAIRE II.

189. Si l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque soit divisée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits tels que  $MN$ ; il est clair qu'en prenant au lieu de ces arcs leurs soutendantes, on verra naître un Polygone d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne courbe : puisqu'elle \* *Art. 187.* n'en différera en aucune manière. De plus les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, seront les tangentes de cette courbe; puisqu'ils passent chacun par deux de ses points infiniment proches l'un de l'autre.

## REMARQUE.

190. ON doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Séctions Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui sont toujours concaves dans toute leur étendue vers le même côté, comme sont \* ces Séctions : au lieu que cette der- \* *Art. 26.* niere notion est generale pour toutes sortes de lignes *62. 124.* courbes. Aussi est-ce elle qui sert de fondement à la methode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des *Infiniment petits*, & que j'ose assurer être la plus simple & la plus generale qu'on puisse souhaiter. On en verra un foible échantillon à la fin de ce Livre.

## DEFINITIONS.

I.

Deux segmens de lignes courbes quelconques  $BAD$ , *Fig. 107.*  $bad$ , sont appelés *Semblables*; lorsqu'ayant inscrit dans *108. 109.* l'un d'eux une figure réctiligne quelconque  $BMNOD$ , on peut toujours inscrire dans l'autre une figure réctiligne semblable  $bmnod$ .

2.

Deux Séctions Coniques sont appelées *Semblables*; lorsqu'ayant pris dans l'une d'elles un segment quelcon-

R

que  $BAD$ , on peut toujours assigner dans l'autre un segment semblable  $bad$ .

3.

On appelle diamètres *Semblables*  $AP$ ,  $ap$ , dans différentes Sections Coniques, ceux qui font avec leurs ordonnées  $PM$ ,  $pm$ , les mêmes angles  $APM$ ,  $apm$ .

## COROLLAIRE.

191. PLUS chacun des côtés  $BM$ ,  $MN$ , &c.  $bm$ ,  $mn$ , &c. devient petit; plus leur nombre augmente, & plus aussi les figures rectilignes semblables  $BMNOD$ ,  $bmnod$ , approchent des segmens  $BAD$ ,  $bad$ , auxquels elles sont inscrites; de sorte qu'elles leur deviennent enfin égales \* lorsque chacun des côtés est infiniment petit, & que leur nombre par conséquent est infini. D'où il suit que les segmens semblables  $BAD$ ,  $bad$ , sont entr'eux comme les quarrés de leurs soutendantes  $BD$ ,  $bd$ , qui sont des côtés homologues; & les portions des courbes  $BAD$ ,  $bad$ ; comme ces soutendantes.

\* Art. 189.

## PROPOSITION I.

## Théorème.

FIG. 107.

192. SOIENT deux Paraboles  $AM$ ,  $am$ , qui ayent deux diamètres semblables  $AL$ ,  $aL$ , situés sur la même droite, en sorte que leurs ordonnées  $PM$ ,  $pm$ , soient parallèles entr'elles; & soit marqué sur cette droite au dedans des Paraboles un point fixe  $L$ , tel que  $LA$  soit à  $La$ , comme le paramètre  $AG$  du diamètre  $AL$  de la Parabole  $AM$ , est au paramètre  $ag$  du diamètre  $aL$  de la Parabole  $am$ . Je dis que si l'on mène du point fixe  $L$  à un point quelconque  $M$  de la Parabole  $AM$ , une ligne droite  $LM$ ; elle rencontrera l'autre Parabole  $am$  en un point  $m$  tel que  $LM$ .  $Lm :: LA$ .  $La$ .

Ayant mené l'ordonnée  $MP$ , & nommé les données  $LA$ ,  $a$ ;  $La$ ,  $b$ ;  $AG$ ,  $p$ ; & les indéterminées  $AP$ ,  $x$ ;

$PM, y$ ; on aura  $LA(a). La, (b) :: AG(p). ag = \frac{by}{a}$ .  
 Or si l'on prend sur le diamètre  $aL$  de la Parabole  $am$ ,  
 la partie  $ap = \frac{bx}{a}$ , & qu'on mene l'ordonnée  $pm$ ; il est  
 clair \* que  $\overline{pm}^2 = pa \times ag (\frac{bpx}{aa}) = \frac{bpy}{aa}$  en mettant \* *Art. 6. 6.*  
 pour  $px$  la valeur  $yy$ ; & qu'ainsi  $pm = \frac{by}{a}$ . Donc  $PM$  <sup>20.</sup> \* *Ibid.*  
 $(y). pm (\frac{by}{a}) :: LP(a-x). Lp(b-\frac{bx}{a})$ . Et par con-  
 séquent la ligne  $LM$  passera par le point  $m$  extrémité  
 de l'ordonnée  $pm$ , c'est à dire, qu'elle coupera la Pa-  
 rabole  $am$  en ce point. Donc à cause des triangles sem-  
 blables  $LPm, Lpm$ , on aura  $LM. Lm :: PM(y).$   
 $pm(\frac{by}{a}) :: LA(a). La(b)$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

193. SI l'on prend dans la Parabole  $AM$  un seg-  
 ment quelconque  $BAD$ ; & qu'ayant mené les droites  
 $LB, LD$ , qui rencontrent l'autre Parabole  $am$  aux  
 points  $b, d$ , on tire la soûrendante  $bd$ : je dis que le seg-  
 ment  $bad$  de la Parabole  $am$ , est semblable au segment  
 $BAD$  de la Parabole  $AM$ . Car ayant inscrit dans le  
 segment  $BAD$  une figure rétiligne quelconque  
 $BMNOD$ , il est clair que si l'on mene les droites  
 $LM, LN, LO$ , qui rencontrent l'autre Parabole aux  
 points  $m, n, o$ ; les triangles  $LBm, Lbm; LMN,$   
 $Lmn; LNO, Lno; LOD, Lod; LBD, Lbd$ , seront  
 semblables; & qu'ainsi les côtés  $BM, bm; MN, mn;$   
 $NO, no; OD, od; BD, bd$ ; seront paralleles, & tou-  
 jours en même raison chacun à son correspondant;  
 puisque toutes les droites  $LB, LM, LN, LO, LD$ ,  
 sont coupées en même raison aux points  $b, m, n, o, d$ .  
 D'où l'on voit que les figures rétilignes  $BMNOD$ ,  
 $bmna d$ , sont semblables. Or comme il est évident que  
 cette démonstration subsiste toujours, telle que puisse  
 être la figure rétiligne inscrite dans le segment  $BAD$ ;

- \*Def. 1. il s'ensuit que les segmens  $BAD$ ,  $bad$ , \* sont semblables; & par conséquent\* que les Paraboles  $AM$ ,  $am$ , le sont aussi.
- \*Def. 2.

## COROLLAIRE II.

194. DE-LA il est évident que si l'on mène par le point  $Z$  une double ordonnée  $EF$  dans la Parabole  $AM$ , laquelle rencontre l'autre Parabole  $am$  aux points  $e, f$ ; les segmens  $EAF$ ,  $eaf$ , des deux Paraboles  $AM$ ,  $am$ , seront semblables entr'eux.

## COROLLAIRE III.

195. TOUTES les Paraboles sont semblables entr'elles; car si l'on prend sur deux diametres semblables de deux différentes Paraboles, les parties  $AL$ ,  $aL$ , qui soient entr'elles comme les parametres  $AG$ ,  $ag$ ; & si l'on conçoit que le diametre  $Za$  soit situé sur le diametre  $LA$ , en sorte que les points  $Z, L$ , tombent l'un sur l'autre, & que leurs ordonnées  $PM$ ,  $pm$ , soient parallèles entr'elles: il est clair qu'ayant mené du point fixe  $Z$  à un point quelconque  $M$  de la Parabole  $AM$ , une ligne droite  $ZM$ ; elle rencontrera toujours l'autre Parabole  $am$  en un point  $m$  tel que  $ZM. Zm :: ZA. La$ .

\*Art, 193. Donc \* &c.

## COROLLAIRE IV.

196. DE-LA il suit que si l'on prend sur deux diametres semblables de deux différentes Paraboles, les parties  $AL$ ,  $aL$ , qui soient entr'elles comme les parametres de ces diametres, & qu'on tire par les points  $Z, L$ , les doubles ordonnées  $EF$ ,  $ef$ : les segmens  $EAF$ ,  $eaf$ , des deux Paraboles  $AM$ ,  $am$ , seront semblables entr'eux.

## COROLLAIRE V.

197. SI deux segmens  $BAD$ ,  $bad$ , sont semblables entr'eux, & que l'un d'eux  $BAD$ , soit le segment d'une

Parabole, je dis que l'autre  $bad$  fera le segment d'une autre Parabole; & qu'ainsi il n'y a entre toutes les courbes imaginables que des Paraboles qui puissent être semblables à une Parabole donnée. Car si l'on place le petit segment  $bad$  au dedans du grand  $BAD$ , en sorte que les soutendantes  $bd$ ,  $BD$ , soient parallèles, & qu'on inscrive dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques semblables  $BMNOD$ ,  $bmnod$ : il est clair que les côtés homologues  $BM$ ,  $bm$ ;  $MN$ ,  $mn$ ; &c. de ces deux figures seront parallèles: puisque les angles  $DBM$ ,  $dbm$ ;  $BMN$ ,  $bm n$ ; &c. sont égaux entr'eux. Or menant  $LM$ ,  $LN$ ,  $LO$ , par le point de concours  $L$  des deux droites  $Bb$ ,  $Dd$ , qui joignent les extrémités des soutendantes parallèles  $BD$ ,  $bd$ , qui sont les deux côtés homologues donnés; ces droites  $LM$ ,  $LN$ ,  $LO$ , passeront par les points correspondans  $m$ ,  $n$ ,  $o$ , où elles seront divisées en même raison que  $LB$  l'est en  $b$ , ou  $LD$  en  $d$ ; puisque  $BD. bd :: LB. Lb :: BM. bm :: LM. Lm :: MN. Mn :: LN. Ln :: NO. no :: LO. Lo :: OD. od$ .

Maintenant si l'on mene par le point  $L$  le diamètre  $LA$  de la Parabole  $AM$ ; qu'on le divise en  $a$ , en la même raison que  $LB$  l'est en  $b$ , ou  $LD$  en  $d$ ; & qu'on décrive \* du diamètre  $aL$ , & du parametre  $ag$  qui soit \* *Art. 162.* au parametre  $AG$  du diamètre  $AL$  de la Parabole  $AM$ , comme  $La$  est à  $LA$ , une Parabole  $am$  dont les ordonnées  $pm$  soient parallèles aux ordonnées  $PM$  de l'autre Parabole: il est évident \* qu'elle passera par \* *Art. 192.* tous les points  $b$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $o$ ,  $d$ , qui divisent dans la raison donnée de  $BD$  à  $bd$  toutes les droites  $LB$ ,  $LM$ ,  $LN$ ,  $LO$ ,  $LD$ . Or comme ce raisonnement subsiste toujours tel que puisse être le nombre des côtés des figures rectilignes semblables  $BMNOD$ ,  $bm nod$ , & de telle grandeur qu'ils puissent être; il s'ensuit que la Parabole  $am$  passe par tout par où le segment  $bad$  passe, & qu'ainsi ce segment en est une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## PROPOSITION II.

## Theorème.

FIG. 108.  
109.

198. SOIT une Ellipse ou Hyperbole  $AM$  qui ait pour un de ses premiers diamètres la ligne  $AH$ , & pour paramètre de ce diamètre la ligne  $AG$ , & ayant pris sur ce diamètre (prolongé dans l'Hyperbole) un point fixe  $L$ , & divisé en même raison aux points  $a, h$ , ses parties  $LA, LH$ . Soit une autre Ellipse ou Hyperbole  $am$  qui ait pour premier diamètre la ligne  $ah$ , pour paramètre de ce diamètre la ligne  $ag$  qui soit à  $AG$  comme  $ah$  est à  $AH$ , & dont les ordonnées  $pm$  soient parallèles aux ordonnées  $PM$  de l'autre Section  $AM$ . Je dis que si l'on mène du point fixe  $L$  à un point quelconque  $M$  de la Section  $AM$ , une ligne droite quelconque  $LM$ , elle rencontrera l'autre Section  $am$ , en un point  $m$  tel que  $LM. Lm :: LA. La$  : c'est à dire que toutes les droites tirées du point fixe  $L$  aux points de la Section  $AM$ , sont divisées en même raison par la Section  $am$ .

Il faut prouver que  $LM. Lm :: LA. La$ .

Ayant mené l'ordonnée  $MP$ , & nommé les données  $LA, a$ ;  $La, b$ ;  $AH, 2t$ ; & les indéterminées  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; on aura  $LA(a). La(b) :: LH. Lh :: LH \pm LA$  ou  $AH(2t). Lh \pm La$  ou  $ab = \frac{2bt}{a}$ .

Or si l'on prend sur le diamètre  $ah$  de la Section  $am$  la partie  $ap = \frac{bx}{a}$ , & qu'on mène l'ordonnée  $pm$ ; il est clair \* que  $AP \times PH(2tx \mp xx). \overline{PM}^2(yy) :: AH.$

\* Art. 42. 55. 81. & 118.  $AG :: ah. ag :: ap \times ph \left( \frac{2btx \mp bby}{aa} \right). \overline{pm}^2 = \frac{bby}{aa}$ , & qu'ainsi  $pm = \frac{by}{a}$ . Donc  $PM(y). pm(\frac{by}{a}) :: LP(a-x).$

$Lp(b - \frac{bx}{a})$ . Et par conséquent la ligne  $LM$  passera par le point  $m$  extrémité de l'ordonnée  $pm$ , c'est à dire qu'elle coupera la Section  $am$  en ce point. Donc à cause des triangles semblables  $LPM, Lpm$ , on aura



$LM.Lm :: PM(y).pm(\frac{b^2}{a}) :: LA(a).La(b)$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

199. SI l'on prend dans la Section  $AM$  un segment quelconque  $BAD$ , & qu'ayant mené les droites  $LB$ ,  $LD$ , qui rencontrent l'autre Section  $am$  aux points  $b$ ,  $d$ , on tire la soutendante  $bd$ ; je dis que le segment  $b ad$  de la Section  $am$  est semblable au segment  $BAD$  de la Section  $AM$ ; & partant que si l'on mène par le point  $L$  une double ordonnée  $EF$  dans la Section  $AM$ , laquelle rencontre l'autre Section aux points  $e$ ,  $f$ ; les segments  $EAF$ ,  $eaf$ , des deux Ellipses ou des deux Hyperboles  $AM$ ,  $am$ , seront semblables entr'eux. Cela se prouve de même que pour la Parabole dans les articles 193. & 194.

## COROLLAIRE II.

200. TOUTES les Ellipses ou Hyperboles  $AM$ ,  $am$ , qui ont deux diametres semblables  $AH$ ,  $ah$ , en même raison avec leurs parametres  $AG$ ,  $ag$ , sont semblables entr'elles. Car si l'on prend les parties  $AL$ ,  $aL$ , qui soient entr'elles comme les diametres  $AH$ ,  $ah$ ; & que l'on conçoive que le diamètre  $ah$  soit situé sur le diamètre  $AH$ , en sorte que les points  $L$ ,  $L$ , tombent l'un sur l'autre, & que les ordonnées  $pm$ ,  $PM$ , soient paralleles entr'elles: il est clair qu'ayant mené du point fixe  $L$  à un point quelconque  $M$  de la Section  $AM$  une ligne droite  $LM$ , elle rencontrera toujours l'autre Section  $am$ , en un point  $m$  tel que  $LM.Lm :: LA.La$ . Donc \* &c.

## COROLLAIRE III.

\* Art. 199.

201. DE LA il est évident que s'il y a deux Ellipses ou deux Hyperboles  $AM$ ,  $am$ , dont deux diametres semblables  $AH$ ,  $ah$ , soient en même raison avec leurs parametres  $AG$ ,  $ag$ ; & qu'ayant pris les parties  $AL$ ,  $aL$ ,

qui soient entr'elles comme les diametres  $AH$ ,  $ab$ , on tire par les points  $L$ ,  $Z$ , les doubles ordonnées  $EF$ ,  $ef$ : il est évident, dis-je, que les segmens  $EAF$ ,  $caf$ , des deux Séctions  $AM$ ,  $am$ , sont semblables entr'eux.

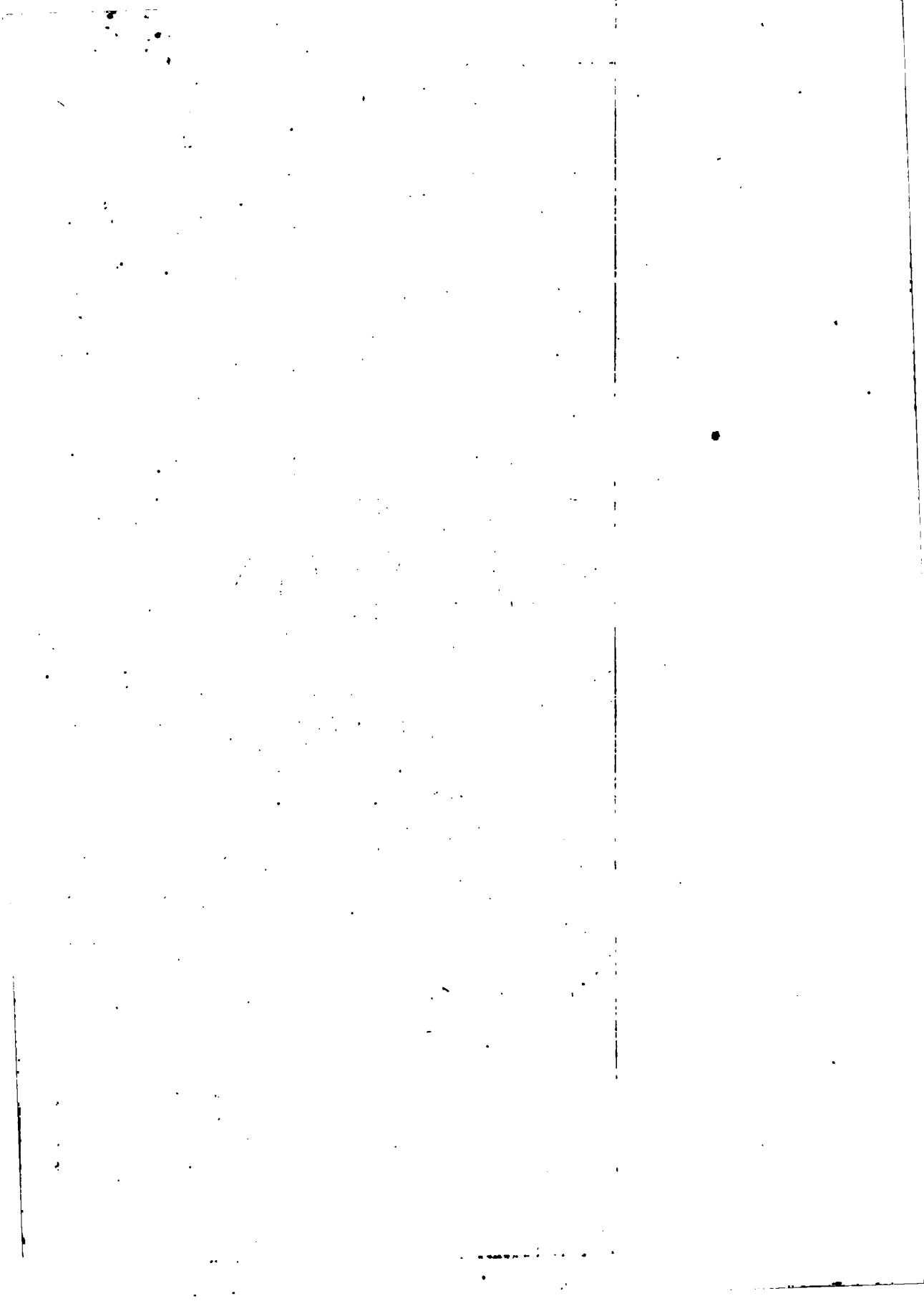
## COROLLAIRE IV.

202. Si deux segmens  $BAD$ ,  $bad$ , sont semblables entr'eux; & que l'un d'eux soit le segment d'une Ellipse ou d'une Hyperbole  $AM$ , qui ait pour un de ses diametres quelconques la ligne  $AH$  dont le parametre est  $AG$ ; Je dis que l'autre  $bad$  sera le segment d'une autre Ellipse ou d'une autre Hyperbole  $am$ , qui aura pour l'un de ses diametres semblables à  $AH$ , la ligne  $ab$  qui sera en même raison avec son parametre  $ag$ , que  $AH$  avec le sien  $AG$ . Car ayant placé le segment  $bad$ , au dedans du segment  $BAD$ , en sorte que la soutendante  $bd$  soit parallèle à la soutendante  $BD$ , & que les lignes  $Bb$ ,  $Dd$ , concourent en un point  $Z$  du diametre  $AH$  (ce qui est toujours possible), & inscris dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques semblables; on prouvera comme dans la Parabole article 197. que les droites  $LM$ ,  $LN$ ,  $LO$ , passeront par les points correspondans  $m$ ,  $n$ ,  $o$ , où elles seront divisées en même raison que  $ZB$  l'est en  $b$ , ou  $ZD$  en  $d$ .

Maintenant si l'on divise les parties  $LA$ ,  $LH$ , du diametre  $AH$  aux points  $a$ ,  $b$ , en même raison que

\* Art. 161.  $ZB$  l'est en  $b$ ; & qu'on décrive \* du diametre  $ab$  & du parametre  $ag$  qui soit au parametre  $AG$  du diametre  $AH$ , comme  $La$  est à  $LA$ , ou  $ab$  à  $AH$ , une Ellipse ou une Hyperbole  $am$ , dont les ordonnées  $pm$  soient parallèles aux ordonnées  $PM$  de l'autre Ellipse ou Hyperbole  $AM$ : il est évident \* qu'elle passera par tous les points  $b$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $o$ ,  $d$ , qui divisent dans la raison donnée de  $bd$  à  $BD$  toutes les droites  $ZB$ ,  $LM$ ,  $LN$ ,  $LO$ ,  $ZD$ . Or comme ce raisonnement subsiste toujours tel que puisse être le nombre des côtés des figures rectilignes semblables





DE LA COMPARAISON DES SECT. CONIQ. 137  
 semblables  $BMNOD$ ,  $bmnod$ , & de telle grandeur  
 qu'ils puissent être ; il s'ensuit que l'Ellipse ou l'Hyperbo-  
 le  $am$  passe par tous les mêmes points par lesquels passe  
 le segment  $bd$ , & qu'ainsi ce segment en est une por-  
 tion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE V.

203. IL est donc évident que si deux Ellipses ou deux  
 Hyperboles  $AM$ ,  $am$ , sont semblables, & qu'on pren-  
 ne dans la Section  $AM$  un de ses diametres quelcon-  
 ques  $AH$  ; il y aura toujours dans l'autre Section  $am$   
 un diametre  $ab$  semblable à  $AH$ , qui aura avec son pa-  
 rametre  $ag$  la même raison que  $AH$  avec le sien  $AG$  :  
 & qu'ainsi les diametres semblables  $AH$ ,  $ab$ , seront  
 en même raison avec leurs diametres conjugués. Or  
 comme dans une Ellipse ou Hyperbole il ne peut y avoir  
 \* que deux differens diametres conjugués qui fassent en-  
 tr'eux les mêmes angles, & que ces diametres ne diffé-  
 rent que par leur position, leur grandeur demeurant la  
 même ; il s'ensuit que dans les Ellipses ou les Hyperboles  
 semblables tous les diametres conjugués qui feront les  
 mêmes angles, seront entr'eux en même raison ; en ob-  
 servant de prendre pour les antécédens de ces deux  
 raisons les plus grands de ces deux diametres conjugués,  
 & pour conséquens les moindres.

\* Art. 66.  
 & 128.

## PROPOSITION III.

### Theorème.

204. SI l'on mene dans une Section Conique deux pa-  
 ralleles quelconques  $BD$ ,  $EF$ , terminées par la Section ; &  
 qu'on joigne leurs extremités par deux droites  $BE$ ,  $DF$  : je  
 dis que les segmens  $BMEB$ ,  $DMFD$ , compris par des por-  
 tions de la Section, & par les droites qui joignent les extre-  
 mités des paralleles, seront égaux entr'eux.

Fig. 100.  
 III.

S

Car ayant prolongé les soutendantes  $BE$ ,  $DF$ , jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point  $G$ , & ayant mené par ce point & par le point de milieu  $H$  de la ligne  $BD$ , la droite  $GH$ ; il est clair qu'elle divisera par le milieu en  $K$  la parallèle  $EF$  à  $BD$ , comme aussi par le milieu en  $P$  un autre parallèle quelconque  $OO$  à la même ligne  $BD$ . Donc la ligne  $HK$  sera un diamètre

- \* Art. 146. \* qui aura pour ordonnées de part & d'autres les parallèles  $BD$ ,  $EF$ ; & partant si l'on mène par un de ses points quelconques  $P$  une parallèle à ces lignes, elle rencontrera \* la Section en deux points  $M$ ,  $M$ , également éloignés du point  $P$ ; d'où l'on voit que les parties  $MO$ ,  $OM$ , de la même parallèle  $MM$  à  $BD$ , comprises dans les segmens  $BMEB$ ,  $DMFD$ , sont toujours égales entr'elles, en quelque endroit que puisse tomber cette parallèle entre les lignes  $BD$ ,  $EF$ . Il est donc
- \* Art. 186. évident \* que ces deux segmens seront égaux entr'eux.

Si les soutendantes  $BE$ ,  $DF$ , étoient parallèles entr'elles, il faudroit mener par le point de milieu  $H$  de la ligne  $BD$  une droite  $HK$  parallèle à ces soutendantes, & la démonstration demeureroit toujours la même.

### COROLLAIRE I.

FIG. 110.

205. PUISQUE  $PM$  est toujours égale à  $PM$ ; il s'ensuit 1°. Que les Trapezes Coniques  $KHBE$ ,  $KHDF$ , sont égaux entr'eux. 2°. ( Lorsque la ligne  $BD$  au lieu de rencontrer la Section en deux points la touche en un point  $A$  ) que les Trilignes Coniques  $AKE$ ,  $AKF$ , sont égaux; & qu'ainsi les segmens  $AEMA$ ,  $AFMA$ , le sont aussi; puisque le triangle  $AEF$  est divisé en deux parties égales par le diamètre  $AK$  qui passe par le milieu de  $EF$ .

### COROLLAIRE II.

FIG. 110.

206. Si la Section étant une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole, l'on mène par les extrémités des parallèles

$BD, EF$ , les droites  $BF, DE$ , qui s'entrecoupent entre ces paralleles, les segmens  $BFDAB, DEBAD$ , seront égaux entr'eux. Car les triangles  $BFD, BED$ , qui sont entre les mêmes paralleles  $BD, EF$ , & qui ont la même base  $BD$ , sont égaux entr'eux; & partant si l'on ajoûte d'une part le segment  $DMFD$  plus le segment  $BADB$ , & de l'autre  $BMEB$  égal au segment  $DMFD$ , plus aussi le même segment  $BADB$ ; les tous  $BFDAB, DEBAD$ , seront égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

207. **D**E-LA on voit comment on peut couper par un point donné  $D$  sur une Séction Conique, deux segmens  $DGED, DFBD$ , égaux chacun à un segment donné  $BEDB$ . Car ayant tiré les droites  $BD, DE$ , & mené  $BG$  parallele à  $DE$ , &  $EF$  parallele à  $BD$ , lesquelles rencontrent la Séction aux points  $G, F$ ; il est clair \* en joignant la droite  $DF$ , que le segment  $DFBD$  est égal au segment  $BEDB$ , à cause des paralleles  $DB, EF$ ; & de même en joignant  $DG$ , que le segment  $DGED$  est égal au segment  $BEDB$ , à cause des paralleles  $BG, DE$ .

FIG. 112.

\* Art. 206.

Si le point donné tomboit sur l'une des extremités du segment donné que je suppose être à present  $DGED$ , il faudroit mener par l'autre extremité  $G$ , une parallele  $GF$  à la tangente qui passe par le point  $D$ ; & tirant par le point  $F$  où cette parallele rencontre la Séction, & par le point donné  $D$ , la soûtendante  $DF$ , il est clair que le segment  $DFBD$  sera égal au segment donné  $DGED$ .

Il est visible qu'il ne peut y avoir dans ce dernier cas que le seul segment  $DFBD$  qui soit égal au segment donné  $DGED$ ; puisque tout autre segment qui aura pour l'une de ses extremités le point donné  $D$ , sera plus grand ou moindre que le segment  $DFBD$ , selon que son autre extremité sera plus proche ou plus éloignée du point  $D$  que n'est le point  $F$ . D'où il suit que si deux segmens  $DGED, DFBD$ , qui ont une extremité commune  $D$ , sont égaux

entr'eux; & que si l'on mene par le point  $D$  une parallele à la droite  $GF$  qui joint leurs autres extremités, elle sera tangente en  $D$ .

## COROLLAIRE IV.

208. ON tire du Corollaire précédent une maniere toute nouvelle & fort aisée de mener une Tangente par un point donné  $D$  sur une Séction Conique donnée.

Car ayant tiré par ce point deux droites quelconques  $DB$ ,  $BE$ , qui rencontrent la Séction aux points  $B$ ,  $E$ , on menera par le point  $B$  une parallele  $BG$  à  $DE$ , & par le point  $E$  une parallele  $EF$  à  $BD$ , lesquelles rencontrent la Séction aux points  $G$ ,  $F$ , que l'on joindra par une ligne droite  $GF$ , à laquelle on tirera par le point  $D$  une parallele qui sera la tangente cherchée; puisque les segmens  $DGED$ ,  $DFBD$ , étant égaux chacun au même segment  $BEDB$ , le feront entr'eux.

## PROPOSITION IV.

## Theorème.

FIG. 113. 209. S'IL y a dans une Ellipse, dans une Hyperbole; 114. 115. ou dans les Hyperboles opposées deux lignes droites  $BD$ ,  $EF$ , paralleles entr'elles & terminées par la Séction; & qu'on tire du centre  $C$  les demi-diametres  $CB$ ,  $CE$ ,  $CD$ ,  $CF$ ; les Séc-teurs Elliptiques ou Hyperboliques  $CBE$ ,  $CDF$ , seront égaux entr'eux.

Car menant par les points de milieu  $H$ ,  $K$ , des droites  $BD$ ,  $EF$ , le diametre  $CK$ , les triangles  $CHB$ ,  $CHD$ , &  $CKE$ ,  $CKF$ , seront égaux entr'eux; puisqu'ils ont le même sommet  $C$ , & que leurs bafes  $HB$ ,  $HD$ , &  $KE$ ,  $KF$ , sont égales. Par conséquent (fig. 114.)  $KHBE + CBE = CKE - CHB = CKF - CHD = KHDF + CDF$ ; & (fig. 113. 115.)  $KHBE - CBE = +CHB + CKE = +CHD + CKF = KHDF - CDF$ . Donc puisque les Trapefes Coniques  $KHBE$ ,



$KHDF$ , sont \* égaux, il s'ensuit que les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques  $CBE$ ,  $CDF$ , le seront aussi. \* Art. 105.

## COROLLAIRE I.

210. Si la Section est une Ellipse, ou une Hyperbole; & que la ligne  $BD$  parallèle à  $EF$ , devienne tangente en  $A$ ; il est clair que les Secteurs  $CAE$ ,  $CAF$ , seront égaux entr'eux. Car prolongeant le demi-diamètre  $CA$  jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne  $EF$  au point  $K$ , cette ligne sera coupée en deux également en ce point; & par conséquent les triangles  $CKE$ ,  $CKF$ , seront égaux. Or les trilignes Coniques  $AKE$ ,  $AKF$ , le sont \* aussi. Donc &c. Fig. 113. 114. \* Art. 105.

## COROLLAIRE II.

211. DE-LA on voit que pour diviser en deux parties égales un Secteur Elliptique ou Hyperbolique quelconque  $CEF$ ; il n'y a qu'à mener le demi-diamètre  $CA$  qui divise par le milieu en  $K$  la soutendante  $EF$  de ce Secteur. Ce qui donne encore les Secteurs  $CBE$ ,  $CDF$ , égaux entr'eux, en supposant  $BD$  parallèle à  $EF$ . Car ayant de cette manière les Secteurs  $CAE$ ,  $CAF$ , &  $CAB$ ,  $CAD$ , égaux entr'eux, les Secteurs  $CBE$ ,  $CDF$ , qui en sont les différences, doivent aussi être égaux entr'eux.

## PROPOSITION V.

## Theorème.

212. SOIT un demi-cercle  $ADH$ , qui ait pour diamètre le premier ou grand axe  $AH$  d'une demi-Ellipse  $ABH$ ; soit menée par un point quelconque  $P$  de l'axe  $AH$ , une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point  $M$ , & le cercle au point  $N$ ; par où & par le centre  $C$  soient tirées les droites  $CM$ ,  $CN$ . Je dis que le Secteur Elliptique Fig. 116.

*CAM est au Secteur circulaire CAN, comme la moitié CB du petit axe de l'Ellipse, est à la moitié CA ou CD du grand.*

\* Art. 42. 55.

Car par la propriété \* de l'Ellipse  $\overline{PM}^2 \cdot \overline{CB}^2 :: AP \times PH. AC \times CH$  ou  $\overline{CA}^2$ , & par la propriété du cercle,  $\overline{PN}^2 \cdot \overline{CD}^2 :: AP \times PH. AC \times CH$  ou  $\overline{CA}^2$ . Donc  $\overline{PM}^2 \cdot \overline{CB}^2 :: \overline{PN}^2 \cdot \overline{CD}^2$ , ou  $\overline{PM}^2 \cdot \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 \cdot \overline{CD}^2$ . Et en tirant les racines quarrées,  $PM. PN :: CB. CD$  ou  $CA$ . Or comme cela arrive toujours en quelque endroit que tombe la perpendiculaire  $PMN$ , il s'ensuit \* que l'espace Elliptique entier  $ABHA$  est au demi-cercle  $ADHA$ , & la portion  $APM$  de cet espace à la portion  $APN$  du demi-cercle, comme  $CB$  est à  $CD$  ou à  $CA$ . Mais le triangle rectangle  $CPM$  est au triangle rectangle  $CPN$  qui a la même hauteur, comme la base  $PM$  est à la base  $PN$ , c'est à dire, comme  $CB$  est à  $CD$  ou à  $CA$ ; & par conséquent l'espace Elliptique  $APM$  plus ou moins le triangle  $CPM$  (plus lorsque  $AP$  est moindre que  $AC$ , & moins lorsqu'elle est plus grande) c'est à dire, le Secteur Elliptique  $CAM$  sera à l'espace circulaire  $APN$  plus ou moins le triangle  $CPN$ , c'est à dire, au Secteur circulaire  $CAN$ , comme  $CB$  est à  $CD$  ou à  $CA$ . Ce qu'il falloit démontrer.

### COROLLAIRE I.

213. COMME le Secteur de cercle  $CAN$  est égal au rectangle de l'arc  $AN$  par la moitié du rayon  $CA$  ou  $CD$ ; il s'ensuit que le Secteur Elliptique  $CAM$  est aussi égal au rectangle de ce même arc  $AN$  par la moitié de  $CB$ .

### COROLLAIRE II.

214. Si l'on mene par un point quelconque  $G$  du grand axe  $AH$  autre que le point  $P$ , une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point  $E$ , & le

cercle au point  $F$ ; je dis que les Secteurs Elliptiques  $ACE$ ,  $ACM$ , sont entr'eux, comme les Secteurs circulaires  $ACF$ ,  $ACN$ . Car  $ACM$ .  $ACN :: CB$ .  $CD$ . Et de même  $ACE$ .  $ACF :: CB$ .  $CD$ . Et partant  $ACM$ .  $ACN :: ACE$ .  $ACF$ . Et  $ACM$ .  $ACE :: ACN$ .  $ACF$ . D'où l'on voit que pour trouver un Secteur Elliptique  $ACM$ , qui soit au Secteur Elliptique  $ACE$  en raison donnée, il n'est question que de trouver un Secteur circulaire  $ACN$  qui soit en raison donnée au Secteur  $ACF$ , ou ce qui est la même chose, de diviser en raison donnée l'arc  $ANF$  ou l'angle  $ACF$ .

## PROPOSITION VI.

## Theorème.

215. S'IL y a deux demi-Hyperboles  $AM$ ,  $AN$ , ou  $BM$ ,  $DN$ , qui ayent pour centres le même point  $C$ , pour un de leurs demi-diametres la même droite  $CA$ , & pour les deux demi-diametres conjugués au demi-diametres  $CA$ , deux droites quelconques  $CB$ ,  $CD$ , situées sur la même ligne; & qu'on mène par un point quelconque  $P$  du demi-diametre  $CA$  (prolongé s'il est nécessaire) une droite parallèle à  $CD$ , laquelle rencontre les Hyperboles aux points  $M$ ,  $N$ ; par lesquels & par le centre  $C$ , soient tirées les droites  $CM$ ,  $CN$ : je dis que les Secteurs Hyperboliques  $CAM$ ,  $CAN$ , ou  $CBM$ ,  $CDN$ , seront entr'eux, comme les demi-diametres conjugués  $CB$ .  $CD$ . Fig. 117.  
118.

On aura par la propriété \* des deux Hyperboles  $AM$ ,  $AN$ , ou  $BM$ ,  $DN$ , ces deux proportions  $\overline{PM}^2$ .  $\overline{CB}^2 :: \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$ .  $\overline{CA}^2 :: \overline{PN}^2 - \overline{CD}^2$ . Et par conséquent  $\overline{PM}^2$ .  $\overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2$ .  $\overline{CD}^2$ . Et en prenant les racines quarrées,  $PM$ .  $PN :: CB$ .  $CD$ . Or comme cela arrive toujours en quelque endroit que tombe la parallèle  $PMN$ , il s'ensuit\* que les espaces Hyperboliques  $APM$ ,  $APN$ , ou  $CPMB$ ,  $CPND$ , sont entr'eux comme  $CB$  est à  $CD$ . Mais les triangles  $CPM$ ,  $CPN$ , sont en- \* Art. 81. &  
118.  
\* Art. 186.

tr'eux, comme leurs bases  $PM$ ,  $PN$ , ( puisqu'ils sont situés entre les mêmes parallèles  $CD$ ,  $PN$  ), ou comme les demi-diametres conjugués  $CB$ ,  $CD$ . Et par conséquent ( *fig. 117.* )  $CB. CD :: CPM - APM. CPN - APN :: CAM. CAN$ . Ou bien ( *fig. 118.* )  $CB. CD :: CPMB - CPM. CPND - CPN :: CBM. CDN$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

216. SI les deux demi-diametres conjugués  $CA$ ,  $CD$ , sont égaux entr'eux, l'Hyperbole  $AN$  ou  $DN$  sera équilatère. Et si l'on avoit trouvé le moyen de quarer les Sécteurs Hyperboliques  $CAN$ , ou  $CDN$ , on auroit aussi la quadrature des Sécteurs  $CAM$ , ou  $CBM$ , qui ont pour bases des portions  $AM$ , ou  $BM$  d'une autre Hyperbole, dont le demi-diametre conjugué  $CB$  peut être pris de telle grandeur qu'on veut ; puisque le rapport des Sécteurs Hyperboliques  $CAM$ ,  $CAN$ , ou  $CDN$ ,  $CBM$ , étant exprimé par les droites  $CD$ ,  $CB$ , est donné. D'où l'on voit que si l'on avoit la quadrature de l'Hyperbole équilatère, on auroit aussi celle de toutes les autres Hyperboles : de même qu'ayant \* la quadrature du Cercle, on auroit celle de toutes les Ellipses.

\* Art. 212.

## PROPOSITION VII.

## Theorème.

FIG. 119. 217. SI l'on prend sur une asymptote  $CN$  d'une Hyperbole  $EBDF$ , deux parties  $CK$ ,  $CL$ , qui soient entr'elles en même raison que deux autres parties quelconques  $CG$ ,  $CH$ , de la même asymptote ; & qu'ayant mené les parallèles  $GF$ ,  $HD$ ,  $KB$ ,  $LE$ , à l'autre asymptote  $CP$ , lesquelles rencontrent l'Hyperbole aux points  $F$ ,  $D$ ,  $B$ ,  $E$ , on tire les demi-diametres  $CF$ ,  $CD$ ,  $CB$ ,  $CE$  : je dis que les deux Sécteurs

Secteurs Hyperboliques  $CBE$ ,  $CDF$ , seront égaux entr'eux.

Ayant mené les deux droites  $BD$ ,  $EF$ , qui rencontrent les asymptotes aux points  $M$ ,  $O$ ,  $N$ ,  $P$ ; les parallèles  $KB$ ,  $HD$ , donneront cette proportion,  $MB.MK::DO.CH$ . Les parallèles  $LE$ ,  $GF$ , donneront aussi cette autre proportion,  $NE.NL::FP.CG$ . Et partant puisqu'il est \*  $MB=DO$ , &  $NE=FP$ , il s'ensuit que  $MK=CH$ , \* Art. 95. &  $NL=CG$ . Or par la supposition  $CG$  ou  $LN$ .  $CH$  ou  $KM::CK.CL::LE.KB$ . Et partant  $LN.LE::KM.KB$ . Donc les lignes  $NE$ ,  $MB$ , c'est à dire, les deux droites  $EF$ ,  $BD$ , dont elles font parties, seront parallèles entr'elles. Donc \* les Secteurs Hyperboliques  $CBE$ ,  $CDF$ , sont égaux entr'eux. *Ce qu'il fal. &c.* \* Art. 109.

COROLLAIRE I.

218. Si les parties  $CK$ ,  $CL$ , de l'asymptote  $CN$ , sont en même raison que deux parties quelconques  $CS$ ,  $CT$  de l'autre asymptote  $CP$ ; & qu'on mene les parallèles  $KB$ ,  $LE$ , à l'asymptote  $CP$ , & les parallèles  $SD$ ,  $TF$ , à l'autre asymptote  $CN$ ; il est clair que les Secteurs Hyperboliques  $CDF$ ,  $CBE$ , seront aussi égaux entr'eux. Car ayant mené les parallèles  $FG$ ,  $DH$ , à l'asymptote  $CP$ , on aura \*  $CG.CH::HD$  ou  $CS$ . \* Art. 100.  $GF$  ou  $CT$  \* ::  $CK.CL$ . Donc &c, \* Hyp.

COROLLAIRE II.

219. Si l'on prend sur la même asymptote la partie  $CK$  troisième proportionnelle à deux parties quelconques  $CG$ ,  $CH$ ; on prouvera par un raisonnement semblable à celui du Theorème que la ligne  $BF$  est parallèle à la tangente qui passe par le point  $D$ ; & qu'ainsi \* les Secteurs Hyperboliques  $CFD$ ,  $CDB$ , sont égaux entr'eux. D'où il suit que si l'on prend sur une asymptote autant de parties qu'on voudra  $CG$ ,  $CH$ ,  $CK$ ,  $CL$ , &c. en progression geometrique continuë, d'où partent les parallèles  $GF$ ,  $HD$ ,  $KB$ ,  $LE$ , &c. à l'au-

tre asymptote, les Sécteurs Hyperboliques  $CFD$ ,  $CDE$ ,  $CBE$ , &c. seront tous égaux entr'eux.

### COROLLAIRE III.

220. **D**E-LA on voit que si  $CH$  est la première de deux moyennes geometriquement proportionnelles entre les extrêmes  $CG$ ,  $CL$ ; & qu'on tire les droites  $GF$ ,  $HD$ ,  $LE$ , paralleles à l'autre asymptote, le Sécteur  $CDF$ , sera au Sécteur  $CDE$ , comme 1 est à 3. De même, si  $CH$  est la première de trois moyennes proportionnelles entre  $CG$ ,  $CL$ ; le Sécteur  $CDF$  sera au Sécteur  $CDE$ , comme 1 est à 4. Et en général, si la lettre  $m$  marque un nombre entier quelconque, & que  $CH$  soit la première d'autant de moyennes proportionnelles entre les extrêmes  $CG$ ,  $CL$ , que le nombre  $m - i$  contient d'unités, le Sécteur  $CDF$ , sera au Sécteur  $CDE$ , comme  $i$  est au nombre  $m$ .

### REMARQUE.

221. **O**N peut ici donner une idée fort exacte de ce qu'on appelle *Logarithmes* dans l'Arithmetique, & de l'extrême facilité qu'ils apportent au calcul, lorsqu'il s'agit d'operer sur de forts grands nombres. Voici comment :

Si l'on suppose que  $CG$ , exprime l'unité, & que  $CL$  étant decuple de  $CG$ , c'est à dire, 10, le Sécteur Hyperbolique  $CDE$ , soit divisé en 10000000000 parties égales. Et si l'on compose une table divisée en deux colonnes, dont la première renferme de suite tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & l'autre des nombres artificiels, placés vis-à-vis, & qui soient tels que  $CH$ , exprimant un nombre quelconque naturel, le nombre artificiel placé vis-à-vis, exprime le nombre des parties que le Sécteur Hyperbolique  $CDF$  contient par rapport au nombre des parties que contient le Sécteur

*C F E*: les nombres artificiels seront appellés les *Logarithmes* des nombres naturels auxquels ils répondent. Cela posé,

1°. Si l'on propose de multiplier deux nombres naturels quelconques *CH*, *CK*, l'un par l'autre, il n'y aura qu'à prendre dans la table leurs Logarithmes qui expriment les Secteurs *C F D*, *C F B*, & ajoutant ensemble ces deux Logarithmes, on aura le Logarithme qui exprime le Secteur *C F E*, vis-à-vis duquel sera placé le nombre naturel *C L* produit de la multiplication des deux nombres *CH*, *CK*.

2°. Si l'on propose de diviser le nombre *C L* par le nombre *CK*, il n'y aura qu'à retrancher le Logarithme *C F B* du Diviseur *CK*, du Logarithme *C F E* du nombre à diviser *C L*, pour avoir le Logarithme *C B E* ou *C F D* du quotient *CH*.

3°. Si l'on propose d'extraire une racine quelconque du nombre *C L*, par exemple la cubique, il n'y aura qu'à diviser son Logarithme *C F E* en trois parties égales, pour avoir le Logarithme *C F D* vis-à-vis duquel est placé le nombre *CH*, qui est la racine cubique cherchée.

Tout cela est une suite de ce que les Secteurs Hyperboliques *C F D*, *C B E*, sont égaux entr'eux, lorsque *CG. CH :: CK. CL*. Et que les Secteurs *C F D*, *C D B*, *C B E*, &c. sont aussi égaux entr'eux, lorsque *CG. CH :: CH. CK :: CK. CL :: &c.* Il est donc évident que par le moyen de cette table, on pourra abréger extrêmement les opérations de l'Arithmétique, lorsqu'il s'agit d'operer sur de grands nombres, comme dans les calculs Astronomiques.

Comme l'on n'a pû jusqu'à présent trouver en nombres exacts, le rapport des Secteurs Hyperboliques *C F D*, *C F B*, &c. au Secteur *C F E*, on s'est contenté d'exprimer ce rapport en nombres fort approchans; & par le moyen de ces nombres qu'on appelle *Artificiels*, & des nombres naturels qu'on a pla-

cés vis-à-vis, on a composé la Table des Logarithmes qui a les propriétés qu'on vient d'expliquer. Or dans la supposition que le Secteur  $CFE$  Logarithme de  $CZ(10)$  contient 10000000000 parties égales, on trouvera que le parallelogramme  $CGFT$  contient plus de 4342944818 de ces parties, & moins de 4342944819. D'où l'on voit qu'un Secteur Hyperbolique quelconque  $CBF$ , est au parallelogramme  $CGFT$  à peu près comme le Logarithme du nombre  $CZ$  trouvé dans la Table, est au nombre 4342944819, & cela en prenant les Logarithmes de dix caractères outre la caractéristique.

## PROPOSITION VIII.

## Theorème.

FIG. 120. 222. S'IL y a sur chaque asymptote deux parties  $CG$ ,  $CL$ , &  $CR$ ,  $CS$ , qui soient telles que  $\bar{V}CG. \bar{V}CL :: \bar{V}CR. \bar{V}CS$ ; & qu'on tire les droites  $GF, LE, RT, SV$ , paralleles aux asymptotes: je dis que le Secteur  $CFE$ , sera au Secteur  $CTV$ , comme  $m$  est à  $n$ . Les lettres  $m$  &  $n$  marquent des nombres entiers quelconques.

Car si l'on fait  $\bar{V}CG. \bar{V}CL :: CG. CH$ . Et  $\bar{V}CR. \bar{V}CS :: CR. CQ$ . Et qu'on tire les droites  $HD, QN$ , paralleles aux asymptotes; il est clair que les Secteurs Hyperboliques  $CFD, CTN$ , seront égaux \* entr'eux, puisque \*  $CG. CH :: CR. CQ$ . Or selon la nature des Progressions geometriques, la ligne  $CH$  sera la première d'autant de moyennes proportionnelles entre  $CG$  &  $CZ$  que le nombre  $m-i$  contient d'unités, & de même la ligne  $CQ$  sera la première d'autant de moyennes proportionnelles entre  $CR$  &  $CS$  que le nombre  $n-i$  contient d'unités. Donc \*  $CFE. CFD :: m.i$ . Et  $CTN$  ou  $CFD. CTV :: i.n$ . Et par conséquent le Secteur  $CFE$  est au Secteur  $CTV$  en raison composée de  $m$  à  $i$ , & de  $i$  à  $n$ , c'est à dire, comme le nombre  $m$  est au nombre  $n$ . Ce qu'il falloit démontrer.

\* Art. 218.

\* Hyp.

\* Art. 220.



## COROLLAIRE.

223. D E-LA on voit qu'un Sécteur Hyperbolique  $C F E$  étant donné avec un point quelconque  $T$  de l'Hyperbole, il ne faut pour trouver un autre point  $V$  de la même Hyperbole, tel que le Sécteur  $C F E$  soit au Sécteur  $C T V$ , comme  $m$  est à  $n$ , que prendre  $C S$  en sorte que  $\sqrt{C G} . \sqrt{C L} :: \sqrt{C R} . \sqrt{C S}$ , ou (ce qui revient au même)  $\sqrt{C G} . \sqrt{C L} :: C R . C S$ . C'est à dire, qu'il faut prendre  $C S = C R \times \sqrt{\frac{C L}{C G}}$ .

## PROPOSITION IX.

## Theorème.

224. S I l'on mène par les extrémités  $B, F$ , d'un Sécteur FIG. 121.  
Hyperbolique quelconque  $C B F$ , les droites  $B K, F G$ , parallèles à une asymptote  $C S$ , & terminées par l'autre  $C L$ ; je dis que le Sécteur Hyperbolique  $C B F$  est égal à l'espace hyperbolique  $B K G F$  compris entre les parallèles  $B K, F G$ , à une asymptote  $C S$ , la partie  $G K$  de l'autre asymptote  $C L$ , & la portion  $B F$  de l'Hyperbole.

Car si l'on retranche des triangles égaux \*  $C K B$ , \* Art. 99.  $C G F$ , le même triangle  $C G A$  (le point  $A$  est le point d'intersection des deux droites  $F G, C B$ ) & qu'on ajoute aux deux restes  $B K G A, C A F$ , le même espace hyperbolique  $B A F$ , on formera d'une part l'espace  $B K G F$ , & de l'autre le Sécteur  $C B F$  qui seront égaux entr'eux. Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

225. S I l'on eut mené les lignes  $B Q, F O$ , parallèles à l'asymptote  $C L$ , & terminées par l'asymptote  $C S$ , on auroit prouvé de même que le Sécteur Hyperbolique

T iij

$CBF$  est égal à l'espace hyperbolique  $BQOF$ ; d'où l'on voit que les espaces ou Trapezes hyperboliques  $BKGF$ ,  $BQOF$ , sont égaux entr'eux.

## COROLLAIRE II.

226. **D**E-LA il est évident que tout ce qu'on vient de démontrer dans les articles 217, 218, 219, 220, 221, 222, & 223, des Secteurs Hyperboliques, se doit aussi entendre de ces sortes de Trapezes; puisqu'ils leurs sont égaux.

## PROPOSITION X.

## Theorème.

FIG. 122.

227. **S**OIENT deux différentes Hyperboles  $BMF$ ,  $HND$ , qui aient les mêmes asymptotes  $CL$ ,  $CS$ , & soient menées par deux points quelconques  $G$ ,  $K$ , d'une asymptote deux parallèles  $GDF$ ,  $KHB$ , à l'autre. Je dis que l'espace hyperbolique  $HKGD$  est à l'espace hyperbolique  $BKGF$ , comme la puissance de l'Hyperbole  $HND$ , est à la puissance de l'Hyperbole  $BMF$ .

Car ayant mené par un point quelconque  $P$  de la partie  $GK$ , une parallèle aux deux droites  $GD$ ,  $KH$ , laquelle rencontre l'Hyperbole  $BMF$  au point  $M$ , & l'Hyperbole  $HND$  au point  $N$ ; & nommé la puissance de l'Hyperbole  $HND$ ,  $aa$ ; celle de l'Hyperbole  $BMF$ ,  $bb$ ; & l'indéterminée  $CP$ ,  $x$ ; on aura

\* Art. 101. \*  $PN = \frac{aa}{x}$ , &  $PM = \frac{bb}{x}$ ; & partant  $PN. PM :: aa. bb$ .

\* Art. 186. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la partie  $GK$  que tombe le point  $P$ ; il s'ensuit \* que l'espace hyperbolique  $HKGD. BKGF :: aa. bb$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

228. **L**ORSQUE les puissances des Hyperboles  $HND$ ,  $BMF$ , sont entr'elles, comme le nombre  $m$  est au nom.

bre  $n$ ; on pourra toujours trouver dans l'Hyperbole  $HND$  un Trapeze hyperbolique  $RSVT$  égal à un Trapeze hyperbolique  $GKBF$  de l'autre  $BMF$ , les droites  $CG, CK, CR$ , étant données. Car il est clair \* que le Trapeze  $GKHD$  est au Trapeze  $GKBF$ , comme  $m$  est à  $n$ ; & qu'ainsi toute la difficulté se réduit à trouver dans la même Hyperbole  $HND$ , le Trapeze  $RSVT$ , qui soit au Trapeze  $GKHD$ , comme le nombre  $n$  est au nombre  $m$ : & c'est ce qui se fera \* en prenant  $CS$ , telle que  $\sqrt{CG} \cdot \sqrt{CK} :: CR \cdot CS$ . \* Art. 122.  
§ 225.  
\* Art. 123.  
§ 226.

### DEFINITIONS.

4-

Soit une ligne droite indéfinie  $AC$ , qui ait pour origine le point fixe  $A$ ; & soit une ligne courbe  $AMB$  telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  une droite  $MP$  qui fasse avec  $AC$  un angle donné  $APM$ , & ayant nommé les indéterminées  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; on ait toujours  $ax = yy$  (la lettre  $a$  marque une ligne donnée); il est clair \* dans cette supposition que la ligne courbe  $AMB$  est une Parabole qui a pour diamètre la ligne  $AC$ , pour une ordonnée à ce diamètre la droite  $PM$ , & pour parametre de ce diamètre la donnée  $a$ . Mais si l'on suppose à présent que la nature de la courbe  $AMB$  soit exprimée par l'équation  $y^3 = ax$ , ou par cette autre  $y^3 = axx$ ; cette ligne courbe sera nommée *Parabole cubique* ou *du troisième degré*; parce que celle des deux indéterminées  $x$  ou  $y$ , dont la puissance est la plus élevée, monte au troisième degré. De même si l'équation est  $y^4 = a^3x$ , ou  $y^4 = ax^3$ ; la ligne courbe  $AMB$  est appelée *Parabole du quatrième degré*; parce que l'indéterminée  $y$  dont la puissance est la plus haute, monte au quatrième degré. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini. FIG. 123.  
\* Art. 129.

5.

Soit comme dans la définition précédente une ligne droite  $AC$  qui ait pour origine le point fixe  $A$ ; & soit FIG. 124

une ligne courbe  $BM$ , telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  la droite  $MP$  qui fasse avec  $AC$  un angle donné  $APM$ , & ayant nommé  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; on ait toujours  $xy = aa$  ( la lettre  $a$  marque une ligne donnée ): il est clair\* que cette ligne courbe sera une Hyperbole, qui aura pour l'une de ses asymptotes la ligne  $AC$ , & pour l'autre, la ligne  $AD$  parallèle à  $PM$ , & dont la puissance sera le quarré  $aa$ . Mais si l'équation qui exprime la nature de la courbe  $BM$  est  $xy = a^3$ ; cette ligne courbe sera nommée *Hyperbole cubique* ou *du troisième degré*, parce que le produit  $xy$  des deux indéterminées  $x$  &  $y$ , a trois dimensions. De même, si l'équation étoit  $x^3y = a^4$ ; la ligne courbe  $BM$  seroit une *Hyperbole du quatrième degré*; parceque le produit  $x^3y$  a quatre dimensions. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini,

\* Art. 101.

## COROLLAIRE.

FIG. 123.  
124.

229. Si l'on suppose que la lettre  $m$  marque un nombre entier quelconque qui soit l'exposant de la puissance de l'indéterminée  $AP(x)$ ; & de même que la lettre  $n$  marque l'exposant de la puissance de l'autre indéterminée  $PM(y)$ ; il est clair que l'équation  $y^n = x^m$  ou  $x a^{n-m}$  ( ou simplement  $y^n = x^m$ , en faisant pour abréger la donnée  $a = 1$  ) exprimera la nature des Paraboles de tous les degrés à l'infini. On voit de même que l'équation  $x^m y^n = a^{m+n}$  ( ou simplement  $x^m y^n = 1$ , en faisant  $a = 1$  ) exprime en general la nature des Hyperboles de tous les degrés à l'infini,

## COROLLAIRE II.

230. Si l'on mené par l'origine fixe  $A$  de la ligne  $AC$  une ligne droite indéfinie  $AD$  parallèle à  $PM$ ; & qu'ayant tiré  $MK$  parallèle à  $AC$ , qui rencontre  $AD$  au point  $K$ , on nomme les indéterminées  $AK, x$ ;  $KM, y$ ; il

il est clair que l'indéterminée  $x$  qui exprimoit auparavant la ligne  $AP$  ou  $MK$ , devient à présent  $y$ ; & qu'au contraire  $y$  qui exprimoit  $PM$  ou  $AK$ , devient à présent  $x$ . D'où il suit.

1°. Que si la courbe  $AMB$  est une Parabole ordinaire. FIG. 123.  
 re, elle aura pour équation  $yy = ax$  ou  $xx = ay$ , selon qu'on rapportera ses points à ceux de la ligne  $AC$  ou  $AD$ ; & de même que la Parabole cubique qui a pour équation  $y^3 = aax$  lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne  $AC$ , aura pour équation  $x^3 = aay$  lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne  $AD$ ; & en general que si la ligne courbe  $AMB$  a pour équation  $y^n = x^m a^{n-m}$  étant rapportée à la ligne droite  $AC$ , cette même courbe aura pour équation  $x^n = y^m a^{n-m}$  (l'on suppose que  $n$  surpasse  $m$ ) étant rapportée à la ligne  $AD$ .

2°. Que l'Hyperbole ordinaire a toujours la même FIG. 124.  
 équation  $xy = aa$ , soit qu'on la rapporte à la ligne  $AC$  ou à la ligne  $AD$ ; que l'Hyperbole cubique qui a pour équation  $xxxy = a^3$  étant rapportée à  $AC$ , aura pour équation  $xyy = a^3$  étant rapportée à l'autre ligne  $AD$ ; & en general que l'Hyperbole qui a pour équation  $x^m y^n = a^{m+n}$  lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne  $AC$ , aura pour équation  $x^n y^m = a^{m+n}$  lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne  $AD$ .

### COROLLAIRE III.

231. DE LA il est évident qu'il y a deux Paraboles cubiques dont l'une a pour équation  $y^3 = aax$  ou  $x^3 = aay$ , & l'autre  $y^3 = axx$  ou  $x^3 = ayy$ ; au lieu qu'il n'y a qu'une seule Hyperbole cubique  $xxxy = a^3$  ou  $xyy = a^3$ . Car les indéterminées  $x$  &  $y$  ne peuvent être combinées que des quatre premières manières pour exprimer les Paraboles cubiques ou du troisième degré; & des deux secondes pour exprimer les Hyperboles cubiques. Or comme les quatre premières égalités appartiennent à deux différentes courbes, & les deux secondes à la même; il s'ensuit, &c. On peut trouver par

la même voie le nombre des Paraboles ou des Hyperboles du quatrième, cinquième degré, &c.

## COROLLAIRE IV.

FIG. 124. 232. **N**ON-SEULEMENT l'Hyperbole ordinaire a pour asymptotes les lignes droites indéfinies  $AC$ ,  $AD$ ; mais encore celle de tous les degrés à l'infini. Car soit l'équation générale  $x^m y^n = a^{m+n}$  ou  $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^n}$  ( $AP = x$ ,  $PM = y$ ) qui exprime la nature de telle Hyperbole qu'on voudra, lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne  $AC$ ; il est manifeste que plus  $AP(x)$  augmente, plus au contraire  $y^n$ , & par conséquent  $PM(y)$  diminue; de sorte que  $x$  étant infiniment grande,  $PM(y)$  devient nulle ou zero: c'est à dire que l'Hyperbole  $BM$  & la ligne  $AC$ , étant prolongées l'une & l'autre à l'infini, s'approchent toujours de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin elles se joignent dans l'infini même; ce qui constitue l'essence d'une asymptote. Maintenant si l'on rapporte les points de la même Hyperbole à ceux de la ligne  $AD$ , on aura  $x^n y^m = a^{m+n}$  ou  $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$  ( $AK = x$ ,  $KM = y$ ); d'où il suit que plus  $AK(x)$  devient grande, plus au contraire  $KM(y)$  devient petite, & cela à l'infini; & qu'ainsi la ligne  $AD$  est encore une asymptote de la même Hyperbole.

## PROPOSITION XL

## Problème.

FIG. 123. 233. **S**oit proposé de mener d'un point donné  $M$  sur la seconde Parabole cubique  $AMB$ , dont la nature est exprimée par l'équation  $y^3 = axx$ , la tangente  $MT$ .

Ayant supposé l'arc  $MN$  infiniment petit, & mené  $NQ$  parallèle à  $PM$ , &  $MR$  parallèle à  $AC$ : le petit triangle  $MNR$  sera semblable au grand  $TPM$ ; puisque le

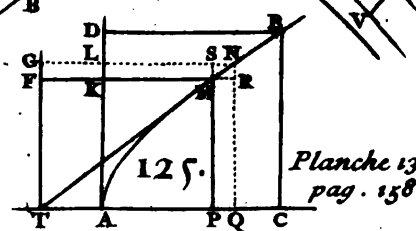
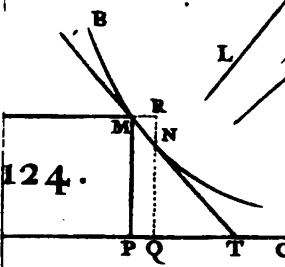
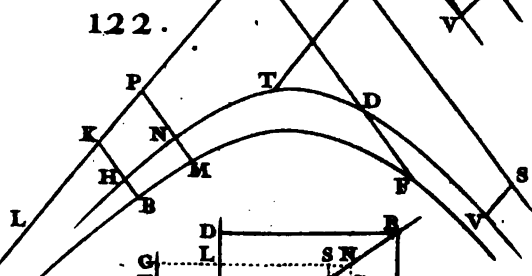
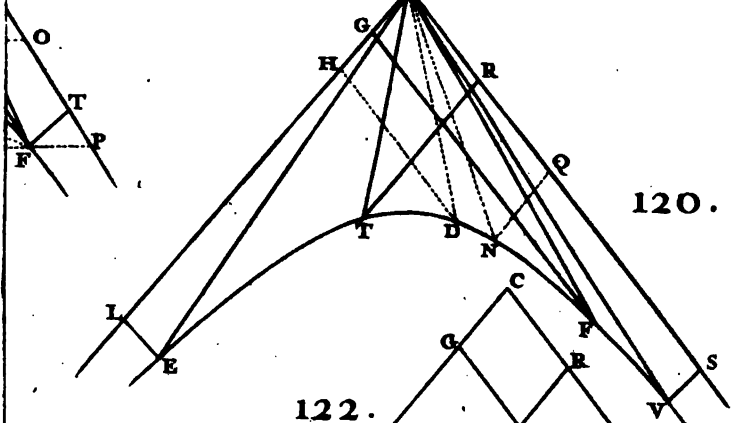
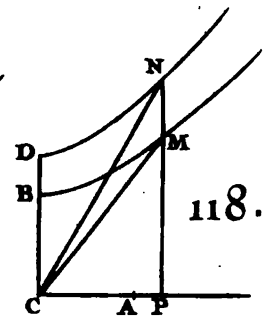
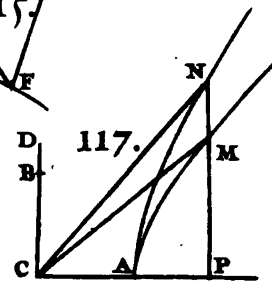
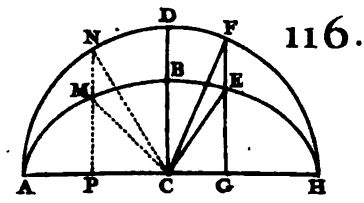
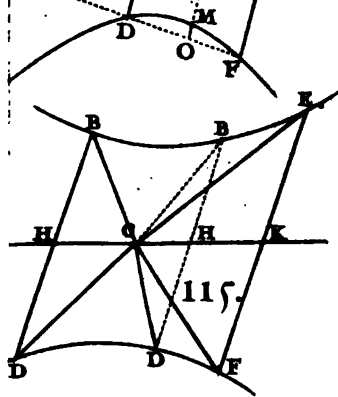
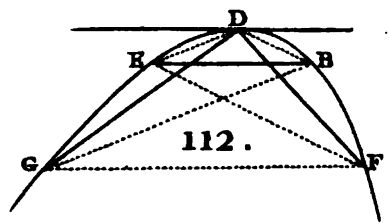
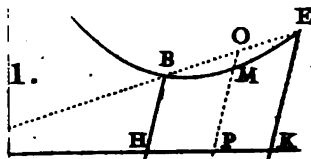
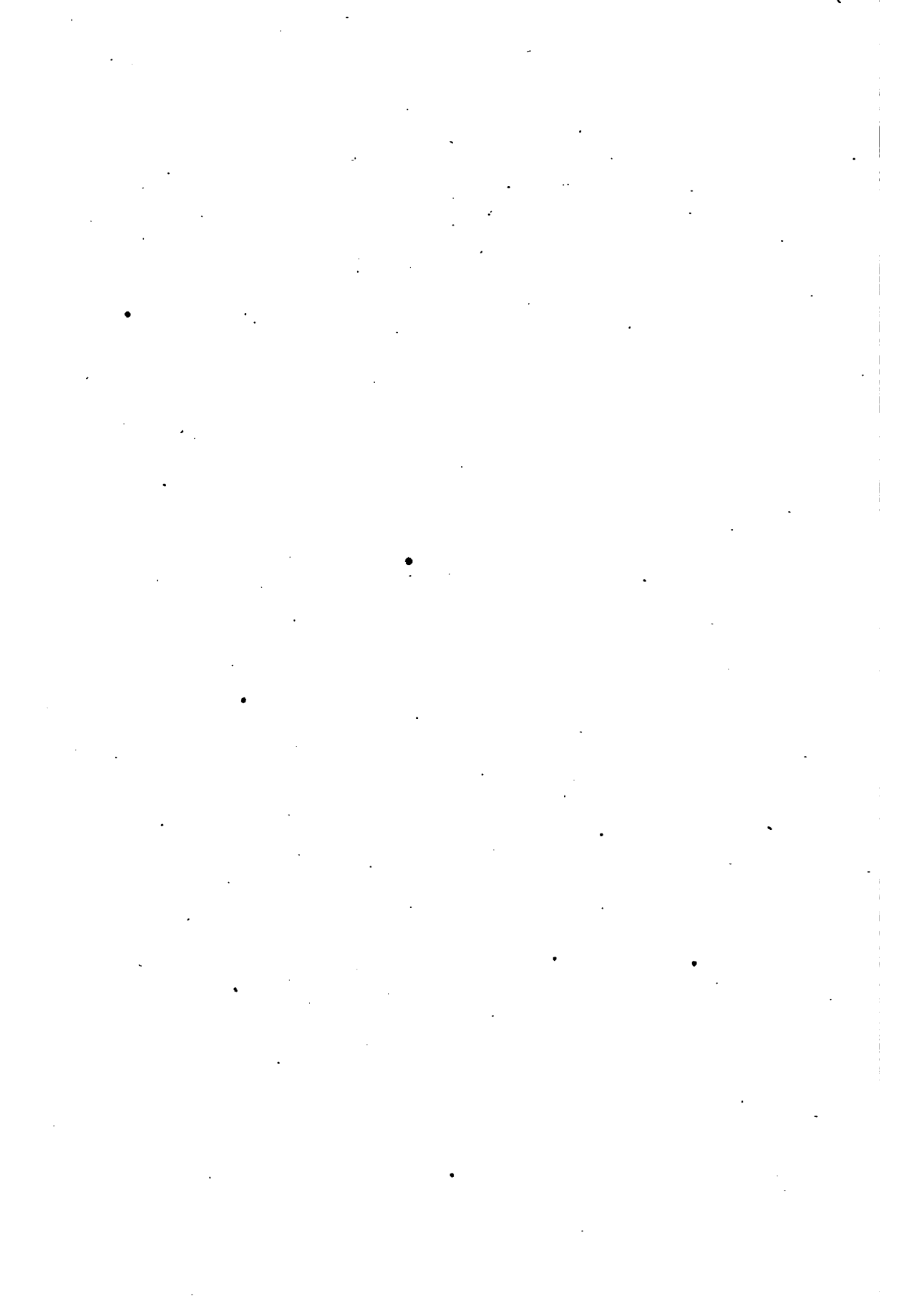


Planche 13.  
pag. 158.







petit arc  $MN$  peut être regardé \* comme la prolongation de la tangente  $TM$ . Cela posé, on nommera la soutangente cherchée  $TP$ ,  $s$ ; & la petite droite  $PQ$  ou  $MR$ ,  $e$ ; ce qui donnera  $RN = \frac{y^2}{e}$ , à cause des triangles semblables  $TPM$ ,  $MRN$ . Or si l'on met le cube de  $QN$  ( $y + \frac{y^2}{e}$ ) à la place de  $y^3$  dans l'équation  $y^3 = axx$  qui exprime la nature de la courbe  $AMB$ ; & à la place de  $xx$ , le quarré de  $AQ$  ( $x + e$ ): il est évident qu'on formera une équation  $y^3 + \frac{3y^2}{e} + \frac{3ye^2}{e^2} + \frac{e^3}{e^3} = axx + 2eax + eea$  qui exprimera le rapport de  $AQ$  à  $QN$ . Et si l'on retranche par ordre des deux membres de cette dernière équation ceux de la première, & qu'on divise ensuite par  $e$ , on trouvera  $\frac{y^2}{e} + \frac{3y^2}{e} + \frac{3y^2}{e} = 2ax + ea$ ; dans laquelle effaçant tous les termes où  $e$  se rencontre, parce que  $PQ$  ( $e$ ) étant infiniment petite ou nulle, ces termes sont nuls par rapport aux autres; il vient enfin  $\frac{y^2}{e} = 2ax$ ; & partant  $PT(s) = \frac{y^2}{2ax} = \frac{1}{2}x$  en mettant pour  $y^2$  sa valeur  $axx$ . *Ce qu'il falloit trouver.*

## REMARQUE.

234. Si l'on fait attention sur le calcul précédent, on verra avec évidence qu'en substituant à la place de la puissance de  $y$ , une pareille puissance de  $y + \frac{y^2}{e}$ , on n'a besoin que des deux premiers termes de cette puissance. Car tous les autres étant multipliés par les puissances de  $e$ , ils renferment chacun  $e$ , ou des puissances de  $e$ , dans la dernière équation que l'on trouve à la fin de l'opération; & doivent par conséquent être effacés. Il en est de même lorsqu'on substitue à la place de la puissance de  $x$ , une pareille puissance de  $x + e$ . Mais si l'on forme de suite

toutes les puissances du binome  $x + e$ , on aura pour les deux premiers termes de la seconde puissance  $x^2 + 2ex$ ; de la troisième  $x^3 + 3exx$ ; de la quatrième  $x^4 + 4ex^2$ ; de la cinquième  $x^5 + 5ex^3$ ; & ainsi de suite à l'infini. De sorte que les deux premiers termes d'une puissance quelconque  $m$  de  $x + e$ , seront  $x^m + mex^{m-1}$ . On trouvera de même que les deux premiers termes d'une puissance quelconque  $n$  du binome  $y + \frac{y^n}{n}$ , seront  $y^n + \frac{ny^n}{n}$ .

## COROLLAIRE.

235. DE-LA on voit que pour trouver une expression générale de la soutangente  $PT$  ( $s$ ) des Paraboles de tous les degrés à l'infini; il n'y aura qu'à se servir de l'équation générale  $y^n = x^m a^{n-m}$ , ou (prenant  $a$  pour l'unité)  $y^n = x^m$  qui exprime la nature de toutes ces Paraboles. Voici comment.

On mettra dans l'équation générale  $y^n = x^m$  à la place de  $y^n$ , les deux premiers termes de la puissance  $n$  de  $y + \frac{y^n}{n}$ , c'est à dire,  $y^n + \frac{ny^n}{n}$ ; & de même à la place de  $x^m$ , les deux premiers termes de la puissance  $m$  de  $x + e$ , c'est à dire,  $x^m + mex^{m-1}$ : ce qui donnera  $y^n + \frac{ny^n}{n} = x^m + mex^{m-1}$ . Et retranchant par ordre les membres de la première équation de ceux de celle-ci, & divisant ensuite par  $e$ , l'on aura  $\frac{ny^n}{n} = mx^{m-1}$ ; & partant  $s = \frac{ny^n}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$  en mettant pour  $y^n$  sa valeur  $x^m$ .

## PROPOSITION XII.

## Problème.

FIG. 124. 236. MENER les tangentes des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

La même préparation étant faite que dans la propo-

sition précédente, on mettra dans l'équation générale  $x^m y^n = a^{m+n}$  qui exprime le rapport de  $AP(x)$  à  $PM(y)$ ; à la place de  $x^m$  les deux premiers termes de la puissance  $m$  de  $AQ(x + e)$  c'est à dire,  $x^m + m e x^{m-1}$ ; & de même à la place de  $y^n$  les deux premiers termes de la puissance  $n$  de  $QN(y - \frac{e}{s})$  c'est à dire  $y^n - \frac{n e y^{n-1}}{s}$ ; ce qui par la multiplication donne cette autre équation  $x^m y^n + m e y^n x^{m-1} - \frac{n e y^n x^m}{s} - \frac{m n e^2 y^{n-1} x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$  qui exprimera le rapport de  $AQ$  à  $QN$ . Et retranchant par ordre des deux membres de cette dernière équation, ceux de la première; & divisant ensuite par  $e y^n$ ; il vient  $m x^{m-1} - \frac{n x^m}{s} - \frac{m n e x^{m-1}}{s} = 0$ ; dans laquelle équation effaçant le terme  $-\frac{m n e x^{m-1}}{s}$  qui est nul par rapport aux deux autres, parce qu'il renferme dans son expression la ligne infiniment petite ou nulle  $PQ(e)$ , on trouve en transposant à l'ordinaire  $PT(s) = \frac{n x^m}{m n - 1} = \frac{s}{m} x$ .

## COROLLAIRE.

237. IL est donc évident que pour mener la Tangente  $MT$  d'un point donné  $M$  sur une Parabole ou une Hyperbole de tel degré qu'on voudra; dont l'équation est pour la Parabole  $y^n = x^m a^{n-m}$ , & pour l'Hyperbole  $x^m y^n = a^{m+n}$ : il ne faut que prendre la sous-tangente  $PT = \frac{s}{m} AP$  du même côté du point  $A$  par rapport au point  $P$ , lorsque c'est une Parabole; & du côté opposé, lorsque c'est une Hyperbole.

FIG. 113.

224.

## PROPOSITION XIII.

## Theorème.

238. *FIG. 125.* SOIT comme dans la définition quatrième, une Parabole  $AMB$  de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation  $y^n = x^m a^{n-m}$ : soit menée d'un de ses points quelconques  $B$  la droite  $BC$  qui fasse avec  $AC$  l'angle donné  $ACB$ , & soit achevé le parallélogramme  $ACBD$ . Je dis que le parallélogramme circonscrit  $ACBD$  est à l'espace Parabolique  $ACBMA$  compris par les droites  $AC$ ,  $CB$ , & par la portion de Parabole  $AMB$ ; comme  $m - 1$  est à  $n$ . Il faut prouver que  $ACBD : ACBMA :: m - 1 : n$ .

Ayant supposé sur la portion de Parabole  $AMB$  l'arc  $MN$  infiniment petit, où si l'on aime mieux, indéfiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune portion donnée de la Parabole, si petite qu'elle puisse être; & mené les droites  $MP$ ,  $NQ$ , parallèles à  $BC$ ; &  $MK$ ,  $NL$ , parallèles à  $AC$ ; lesquelles forment par leurs rencontres le petit parallélogramme  $MRNS$ : on tirera la tangente  $MT$  qui rencontre le diamètre  $AC$  au point  $T$ , par où l'on menera une parallèle à  $CB$ , qui rencontre les lignes  $MK$ ,  $NL$ , aux points  $F$ ,  $G$ . Cela fait, \* *Art. 189.* on regardera \* le petit arc  $MN$  comme l'un des petits côtés du Polygone qui compose la portion de Parabole  $AMB$ , & la tangente  $MT$  comme le prolongement de ce petit côté; de sorte que l'on a deux triangles rétilignes  $NRM$ ,  $MPT$ , qui sont semblables: c'est pourquoi  $NR$  ou  $MS$ .  $RM :: MP$ ,  $PT$  ou  $MF$ . Et partant le parallélogramme  $PMRQ$  est égal au parallélogramme  $FMSG$ ; puisque les angles  $PMR$ ,  $FMS$ , sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont réciproquement proportionnels, \* *Art. 137.* Or \*  $MF$  ou  $PT = \frac{n}{m} AP$  ou  $\frac{n}{m} MK$ . Donc aussi le parallélogramme  $FMSG$  ou son égal  $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$ . Et comme cela arrive toujours en quel-

que endroit de la portion de Parabole  $AMB$  que tombe le petit arc  $MN$ ; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes  $PMRQ$ , c'est à dire, \* le \* *Art.* 184.

Triligne parabolique  $ACBMA = \frac{n}{m} ADBMA$  somme de tous les petits parallelogrammes  $\frac{n}{m} KMSL$ . On aura donc  $ADBMA. ACBMA :: m. n$ . Et par conséquent  $ADBMA + ACBMA$  ou  $ACBD. ACBMA :: m + n. n$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

239. DE LA il est évident que le Triligne parabolique  $APM$  est au parallelogramme circonscrit  $APMK$ , comme  $n$  est à  $m + n$ : & qu'ainsi le Trapeze parabolique  $MPCB = \frac{n}{m+n} ABCD - \frac{n}{m+n} APMK$ ; puis que  $ACBMA = \frac{n}{m+n} ACBD$ , &  $APM = \frac{n}{m+n} APMK$ .

## PROPOSITION XIV.

## Theorème.

240. SOIT comme l'on a expliqué dans la définition *FIG. 126.* cinquième, une Hyperbole  $BMO$  de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation  $x^m y^n = a^{m+n}$ : soit menée d'un de ses points quelconques  $B$  la ligne  $BC$  parallèle à l'une des asymptotes  $AD$ , & terminée par l'autre en  $C$ ; & soit achevé le parallelogramme  $ACBD$ . Je dis que ce parallelogramme inscrit  $ACBD$  est à l'espace hyperbolique  $ECBMO$  renfermé par la droite déterminée  $BC$ , par la ligne  $CE$  prolongée à l'infini du côté de  $E$ , & par la portion d'Hyperbole  $BMO$ , prolongée aussi à l'infini du côté de  $O$ ; comme  $m - n$  est à  $n$ .

Il faut prouver que  $ACBD. ECBMO :: m - n. n$ .

La même préparation étant faite que dans la proposition précédente, on prouvera de la même manière que le petit parallelogramme  $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$ .

Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la portion d'Hyperbole  $BMO$  que tombe le petit arc  $MN$ ; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes  $PMRQ$ , c'est à dire, \* l'espace  $ECBMO = \frac{n}{m} EADBMO$  somme de tous les petits parallelogrammes  $\frac{n}{m} KMSL$ . On aura donc  $EADBMO. ECBMO :: m. n$ ; & partant  $EADBMO - ECBMO$ , ou  $ACBD. ECBMO :: m - n. n$ . *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE I.

241. **D**E-LA il est évident que le Trapeze hyperbolique  $CPMB = \frac{n}{m-n} ACBD - \frac{n}{m-n} APMK$ ; puis que  $ECBMO = \frac{n}{m-n} ACBD$ , & que par la même raison l'espace  $EPMO = \frac{n}{m-n} APMK$ .

## COROLLAIRE II.

242. **D**E-LA il suit:

1°. Que lorsque  $m$  surpasse  $n$ ; le rapport du parallelogramme inscrit  $ACBD$  à l'espace  $ECBMO$  indéfiniment étendu du côté de  $E$ , sera toujours exprimé par des nombres positifs; & qu'ainsi on aura toujours dans ce cas la quadrature absolue de cet espace.

2°. Que lorsque  $m = n$ , ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire; on trouve que le parallelogramme  $ACBD$  est à l'espace hyperbolique  $ECBMO$ , comme zero est à l'unité: c'est à dire que cet espace est infini par rapport au parallelogramme inscrit  $ACBD$ .

3°. Que lorsque  $m$  est moindre que  $n$ ; le parallelogramme inscrit  $ACBD$  sera à l'espace hyperbolique  $ECBMO$  comme un nombre negatif à un nombre positif: ce qui fait voir alors que la raison de cet espace au parallelogramme  $ACBD$ , est pour ainsi dire plus qu'infinité. Mais on doit remarquer dans ce dernier cas, que

que l'espace hyperbolique renfermé par la droite  $DB$ , par l'asymptote  $AD$  prolongé à l'infini du côté de  $D$ , & par l'Hyperbole  $OMB$  aussi prolongée à l'infini du côté de  $B$ , sera au parallelogramme inscrit  $ACBD$ , comme  $m$  est à  $n-m$ , c'est à dire, que cet espace sera quarrable; car prenant les indéterminées ( $x$ ) sur l'asymptote  $AD$ , au lieu qu'on les avoit prises sur l'asymptote  $AC$ , l'équation à l'Hyperbole deviendra  $*x*y^m*$  Art. 130.  $=a^{m+1}$ .

## PROPOSITION XV.

## Theorème.

243. SOIT dans l'angle droit  $CAD$  une ligne courbe quelconque  $AMB$ , dont l'on sçache mener les tangentes  $MT$ ; F 16. 127. & soit dans l'angle  $DAH$  qui est à côté de celui ci, une autre ligne courbe  $HFE$ , telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques  $F$  la ligne  $FM$  parallele à  $AC$ , qui rencontre en  $K$  la ligne  $AD$ , & en  $M$  la premiere courbe  $AMB$ , & ayant tiré la tangente  $MT$  qui rencontre  $AC$  au point  $T$ : on ait toujours comme  $AK$  est à  $MT$ , ainsi une ligne constante  $a$  qui demeure toujours la même en quelque endroit que tombe le point  $F$ , est à  $KF$ . Je dis que si par un point quelconque  $D$  de la ligne  $AD$  l'on mene une ligne droite  $EB$  parallele à  $AC$  & termin'e par les deux courbes; l'espace  $ADEFH$  sera égal au rectangle de la courbe  $AMB$  par la constante  $a$ .

Il faut prouver que  $ADEFH = AMB \times a$ .

Ayant supposé par tout où l'on voudra sur la courbe  $AMB$  l'arc  $MN$  infiniment petit, & mené les droites  $MF, NG$ , paralleles à  $AC$ , & qui rencontrent la droite  $AD$  aux points  $K, L$ , & la courbe  $HFE$  aux points  $F, G$ , on tirera les droites  $FS, MR$ , paralleles à  $AD$ , & on prolongera  $RM$  jusqu'à ce qu'elle rencontre  $AC$  en  $P$ . Cela posé, les deux triangles rectangles semblables  $MPT, MRN$ , donnent  $MR.MN :: MP$  ou  $AK, MT :: a. KF$ . Et partant  $KF \times MR$ , c'est à dire,

X

le petit rectangle  $FKLS = MN \times a$ . Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la Courbe  $AMB$  qu'on prenne le petit arc  $MN$ , il s'ensuit que la somme de tous les petits rectangles  $KL SF$ , c'est à \* dire ,  
 \* Art. 184. l'espace  $ADEFH$  sera égal à la somme de tous les petits rectangles  $MN \times a$ , c'est à dire, au rectangle de la courbe  $AMB$  par la constante  $a$ . Ce qu'il falloit démon-  
 trer.

## COROLLAIRE I.

244. DÉ-LA il est évident que le rectangle de la portion  $AM$  par la constante  $a$ , est égal à l'espace  $AKFH$ ; & de même que le rectangle de la portion  $MB$  par la même ligne  $a$ , est égal à l'espace  $KDEF$ .

## COROLLAIRE II.

245. SÎ l'on suppose que la Courbe  $AMB$  soit la seconde Parabole cubique, qui ait pour équation  
 \* Art. 233.  $y^3 = axx$  ( $AP = x$ ,  $PM = y$ ) ; on aura \*  $PT = \frac{2}{3}xx$   
 & à cause du triangle rectangle  $MPT$ , l'hypothénuse  $MT = \sqrt{yy + \frac{2}{3}xx}$ . Mais par la propriété de la Courbe  $HFE$ , il faut que  $MP(y)$ ,  $MT(\sqrt{yy + \frac{2}{3}xx})$   
 $:: a.KF$ . Ce qui donne  $\overline{KF} = aa + \frac{2axx}{3y} = aa + \frac{2}{3}ay$ ,  
 en mettant pour  $axx$  sa valeur  $y^3$ . D'où l'on voit que la Courbe  $HFE$  est dans ce cas une Parabole, qui a pour axe la ligne  $AD$ , dont l'origine est au point  $O$ , pris de l'autre côté du point  $D$  par rapport au point  $A$ , en sorte que  $AO = \frac{2}{3}a$ , & dont le parametre  $= \frac{2}{3}a$  ;  
 \* Art. 19. car par la propriété de cette Parabole \* le quarré de l'ordonnée  $KF$  sera égal au rectangle de  $KO$  par le parametre  $\frac{2}{3}a$ , c'est à dire en termes analytiques,  $\overline{KF} = aa + \frac{2}{3}ay$ . Or comme les Trapezes paraboliques  
 \* Art. 239.  $ADEH$ ,  $AKFH$ , sont \* quarrables, il s'ensuit qu'on a la rectification tant de la Courbe  $AMB$ , que d'une



DE LA COMPARAISON DES SECT. CONIQ. 163  
de ses portions quelconques  $AM$ .

Si l'on veut exprimer au juste la valeur de la portion  $AM$ , on remarquera que  $AH$  est  $= a$ ; puisque  $\overline{AH}^2 = AO \times \frac{2}{3}a = aa$ . Ainsi ayant nommé la tangente  $MT$ ,  $t$ ; la ligne  $AK$  ou  $MP$ ,  $y$ ; on aura  $KF = \frac{at}{y}$ , & le Trape. se parabolique  $BKAH$  ou  $\frac{2}{3}PK \times KO - \frac{2}{3}HA \times AO$  \* Art. 239.  
 $= \frac{2}{3}at - \frac{2aat}{27y} - \frac{2}{27}aa = AM \times a$ . C'est à dire en divisant par  $a$ , que la portion cherchée  $AM = \frac{2}{3}t - \frac{2at}{27y}$   
 $= \frac{8}{27}a$ . Ce qui donne cette construction,

Ayant mené du point donné  $M$  sur la seconde Parabole cubique  $AMB$ , la tangente  $MT$  qui rencontre en  $Q$  la ligne  $AK$  menée par l'origine  $A$  de l'axe  $AC$  perpendiculairement à cet axe, on prendra sur cette ligne la partie  $AV = \frac{8}{27}a$ ; & ayant tiré  $VC$  parallèle à  $MT$  qui rencontre l'axe en  $C$ , on décrira du centre  $V$  & du rayon  $VA$  un arc de cercle qui coupe  $VC$  en  $X$ . Je dis que la portion  $AM$  de la seconde Parabole cubique  $AMB$  sera égale à la somme des deux droites  $MQ$ ,  $CX$ .

Car à cause des triangles semblables  $TPM$ ,  $TAQ$ ; il est clair que  $MQ = \frac{2}{3}MT(t)$ , puisque  $AP = \frac{2}{3}PT$ ; & à cause des triangles semblables  $MPT$ ,  $VAC$ , il vient  $MP(y) \cdot MT(t) :: AV(\frac{8}{27}a) \cdot VC = \frac{8at}{27y}$ , & partant  $CX = \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$ . Donc &c.

## PROPOSITION XVI

### Theorème.

246. Soit une Hyperbole équilatère  $EAF$ , qui ait pour centre le point  $C$ , & pour la moitié de son premier axe le point  $X$  ij

FIG. 128.

droite  $CA$ , avec une Parabole  $NCS$  qui ait pour axe la ligne  $AC$  prolongée du côté de  $C$  qui en sera l'origine, & pour paramètre de l'axe une ligne double de  $CA$ . Si l'on mène par un point quelconque  $N$  de la Parabole  $NCS$ , une parallèle  $NE$  à  $CA$ , qui rencontre l'Hyperbole  $EAF$  au point  $E$ , & son second axe  $CL$  au point  $L$ ; je dis que l'espace hyperbolique  $CLEA$  renfermé entre les droites  $AC$ ,  $CL$ ,  $LE$ , & la portion  $EA$  de l'Hyperbole, est égal au rectangle de la portion  $CN$  de la Parabole par la droite  $AC$ .

Ayant mené par un point quelconque  $M$  de la portion  $CN$  de la Parabole, une perpendiculaire  $MG$  à la tangente  $MT$  qui passe par ce point, terminées l'une & l'autre par l'axe aux points  $G$ ,  $T$ ; & une parallèle  $MB$  à  $CA$ , qui rencontre l'Hyperbole en  $B$ , & son second axe  $CL$  en  $H$ : les lignes  $MG$ ,  $HB$ , seront égales entr'elles. Car menant l'ordonnée  $MP$  à l'axe on

\* Art. 24. aura \*  $PG = CA$ ; & à cause du triangle rectangle  $MPG$ , le carré  $\overline{MG} = \overline{PM}^2 + \overline{PG}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CA}^2$ .

\* Art. 127.  $= \overline{HB}^2$ , à cause de l'Hyperbole équilatere  $EAF$ ; & partant  $MG = HB$ . Or les triangles rectangles semblables  $TPM$ ,  $MPG$ , donnent  $MP$  ou  $CH$ .  $MT ::$

\* Art. 143.  $PG$  ou  $CA$ .  $MG$  ou  $HB$ . Donc \* &c.

#### COROLLAIRE I.

247. **D**E-LA il est évident que le Trapeze hyperbolique  $HLEB$  est égal au rectangle de la portion de Parabole  $MN$  par la moitié  $CA$  du parametre de son axe.

#### COROLLAIRE II.

248. **S**I l'on mène dans l'Hyperbole équilatere  $EAF$  deux parallèles quelconques  $BD$ ,  $EF$ ; & qu'on tire par leurs extrémités des lignes droites  $BM$ ,  $EN$ ,  $DR$ ,  $FS$ , parallèles à  $AC$ , lesquelles rencontrent le second axe de l'Hyperbole aux points  $H$ ,  $L$ ,  $K$ ,  $O$ ; la différence des rectangles  $AC \times MN$ ,  $AC \times RS$ , sera

DE LA COMPARAISON DES SECT. CONIQ. 165  
 égale ( en tirant les droites  $BE, DF,$  ) à la différence  
 des Trapezes réctilignes  $HLEB, KOFD$ .

Car le réctangle  $AC \times MN$  est égal \* au Trapeze hy- \* Art. 247.  
 perbolique  $HLEB$ ; & par conséquent le réctangle  
 $AC \times MN$  plus le segment hyperbolique  $BE$  sera égal  
 au Trapeze réctiligne  $HLEB$ : de même le réctangle  
 $AC \times RS$  plus le segment hyperbolique  $DF$  sera égal  
 au Trapeze réctiligne  $KOFD$ . Donc puisque les deux  
 segmens hyperboliques  $EB, DF,$  sont \* égaux entr'- \* Art. 204.  
 eux, la différence des réctangles  $AC \times MN, AC \times RS,$   
 sera égale à la différence des Trapezes réctilignes  $HLEB,$   
 $KOFD$ . Ce qu'il falloit démontrer.

### COROLLAIRE III.

249. Les mêmes choses étant posées que dans le  
 Corollaire précédent; si l'on fait  $2AC. LH ::$   
 $BH \rightarrow LE. m.$  il est clair que le réctangle  $AC \times m = \frac{1}{2} LH$   
 $\times BH \rightarrow LE$ , c'est à dire, égal au Trapeze réctiligne  
 $HLEB$ . De même si l'on fait  $2AC. KO :: KD \rightarrow FO. n.$   
 il est clair que  $AC \times n$  est égal au Trapeze réctiligne  
 $KOFD$ . Par conséquent \* la différence des réctangles \* Art. 248.  
 $AC \times MN, AC \times RS,$  sera égale à la différence des  
 réctangles  $AC \times m, AC \times n$ ; c'est à dire, en divisant  
 par  $AC$ , que la différence des arcs paraboliques  $MN,$   
 $RS,$  sera égale à la différence des droites  $m, n$ . D'où  
 l'on voit qu'on peut trouver des lignes droites égales à la  
 différence d'une infinité d'arcs Paraboliques tels que  
 $MN, RS$ .

## LIVRE SIXIÈME

*Des Séctions Coniques considérées dans le Solide.*

## CHAPITRE PREMIER.

*Des trois Séctions Coniques en général.*

## DÉFINITIONS.

<sup>1.</sup>  
 FIG. 129. **S** I par un point fixe  $S$  élevé au dessus du plan d'un cercle  $VXY$ , on fait mouvoir une ligne droite  $SZ$  indéfiniment prolongée de part & d'autre du point  $S$ , autour de la circonférence du cercle, en sorte qu'elle fasse un tour entier, les deux surfaces convexes produites par la ligne droite indéfinie  $SZ$  dans ce mouvement, sont appellées chacune séparément *Surface Conique*, & toutes deux ensemble *Surfaces Coniques opposées*.

<sup>2.</sup>  
 Le point fixe  $S$  qui est commun à l'une & à l'autre Surface Conique, est nommé *Sommet*.

<sup>3.</sup>  
 Le Cercle  $VXY$ , *Base*.

<sup>4.</sup>  
 Le Solide compris par la base  $VXY$ , & par la portion de la Surface Conique que cette base coupe depuis le Sommet  $S$ , est appellé *Cone*.

<sup>5.</sup>  
 La ligne  $SX$  menée du Sommet  $S$  à un point quelconque  $X$  de la base, en est un des *Côtés*.

<sup>6.</sup>  
 La ligne  $SO$  menée du Sommet  $S$  du Cone par le centre  $O$  de la base, en est l'*Axe*.

<sup>8.</sup>  
 On dit qu'un Cone est *droit*, lorsque son axe est per-

pendiculaire sur le plan de sa base, & au contraire qu'il est *scalene*, lorsque son axe est oblique sur ce plan.

8.

Si l'on coupe une Surface Conique par un plan  $FAG$  Fig. 130. qui ne passe point par le Sommet  $S$ , & qui ne soit point 131. 132. parallèle au plan de la base  $VXY$ ; la ligne courbe  $FAG$  formée par la rencontre de ce plan avec la Surface Conique, est appelée *Séction Conique*.

9.

Si l'on mène par le Sommet  $S$  d'un Cone, un plan  $SDE$  parallèle au plan d'une Séction Conique; la droite indéfinie  $DE$  formée par la rencontre de ce plan avec celui de la base du Cone, s'appellera *Diréctrice*.

10.

Une Séction Conique  $FAG$  est appelée *Parabole*, lorsque la Diréctrice  $DE$  touche le cercle qui est la base du Cone: *Ellipse*, lorsqu'elle tombe toute entière au dehors: & *Hyperbole*, lorsqu'elle le traverse.

Mais dans ce dernier cas, si l'on prolonge le plan de Fig. 132. la Séction, il est visible qu'il rencontrera la Surface Conique opposée; & la ligne courbe  $KMH$  formée par cette rencontre, sera nommée *Hyperbole opposée* à la première  $FAG$ ; & les deux ensemble, *Hyperboles ou Séctions opposées*.

11.

Si dans le plan d'une Séction Conique il y a une ligne Fig. 136. droite qui ne la rencontre qu'en un seul point, & qui 137. 138. étant prolongée indéfiniment de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe toute entière au dehors; cette ligne sera nommée *Tangente*, & le point où elle rencontre la Séction, point d'*Attouchement*.

## COROLLAIRE I.

250. DANS la Parabole tous les côtés du Cone Fig. 139. étant prolongés indéfiniment rencontreront nécessairement son plan, excepté le seul côté  $SD$  tiré du Sommet  $S$

par le point  $D$  où la Directrice  $DE$  touche la base ; puisqu'il n'y a que ce côté qui soit dans le plan  $SDE$  parallèle à celui de la Section , & que tous les autres le coupent dans le point  $S$ . D'où il est clair que la Parabole s'étend à l'infini , & ne rentre point en elle-même.

## COROLLAIRE II.

FIG. 131. 251. **D**ANS l'Ellipse tous les côtés du Cone étant prolongés , s'il est nécessaire , rencontrent son plan ; puisque le plan  $SDE$  qui lui est parallèle , est rencontré par tous dans le point  $S$ . D'où l'on voit qu'elle renferme un espace en rentrant en elle-même.

## COROLLAIRE III.

FIG. 132. 252. **D**ANS les Hyperboles opposées tous les côtés du Cone excepté les deux  $SD$ ,  $SE$ , tirés du Sommet  $S$  aux points  $D$ ,  $E$ , où la Directrice coupe la base , étant prolongés indéfiniment de part & d'autre du Sommet  $S$ , rencontrent nécessairement leur plan ; puisqu'il n'y a que ces deux côtés qui tombent dans le plan  $SDE$  parallèle au plan de ces deux Hyperboles , & que tous les autres le coupent dans le point  $S$ . Les côtés de la portion  $SDVE$  forment les points de l'Hyperbole  $FAG$ , & ceux de la portion  $SDYE$  étant prolongés de l'autre côté du Sommet  $S$ , forment les points de son opposée  $KMH$ . D'où l'on voit que les Hyperboles opposées s'étendent chacun à l'infini , & ne rentrent point en elles-mêmes, non plus que la Parabole.

## PROPOSITION I.

## Theorème,

FIG. 132. 253. **S**I l'on coupe deux surfaces Coniques opposées , par un plan  $Sa m$  qui , passant par leur Sommet  $S$ , entre au dedans ;  
je

## DES TROIS SECTIONS CONIQUES EN GENERAL. 169

*je dis qu'il formera par sa rencontre avec ces deux Surfaces, deux lignes droites  $Sa$ ,  $Sm$ , indéfiniment prolongées de part & d'autre du point  $S$ .*

Car soit  $am$  la commune Section du plan coupant, & du plan de la base: il est clair qu'elle rencontrera cette base en deux points  $a$ ,  $m$ ; puisque par la supposition le plan  $Sam$  entre au dedans de la surface Conique. Or si l'on mène les côtés  $Sa$ ,  $Sm$ , indéfiniment prolongés de part & d'autre du Sommet  $S$ ; il est évident par la génération des Surfaces Coniques opposées que ces côtés seront les deux communes Sections de ces deux Surfaces, avec le plan coupant  $Sam$ . *C'est ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE I.

254. COMME la partie de la ligne  $am$  qui joint les deux points  $a$ ,  $m$ , de la circonférence, tombe au dedans de la base, & que tout le reste de cette ligne tombe au dehors; il s'ensuit que si l'on conçoit que le plan  $Sam$  soit indéfiniment étendu tout autour du Sommet  $S$ , la partie de ce plan qui sera renfermée dans l'angle  $aSm$ , & dans son opposé au Sommet, tombera au dedans des deux Surfaces Coniques opposées, & que tout le reste de ce plan tombera entre ou (ce qui est la même chose) au dehors de ces deux Surfaces.

### COROLLAIRE II.

255. DE-LA il suit que si l'on joint deux points FIG. 130. quelconques  $A$ ,  $M$ , d'une Section Conique par une ligne droite, elle sera renfermée au dedans de la Section; & qu'étant prolongée indéfiniment de part & d'autre, elle tombera toute entière au dehors. Car menant du Sommet  $S$  par les points  $A$ ,  $M$ , les côtés  $Sa$ ,  $Sm$ , & faisant passer un plan par ces côtés; il est clair que la ligne  $AM$  tombe dans la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle  $aSm$ , & que tout le reste

de cette ligne se trouve dans la partie de ce plan qui tombe dans les angles à côté.

## COROLLAIRE III.

256. Si l'on mène par le Sommet  $S$  du cône une ligne parallèle à une ligne  $AM$  terminée par une Section Conique; il est clair par le Corollaire précédent que cette ligne  $SH$ , tombera dans l'un des angles à côté de l'angle  $ASM$ , c'est à dire au dehors de la surface Conique; & qu'ainsi elle ira rencontrer le plan de la base en quelque point hors la circonférence du cercle, ou bien qu'elle lui sera parallèle.

## COROLLAIRE IV.

FIG. 132.

257. Il suit encore du Corollaire premier que si l'on joint deux points quelconques  $A, M$ , de deux Hyperboles opposées par une ligne droite, elle sera renfermée entre ces Hyperboles; & qu'étant indéfiniment prolongée de part & d'autre, elle entrera au dedans. Car menant par le Sommet  $S$  les côtés  $Sa, Sm$ , qui passent par les points  $A, M$ , & faisant passer par ces côtés un plan indéfiniment étendu tout autour du point  $S$ ; il est clair que la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle  $ASM$  où tombe la ligne  $AM$ , est comprise entre ces deux Surfaces, & que la partie du même plan qui est renfermée entre les deux angles à côté où se trouvent les prolongemens de la ligne  $AM$ , tombent au dedans de ces deux Surfaces. Or comme la ligne  $AM$  est la commune Section du plan  $Sa m$  avec celui des deux Hyperboles opposées, il s'ensuit &c.

## COROLLAIRE V.

258. Il suit aussi des Corollaires deuxième & quatrième, qu'une ligne droite ne peut rencontrer une



DES TROIS SECTIONS CONIQ. EN GENERAL. 171  
 Séction Conique, ou les deux Hyperboles opposées, au plus qu'en deux points.

## PROPOSITION II.

### Theorème.

259. *Si l'on coupe l'une ou l'autre des deux Surfaces Coniques opposées, par un plan  $OVXY$  parallèle à la base  $OVXY$ ; je dis que la Séction qu'il forme par sa rencontre avec la Surface Conique, est un cercle qui a pour centre le point  $O$ , où ce plan rencontre l'axe  $SO$ , prolongé de l'autre côté du Sommet  $S$ , lorsqu'il est nécessaire.* FIG. 129.

Car si l'on mene par un point quelconque  $X$  de la base au centre  $O$  le rayon  $XO$ , & au Sommet  $S$  le côté  $XS$  qui rencontre le plan  $OVXY$  au point  $x$ : les lignes  $OX$ ,  $ox$ , seront parallèles entr'elles; puisqu'elles sont les communes Séctions de deux plans parallèles  $OVXY$ ,  $OVXY$ , par le même plan  $SOX$  prolongé, s'il est nécessaire de l'autre côté du Sommet  $S$ . Les triangles  $OSX$ ,  $oSx$ , seront donc semblables; & par conséquent on aura toujours  $SO. OX :: So. ox$ . Or les premiers termes de cette proportion étant par tout les mêmes, le quatrième  $ox$  ne changera point de grandeur en quelque endroit que tombe le point  $x$ . D'où l'on voit que la ligne courbe  $vxy$  est la circonférence d'un cercle qui a pour centre le point  $O$ ,

### COROLLAIRE.

260. *Il suit de là qu'on peut placer la base d'un cone en tel endroit qu'on veut, selon qu'il est plus commode. C'est pourquoi lorsque la Séction est une Parabole ou une Hyperbole, on la place ordinairement en sorte qu'elle coupe la Séction; mais lorsque c'est une Ellipse où la place tantôt de manière qu'elle la coupe, & tantôt de manière qu'elle tombe au-dessous.*

PROPOSITION III.

Theorème.

FIG. 130. 261. Si dans le plan d'une Parabole FAG, l'on tire par un de ses points quelconques A vers le dedans du cone, une ligne droite indéfinie AB parallèle au côté SD qui passe par le point D où la Directrice DE touche la base; je dis que cette ligne AB tombe toute entiere au dedans de la Section, & qu'elle ne le rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini du côté de B.

Car ayant mené par le Sommet S du cone, & par la ligne AB un plan SAB, il formera par sa rencontre avec la Surface Conique deux côtés, dont l'un sera toujours la ligne SD, puisque AB lui est parallèle, & l'autre la ligne Sa qui passe par le point A. Or le plan D Sa renfermé entre les côtés SD, Sa, prolongés à l'infini du côté de D & a, tombe\* au dedans de la Surface Conique. Par conséquent la ligne AB qui est toujours dans ce plan, étant parallèle au côté SD, tombera toute entiere au dedans de la Parabole, & ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini vers B.

PROPOSITION IV.

Theorème.

FIG. 130. 262. Si dans le plan d'une Parabole FAG, l'on tire par un de ses points quelconques A vers le dedans du cone, une ligne droite AM qui ne soit point parallèle au côté SD, qui passe par le point D où la Directrice DE touche la base; je dis que cette ligne étant prolongée autant qu'il sera nécessaire, rencontrera la Parabole en quelque autre point M.

Car si l'on fait passer par le Sommet S du cone & par cette ligne un plan SAM, il est clair qu'il entre au dedans de la Surface Conique, & qu'il ne passe point par

le côté  $SD$  ; d'où il suit que ce plan forme sur la Surface Conique \* deux côtés  $Sa$ ,  $Sm$ , dont l'un  $Sa$  passe \* *Art. 233.* par le point  $A$  ; & l'autre  $Sm$  n'est point parallèle au plan de la Section, puisqu'il n'y a (*hyp.*) que le seul côté  $SD$  qui lui soit parallèle. Par conséquent le côté  $Sm$  étant prolongé (s'il est nécessaire) rencontrera le plan de la Parabole en un point  $M$ , par où passe la ligne  $AM$  qui est formée par la rencontre du plan  $aSm$  avec celui de la Parabole. Or il est visible que ce point  $M$  est un des points de la Parabole  $FAG$  ; puisqu'il se trouve en même temps dans le plan de la Section, & sur la Surface Conique. Donc &c.

## PROPOSITION V.

## Problème.

263. **M**ENER d'un point donné  $A$  sur une Section Conique, une Tangente  $AF$ . FIG. 133.  
134. 135.

Ayant mené par le point  $A$  & par le Sommet  $S$  du cône, une ligne droite  $SA$  qui rencontre le plan de la base au point  $a$ , on tirera à cette base par le point  $a$ , la Tangente  $Eaf$  ; & la ligne  $AF$  formée par la rencontre du plan  $SEaf$  (prolongé, s'il est nécessaire au delà du Sommet  $S$ ) avec le plan de la Section, sera la Tangente qu'on cherche.

Car puisque la Tangente  $Eaf$  tombe toute entière au dehors de la base excepté le seul point  $a$ , il s'ensuit que le plan  $SEaf$  prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet  $S$  ne rencontre les Surfaces Coniques opposées que dans la ligne  $Sa$  aussi prolongée indéfiniment de part & d'autre du Sommet  $S$ , & que tout le reste de ce plan tombe au dehors de ces Surfaces. Par conséquent la ligne  $AF$  formée par la rencontre de ce plan avec celui de la Section, ne peut avoir de commun avec l'un ou l'autre de ces deux Surfaces que le seul point  $A$  où la ligne  $Sa$  rencontre le plan de la

Séction, & tombe toute entière au dehors excepté ce point. Donc &c.

## COROLLAIRE I.

264. COMME l'on ne peut faire passer par le point  $a$  de la base du cône, qu'une seule Tangente  $Eaf$ ; il s'ensuit aussi que d'un point donné  $A$  sur une Séction Conique, on ne peut mener qu'une seule Tangente  $AF$ .

## COROLLAIRE II.

265. DE-LA on tire la manière de mener une Tangente  $AF$  parallèle à une ligne droite  $MN$  donnée de position sur le plan d'une Séction Conique ou de deux Séctions opposées. Car ayant mené par le Sommet  $S$  du cône, une parallèle  $SE$  à  $MN$ , elle rencontrera la Directrice  $DE$  en un point  $E$ , ou bien elle lui sera parallèle; puisque cette ligne  $SE$  sera parallèle au plan de la Séction, & tombera par conséquent dans le plan  $SDE$ . Si elle la rencontre en un point  $E$  qui tombe au dehors du cercle qui est la base du Cône: ayant mené du point  $E$  à ce cercle, la Tangente  $Eaf$ , il est clair que le plan  $SEaf$  formera par la rencontre avec le plan de la Séction, une Tangente  $AF$  qui sera parallèle à la ligne  $MN$ ; puisque les deux Séctions  $AF$ ,  $SE$ , des plans \* parallèles  $MAN$   $SED$ , coupés par le plan touchant  $SEaf$ , sont parallèles entr'elles aussi bien \*  $SE$ ,  $MN$ .

\* Hyp.

## COROLLAIRE III.

266. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent.

1°. Dans la Parabole le Problème est impossible, lorsque la ligne  $MN$  donnée de position, devient parallèle au côté  $SD$  qui passe par le point  $D$  où la Directrice  $DE$  touche la base; car alors le point  $E$  tombant en  $D$ , on ne pourra mener par ce point d'autre

FIG. 133.

Tangente que la Diréctrice  $DE$  : & comme le plan qui passe par le Sommet & par la Diréctrice  $DE$  est \* paral. \* Def. 9. lele au plan de la Parabole, il ne pourra former par la rencontre avec ce plan aucune Tangente. Mais lorsque la ligne donnée de position, n'est point parallèle au côté  $SD$ , on pourra toujours mener une Tangente  $AF$  parallèle à cette ligne, & jamais d'avantage ; car alors le point  $E$  tombant au dehors du cercle qui est la base du cône, on en pourra toujours mener  $Eaf$ ,  $EDL$  à cette base ; dont l'une  $EDL$  se confondant avec la Diréctrice, ne peut servir à trouver aucune Tangente dans le plan de la Section ; & l'autre  $Eaf$  étant différente de la Diréctrice, servira toujours à trouver par la rencontre du plan  $SEaf$  avec le plan de la Parabole, une Tangente  $AF$  qui satisfera. Il en est de même lorsque la ligne  $SE$  est parallèle à la Diréctrice, car la Tangente  $Eaf$  deviendra alors parallèle à la Diréctrice ; & comme on n'en peut mener qu'une seule qui lui soit parallèle, puisque la Diréctrice touche elle-même la base en un point  $D$ , il s'ensuit &c.

2°. Dans l'Ellipse, on pourra toujours mener deux Fig. 134. Tangentes  $AF$ ,  $BG$ , parallèles à la ligne  $MN$  donnée de position ; & par conséquent entr'elles. Car tous les points de la Diréctrice  $DE$  tombant au dehors de la base, on pourra toujours mener du point  $E$  deux Tangentes  $Eaf$ ,  $Ebg$ , à cette base qui ne se confondront point avec la Diréctrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans  $SEaf$ ,  $SEbg$ , avec le plan de la Section, deux Tangentes  $AF$ ,  $BG$ , qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne  $SE$  est parallèle à la Diréctrice ; car au lieu des Tangentes  $Eaf$ ,  $Ebg$ , qui partent d'un point  $E$  de cette Diréctrice, il n'y auroit qu'à lui mener deux Tangentes parallèles ; ce qui est toujours possible.

3°. Dans les Hyperboles opposées le Problème est Fig. 135. impossible, lorsque le point  $E$  tombe au dedans du cercle qui est la base du cône ; puisqu'on ne peut mener

alors aucune Tangente de ce point à la base. Mais lorsqu'il tombe au dehors, on pourra toujours trouver deux Tangentes  $AF$ ,  $BG$ , parallèles à la ligne  $MN$  donnée de position; car la Directrice  $DE$  traversant la base, on pourra toujours mener du point  $E$  deux Tangentes  $Eaf$ ,  $Ebg$ , à cette base, lesquelles tombent de part & d'autre de la Directrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans  $SEaf$ ,  $SEbg$ , avec le plan de la Section deux Tangentes  $AF$ ,  $BG$ , qui s'intersecteront. Il en est de même lorsque la ligne  $SE$  est parallèle à la Directrice  $DE$ ; car au lieu des deux Tangentes  $Eaf$ ,  $Ebg$ , il n'y aura qu'à mener deux Tangentes parallèles à la Directrice; ce qui est toujours possible.

Il est à remarquer dans ce dernier cas, que les Tangentes parallèles  $AF$ ,  $BG$ , appartiennent toujours aux Hyperboles opposées, & jamais à la même; ce qui est évident, puisque les deux Tangentes  $Eaf$ ,  $Ebg$ , de la base, tombent nécessairement de part & d'autre de la Directrice  $DE$ .

## COROLLAIRE IV.

267. IL suit du Corollaire précédent :

1°. Que dans une Parabole ou Hyperbole, il ne peut y avoir deux Tangentes qui soient parallèles entr'elles, & qu'au contraire dans l'Ellipse & dans les Hyperboles opposées, une Tangente  $AF$ , étant donnée de position, ou en peut toujours mener une autre  $BG$  qui lui soit parallèle.

2°. Que si la ligne  $MN$  donnée de position, est terminée par une Section Conique, on pourra toujours mener dans la Parabole, une Tangente  $AF$  qui lui soit parallèle, & dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées deux Tangentes  $AF$ ,  $BG$ ; puisque la ligne  $SE$  menée par le Sommet  $S$  parallèlement à  $MN$  rencontrera \* le plan de la base en un point  $E$  hors la circonférence, ou bien lui sera parallèle,

\* Art. 256.

## DÉFINITIONS.

12.

Dans une Parabole, si l'on mene par un de ses points *Fig. 133.*  
quelconques *A* vers le dedans une ligne *AB* parallele  
au côté *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice  
*DE* touche la base : cette ligne *AB* fera nommée *Dia-*  
*metre*, & le point *A* en sera l'*origine*.

13.

Dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées, toute *Fig. 134.*  
ligne droite *AB*, qui joint les points d'artouche- 135.  
ment de deux tangentes paralleles *AF*, *BG*, est appel-  
lée *Diametre*; & les points *A*, *B*, en sont les extrê-  
mités.

14.

Si par un point quelconque *P* de tel Diametre *AB* *Fig. 133.*  
qu'on voudra d'une Séction Conique, l'on tire une li- 134. 135.  
gne droite *MN* qui rencontre la Séction aux points  
*M*, *N*, & qui soit parallele à la tangente *AF* qui passe  
par l'origine *A* de ce Diametre dans la Parabole, &  
par l'une ou l'autre de ses extremités dans les autres  
Séctions: on dira que cette ligne *MN* est *Ordonnée* de  
part & d'autre au Diametre *AB*, & que chacune de ses  
parties *PM*, ou *PN*, est *Ordonnée* à ce Diametre.

15.

Lorsqu'un Diametre fait avec ses Ordonnées des an-  
gles droits, on l'appelle *Axe*.

## COROLLAIRE.

268. IL suit de la Définition douzième:

1°. Que tous les Diametres d'une Parabole sont pa-  
ralleles entr'eux, puisqu'ils sont tous paralleles au mê-  
me côté du cône *SD* qui passe par le point *D* où la Di-  
rectrice *DE* touche la base.

2°. Que par un point donné sur le plan d'une Parabole,  
on ne peut mener qu'un seul Diametre, puisqu'on  
ne peut mener par ce point qu'une seule parallele au  
côté *SD*.

Z

## PROPOSITION VI.

## Problème.

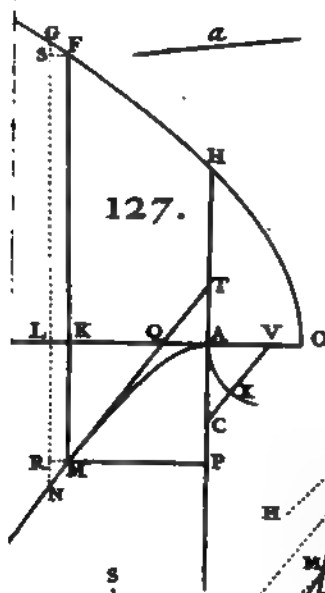
FIG. 136. 269. UN diamètre  $AB$  d'une Section Conique étant  
137. 138. donné, avec une de ses ordonnées  $PM$ , décrire la Section.

Ayant fait passer par l'ordonnée  $PM$  un plan quelconque autre que le plan  $APM$ , on menera dans ce plan par le point  $P$  une perpendiculaire indéfinie  $Pa$  à  $PM$ ; & on décrira d'un point quelconque  $C$  de cette ligne, & du rayon  $CM$  un cercle. Cela fait,

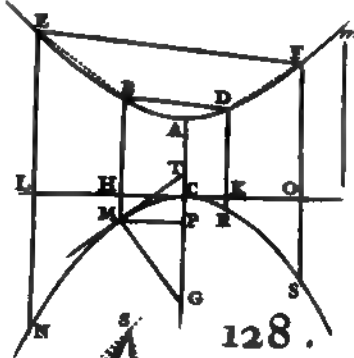
FIG. 136. 1°. Lorsque la Section doit être une Parabole. On menera de l'un des points  $a, D$ , où le cercle coupe la perpendiculaire  $Pa$  (par exemple du point  $a$ ) par l'origine  $A$  du diamètre  $AB$ , la ligne  $aA$  qui rencontre en  $S$ , une ligne  $DS$  tirée de l'autre point  $D$  parallèlement à  $AB$ . On décrira ensuite une surface Conique qui ait pour sommet le point  $S$ , & pour base le cercle  $DMaN$ . Je dis qu'elle formera par sa rencontre avec le plan  $APM$ , la Parabole cherchée  $MAN$ . Car ayant mené par les extrémités du diamètre  $Da$  les parallèles  $DE, af$ , à  $PM$ ; il est clair qu'elles seront tangentes, puisque  $PM$  est perpendiculaire sur  $Da$ . Or le plan  $SDE$  qui passe par le sommet  $S$  du cône & par la tangente  $DE$ , est parallèle au plan  $APM$ , puisque  $SD$  est parallèle à  $AP$ , &  $DE$  à  $PM$ : d'où il suit\* que la Section  $MAN$  faite par le plan  $APM$  dans la surface Conique, sera une Parabole qui aura pour diamètre la ligne  $AB$ . De plus le plan touchant  $Saf$  forme dans le plan  $APM$ \* une tangente  $AF$ , qui sera parallèle à  $PM$ ; puisqu'elle est la commune Section des deux plans  $Saf, APM$ , qui passent par les parallèles  $af, PM$ : & par conséquent\* la ligne  $PM$  sera ordonnée au diamètre  $AB$ .

FIG. 137. 2°. Lorsque la Section Conique doit être une Ellipse  
138. ou une Hyperbole. On menera des points  $a, b$ , où la perpendiculaire indéfinie  $Pa$  coupe le cercle, par les ex-

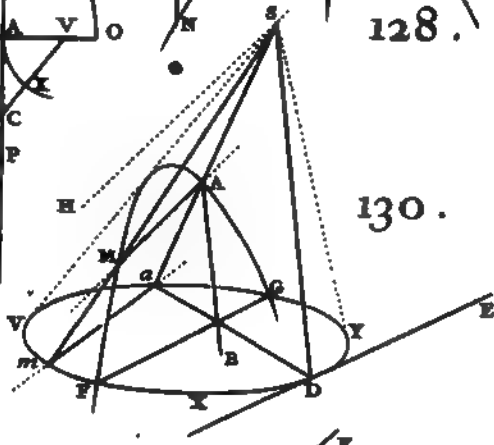




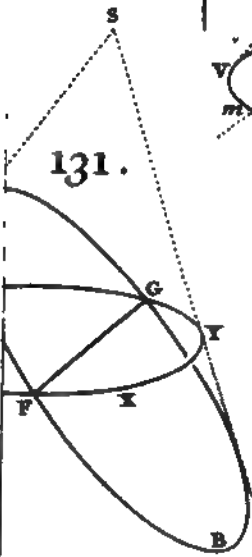
127.



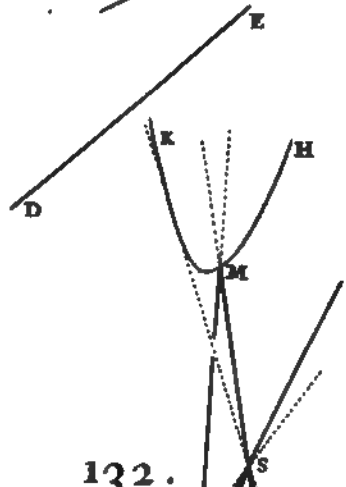
128.



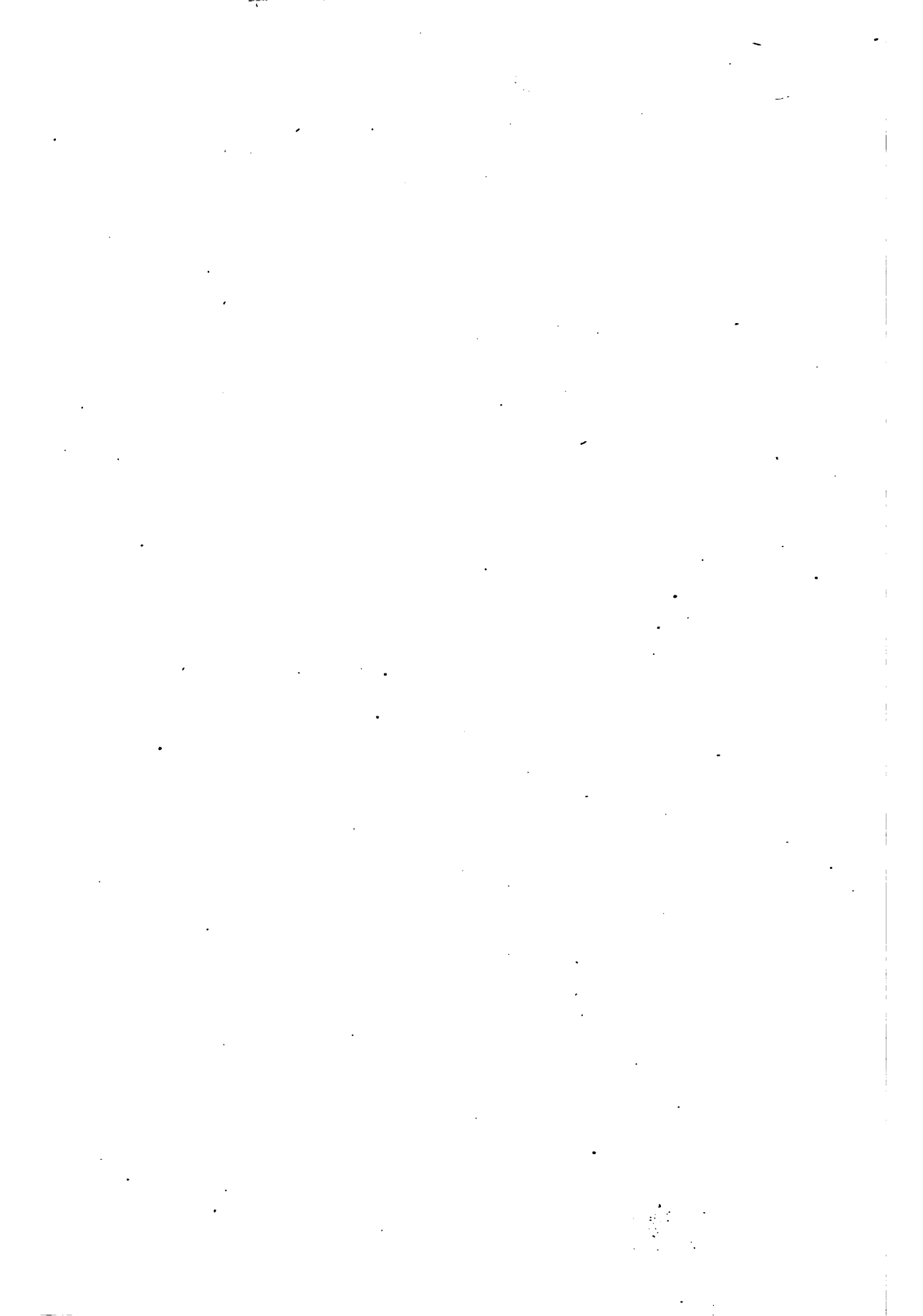
130.



131.



122.



# DES TROIS SECT. CONIQ. EN GENERAL. 179

extrémités  $A, B$ , du diamètre  $AB$ , les droites  $aA, bB$ , qui se rencontrent au point  $S$ . On décrira ensuite un cône qui ait pour sommet le point  $S$ , & pour base le cercle  $aMbN$ . Je dis que le plan  $APM$  formera dans la surface de ce cône la Section  $MAN$  qu'on demande. Car menant  $SD$  parallèle au diamètre  $AB$  de la Section, & qui rencontre en  $D$  le diamètre  $ab$  de la base, par où & par les extrémités  $a, b$ , soient tirées les parallèles  $DE, af, bg$ , à  $PM$ ; il est clair que le plan  $SDE$  sera parallèle au plan  $APM$ , & qu'ainsi  $DE$  \* sera la \* *Def. 9.* *Diréctrice.* Or dans l'Ellipse le point  $D$  tombe sur le diamètre  $ab$  prolongé hors le cercle; puisque le diamètre  $AB$  de la Section, tombe dans l'angle  $aSb$  fait par les côtés du cône  $Sa, Sb$ : & au contraire dans l'Hyperbole le point  $D$  tombe au dedans du cercle; puisqu'alors le diamètre  $AB$  tombe dans l'angle  $aSb$  qui est à côté de l'angle  $aSb$ . D'où il suit selon la Définition 10. que la Section  $MAN$  est une Ellipse dans le premier cas, & une Hyperbole dans le second. De plus la tangente  $AF$  qui passe par l'extrémité  $A$  du diamètre  $AB$ , étant la commune Section du plan touchant  $Saf$  & du plan coupant  $APM$ , qui passent par les parallèles  $af, PM$ , sera parallèle à  $PM$ : & de même la tangente  $BG$  étant la commune Section du plan touchant  $Sbg$  & du plan coupant  $APM$ , lesquels passent par les deux parallèles  $bg, PM$ , sera aussi parallèle à  $PM$ . D'où l'on voit que la ligne  $AB$  est \* un diamètre \* *Def. 13. & 14.* qui a pour ordonnée  $PM$ .

Il peut arriver dans l'Ellipse que les lignes  $Aa, Bb$ , soient parallèles entr'elles; mais alors il n'y aura qu'à prendre pour le centre  $C$  du cercle  $aMbN$ , tel autre point qu'on voudra de la ligne  $ab$ .

## D É F I N I T I O N.

16.

Si par les deux points  $D, E$ , où la Diréctrice coupe la base, lorsque la Section est une Hyperbole, on tire,  
Zij

FIG. 139.

deux Tangentes  $DF$ ,  $EK$ ; & que par le Sommet  $S$  & ces Tangentes, on fasse passer deux plans  $SDH$ ,  $SEK$ : les deux lignes droites indéfinies  $CH$ ,  $CK$ , que ces deux plans forment par leurs rencontres avec le plan des Hyperboles, sont appellées *Asymptotes*.

## COROLLAIRE I.

270. SI par un point d'attouchement  $D$ , l'on mene le côté  $DS$  prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet  $S$ : il est visible que le plan  $SDH$  ne peut avoir de commun avec les deux surfaces Coniques opposées que ce côté; puisque tous les points de la Tangente  $DH$  tombent hors la circonférence de la base, excepté le seul point  $D$ . Or le plan  $SDE$  qui passe par le Sommet  $S$  & par la Directrice  $DE$ , étant \* parallèle au plan des Hyperboles opposées, les communes Sections  $SD$ ,  $CH$ , de ces deux plans avec le même plan  $SDH$  seront parallèles entr'elles; c'est pourquoi l'Asymptote  $CH$  tombera toute entière au dehors & entre les deux surfaces Coniques opposées, & laissera par conséquent les Hyperboles opposées toutes entières de part & d'autre sans les rencontrer. On prouvera la même chose de l'autre Asymptote  $CK$ . Or comme les deux Asymptotes  $CH$ ,  $CK$ , sont formées par les plans  $SDH$ ,  $SEK$ , qui tombent de part & d'autre de la même surface Conique & de son opposée; il s'ensuit que tous les points de l'Hyperbole  $FAG$  sont compris dans l'angle  $HCK$ , & que tous les points de son opposée tombent dans l'angle qui lui est opposé au Sommet.

\* Def. 9.

## PROPOSITION VII

## Théorème.

FIG. 139. 271. SI par un point quelconque  $B$  d'une Asymptote  $CK$ , l'on mene une parallèle  $BA$  à l'autre Asymptote  $CH$ ; je dis.

1/2





qu'elle rencontrera l'une des Hyperboles opposées en un seul point  $A$ , & qu'étant prolongée indéfiniment, elle tombera toute entière au dedans.

Puisque les deux lignes  $BA$ ,  $SD$ , sont parallèles à la même ligne  $CH$ , elles le seront entr'elles; & ainsi elles se trouveront dans un même plan, lequel entrera au dedans des deux surfaces Coniques opposées, puisqu'il passe par l'un de leurs côtés  $SD$ , & qu'il fait un angle avec le plan  $SDH$  qui la touche dans ce côté. Le plan des parallèles  $BA$ ,  $SD$ , formera donc dans les deux surfaces Coniques, deux côtés, dont l'un est le côté  $SD$ , & l'autre le côté  $Sa$ , qui coupera nécessairement la ligne  $BA$  en quelque point  $A$ , puisqu'il est situé dans le plan qui passe par les parallèles  $SD$ ,  $AB$ , & qu'il coupe  $SD$  en  $S$ . Donc puisque le point  $A$  se trouve en même temps dans l'une des surfaces Coniques & dans le plan des Hyperboles, il appartiendra à l'une de ces Hyperboles. De plus puisque la ligne  $BA$  étant prolongée indéfiniment du côté du point  $A$ , tombe toute entière dans le plan  $DSa$  renfermé entre les côtes  $DS$ ,  $Sa$ , lorsque le point  $A$  appartient à l'Hyperbole  $FAG$ , & dans son opposé au Sommet  $ASd$  lorsqu'il appartient à l'Hyperbole opposée; il est visible qu'elle tombera toute entière au dedans de l'une des deux surfaces Coniques, & par conséquent aussi au dedans de l'Hyperbole qui en est la Section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE I

272. DE-LA on voit qu'entre une Hyperbole  $FAG$  & son Asymptote  $CH$ , on ne sçauroit faire passer aucune ligne parallèle à cette Asymptote. Or comme la ligne  $BA$  sépare l'Hyperbole qu'elle rencontre en deux portions indéfinies, dont l'une tombe nécessairement toute entière dans l'espace compris entre les parallèles  $BA$ ,  $CH$ ; il s'ensuit que plus  $CB$  deviendra petite, plus le point  $A$  avancera dans cette portion, & cela toujours de plus en plus jusqu'à ce que  $CB$  devienne

plus petite qu'aucune grandeur donnée. C'est à dire, qu'une Hyperbole & son Asymptote étant l'une & l'autre continuée indéfiniment, elles s'approcheront toujours de plus en plus, en sorte que leur distance deviendra enfin moindre qu'aucune donnée, sans pouvoir

\* Art. 270. néanmoins \* jamais se rencontrer.

## PROPOSITION VIII

### Problème.

FIG. 140.

273. **LES** *Asymptotes*  $CH, CK$ , d'une *Hyperbole*  $FAG$  étant données avec un de ses points quelconques  $F$ , décrire l'*Hyperbole*.

Ayant mené par le point donné  $F$ , une ligne droite quelconque  $HK$  terminée par les asymptotes, on fera passer par cette ligne un plan quelconque autre que le plan  $HCK$ , dans lequel on tirera par le point de milieu  $P$  de  $HK$  une perpendiculaire indéfinie  $MN$  à cette ligne; & on décrira d'un de ses points quelconques  $O$  comme centre, & du rayon  $OF$ , un cercle  $FMN$ . On menera des points  $H, K$ , deux Tangentes  $HD, KE$ , à ce cercle; & par les points d'attouchemens  $D, E$ , deux parallèles  $DS, ES$ , aux Asymptotes  $CH, CK$ , lesquelles se rencontreront en un point  $S$ ; duquel comme Sommet, on décrira une surface Conique qui ait pour base le cercle  $FMN$ . Je dis que cette surface Conique formera par sa rencontre avec le plan  $HCK$ , l'*Hyperbole* requise  $FAG$ .

\* Hyp. Il est clair par la propriété du cercle  $FMN$ ; 1°. Que la corde  $FG$  est divisée par le milieu au point  $P$ , par le diamètre  $MN$  qui lui est \* perpendiculaire; & partant, puisque par la construction  $PH = PK$ , il s'ensuit que  $FH = GK$ ,  $GH = FK$ ; & par conséquent  $GH \times HF = FK \times KG$ . 2°. Que  $GH \times HF = \overline{HD}^2$ , &  $FK \times KG = \overline{KE}^2$ , & qu'ainsi  $HD = KE$ . 3°. Que si l'on prolonge les Tangentes  $HD, KE$ , jusqu'à ce qu'elles se ren-



contrent en un point  $Q$ , les parties  $DQ$ ,  $EQ$ , seront égales entr'elles. Ce qui donne  $DQ \cdot EQ :: DH \cdot EK$ . D'où l'on voit que la ligne  $DE$  qui joint les points d'atouchemens des deux Tangentes  $HD$ ,  $KE$ , sera parallèle à la ligne  $HK$ , & le plan  $SDE$  au plan  $CHK$ : c'est pourquoi la ligne  $DE$  sera \* la Directrice, & com- \* Def. 9.  
me elle coupe la base en deux points, la Section Conique  $FAG$  \* sera une Hyperbole. De plus il est évident \* Def. 10.  
que cette Hyperbole passera par le point donné  $F$ , puisqu'il est commun tant à la surface Conique, qu'au plan  $HCK$  qui est celui de l'Hyperbole; & qu'elle aura pour Asymptotes les lignes  $CH$ ,  $CK$ , puisqu'elles sont \* les communes Sections des plans touchans \* Def. 15.  
 $SDH$ ,  $SEK$ , & du plan de l'Hyperbole.

S'il arrivoit que les Tangentes  $DH$ ,  $EK$ , fussent parallèles entr'elles, on verroit alors tout d'un coup que les lignes  $DE$ ,  $HK$ , seroient parallèles entr'elles, puisque ces Tangentes sont égales; & le reste se démontreroit de la même manière que ci-dessus.

## PROPOSITION IX.

## Theorème.

274. S'IL y a deux lignes droites  $MN$ ,  $AB$ , termi- FIG. 141.  
nées par une Section Conique ou par les Sections opposées, 142.  
lesquelles se rencontrent en un point  $P$ ; & qui soient parallèles à deux autres lignes,  $SE$ ,  $SD$ , données de position: je dis que le rectangle  $MP \times PN$  est au rectangle  $AP \times PB$ , en raison donnée; c'est à dire que la raison de ces deux rectangles demeure toujours la même, en quelque endroit que puisse tomber les deux lignes  $MN$ ,  $AB$ .

Ayant mené par les parallèles  $SE$ ,  $MN$ , &  $SD$ ,  $AB$ , deux plans, ils formeront dans le plan de la base, deux lignes droites  $Enm$ ,  $Db a$ , & dans la surface Conique les côtés  $SMm$ ,  $SNn$ ,  $SAa$ ,  $SBb$ ; & leur commune intersection sera la ligne  $SPp$ , qui rencontre le plan de

la base au point  $p$ , où les deux droites  $Em$ ,  $Da$ , s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan  $SMN$  la droite  $HK$  parallele à  $MN$ , & dans le plan  $SAB$  la droite  $FG$  parallele à  $AB$ . Cela posé.

Les triangles semblables  $SPM$ ,  $SpH$ ;  $SPN$ ,  $SpK$ ;  $SPA$ ,  $SpF$ ;  $SPB$ ,  $SpG$ , donnent  $MP \times PN. Hp \times pK :: \overline{SP}^2. \overline{Sp}^2 :: AP \times PB. Fp \times pG$ . Et partant on aura  $MP \times PN. AP \times PB :: Hp \times pK. Fp \times pG$ . Or la raison de  $Hp \times pK$  à  $Fp \times pG$ , est composée des deux raisons de  $Hp \times pK$  à  $mp \times pn$ , & de  $mp \times pn$  ou par la propriété du cercle  $ap \times pb$  à  $Fp \times pG$ . Mais à cause des triangles semblables  $Hpm$ ,  $SEm$ , &  $Kpn$ ,  $SEn$ , il vient  $Hp.mp :: SE.mE$ . Et  $pK.pn :: SE.En$ . Et en multipliant les Antecedens & les Conséquens de ces deux raisons,  $Hp \times pK. mp \times pn :: \overline{SE}.mE \times En$ : on prouvera de même à cause des triangles semblables  $Fpa$ ,  $SDa$ , &  $Gpb$ ,  $SDb$ , que  $ap \times pb. Fp \times pG :: aD \times Db. \overline{SD}^2$ . Il est donc évident que la raison de  $MP \times PN$  à  $AP \times PB$ , est composée des deux raisons de  $\overline{SE}^2$  à  $mE \times En$ , & de  $aD \times Db$  à  $\overline{SD}^2$ ; lesquelles par la propriété du cercle qui est la base du cône, demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que tombent les droites  $MN$ ,  $AB$ , parce que les points  $E$ ,  $D$ , ne changent point. Donc le rectangle  $MP \times PN$  est au rectangle  $AP \times PB$  en raison donnée. *Ce qu'il fal. &c.*

## COROLLAIRE.

FIG. 143. 275. DE-LA on voit que si dans une Séction Coni-  
144. que, où entre les Séctions opposées, il y a deux lignes droites  $MN$ ,  $OR$ , paralleles entr'elles & qui rencontrent aux points  $P$ ,  $Q$ , une troisième ligne droite  $AB$  aussi terminée par la Séction; on aura  $MP \times PN. OQ \times QR :: AP \times PB. AQ \times QB$ .

PROP.

## PROPOSITION X.

## Theorème.

276. *Si par un point quelconque A d'une Parabole ou d'une Hyperbole MAN, l'on tire une ligne droite AB parallèle au côté du cone SD, menée dans la Parabole par le point D où la Dirécitrice touche la base, & dans l'Hyperbole par l'un des deux points où elle la rencontre ; & que par un point quelconque P de cette ligne, l'on tire une ligne MN parallèle à une ligne SE donnée de position, & terminée par la Section ou par les Sections opposées, avec une autre ligne FG parallèle à la ligne Da commune Section du plan SAB avec celui de la base, & terminée par les côtés Sa, SD : je dis que la raison du rectangle  $MP \times PN$  au rectangle  $FP \times PG$  est donnée, c'est à dire qu'elle demeure toujours la même, en quelque endroit de la ligne AB que tombe le point P.* FIG. 145.

Ayant mené par les parallèles  $SE, MN$ , un plan : il formera dans celui de la base une ligne droite  $Enm$  ; dans la surface Conique les côtés  $SMm, SNn$  ; & dans le plan  $SDa$  la ligne  $SPp$  qui rencontre la base au point  $p$ , où les lignes  $Em, Da$ , s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan  $SMN$  la ligne  $HK$  parallèle à  $MN$ . Cela posé, les triangles semblables  $SPM, SpH$  ;  $SPN, SPK$  ;  $SPF, Spa$  ;  $SPG, SPD$  donneront  $MP \times PN. Hp \times pK :: \overline{SP}^2. \overline{Sp}^2 :: FP \times PG. ap \times pD$ , ou par la propriété du cercle  $mp \times pn$ . Et partant on aura  $MP \times PN. FP \times PG :: Hp \times pK. mp \times pn$ . Mais la raison de  $Hp \times pK$  à  $mp \times pn$ , est composée des deux raisons de  $Hp$  à  $pm$ , & de  $pK$  à  $pn$ , c'est à dire, à cause des triangles semblables  $Hpm, Sem$ , &  $Kpn, Sen$ , des deux raisons de  $SE$  à  $Em$ , & de  $SE$  à  $En$  ; & par conséquent  $Hp \times pK. mp \times pn$ , ou  $MP \times PN. FP \times PG :: \overline{SE}^2. mE \times En$ . Donc puisque le point  $E$  ne change point en quelque endroit que l'on prenne le point  $P$ , & que tous les rectangles  $Em \times En$  sont égaux

par la propriété du cercle; il s'ensuit que  $MP \times PN$  est à  $FP \times PG$  en raison donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE.

FIG. 146.

277. DE-LA il est évident que si par un point quelconque  $A$  d'une Parabole ou d'une Hyperbole  $MLAN$ , l'on mene dans la Parabole un diamètre  $AB$ , & dans l'Hyperbole une parallèle  $AB$  à l'une de ses Asymptotes; & que par deux points quelconques  $P, Q$ , de la ligne  $AB$ , l'on tire deux parallèles  $MN, OR$ , terminées par la Section ou par les Sections opposées; on aura  $MP \times PN. OQ \times QR :: AP. AQ$ .

Car menant le plan  $SAB$  qui forme par sa rencontre avec la surface Conique les côtés  $SD, Sa$ , entre lesquels le côté  $SD$  passera par le point où la Diréctrice touche la base lorsque la Section est une Parabole, & par l'un des deux points où la Diréctrice la rencontre lorsque c'est une Hyperbole; & tirant dans le plan  $SDa$  par les points  $P, Q$ , les droites  $FG, TV$ , parallèles à  $Da$ : il est clair par la Proposition précédente que  $MP \times PN. FP \times PG :: OQ \times QR. TQ \times QV$ . Et qu'ainsi  $MP \times PN. OQ \times QR :: FP \times PG. TQ \times QV$ . Or les parties  $PG, QV$ , des lignes  $FG, TV$ , sont égales entr'elles; puisque les lignes  $AB, SD$ , sont parallèles. Et partant  $MP \times PN. OQ \times QR :: FP. TQ :: AP. AQ$ . à cause des triangles semblables  $APF, AQT$ . Donc &c.

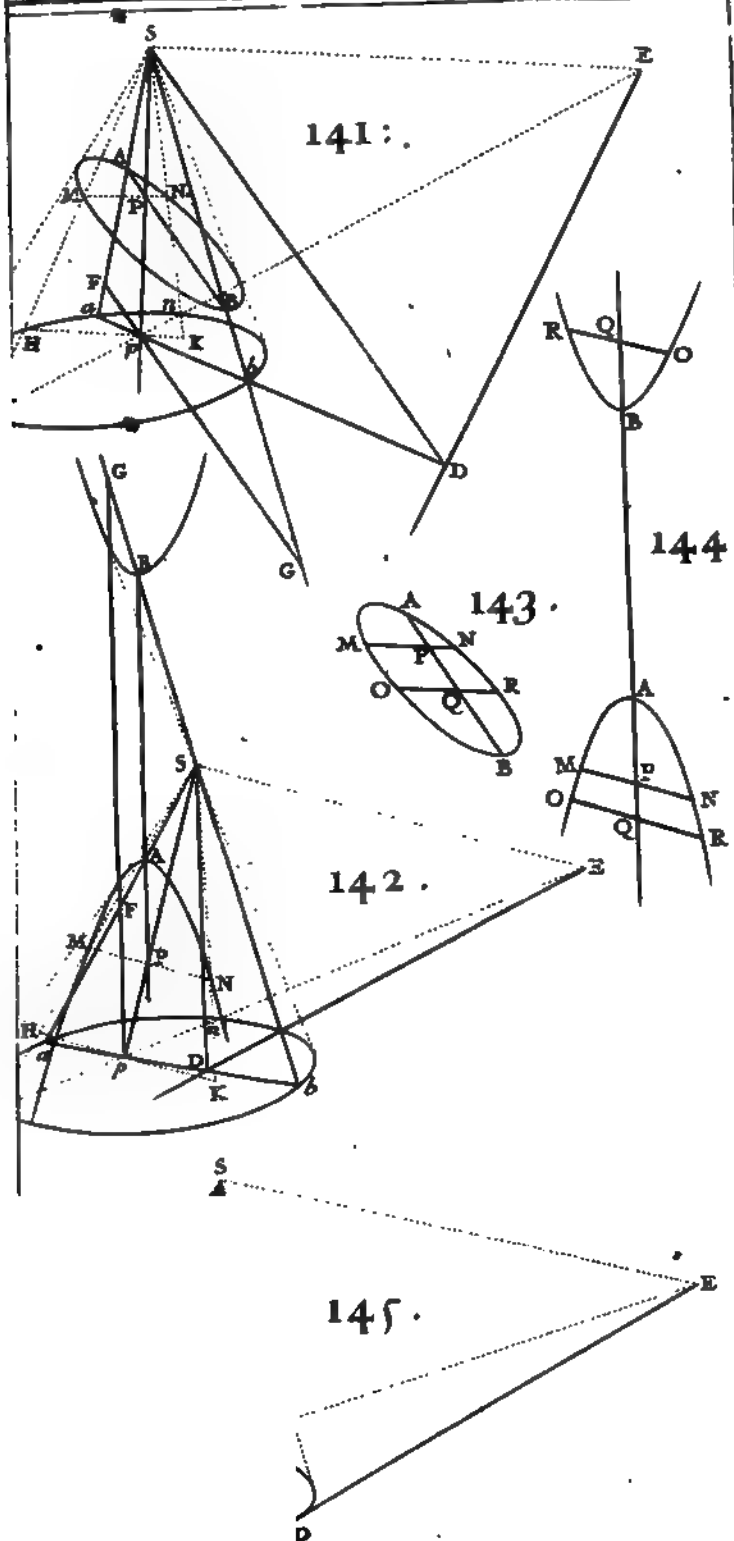
## CHAPITRE II.

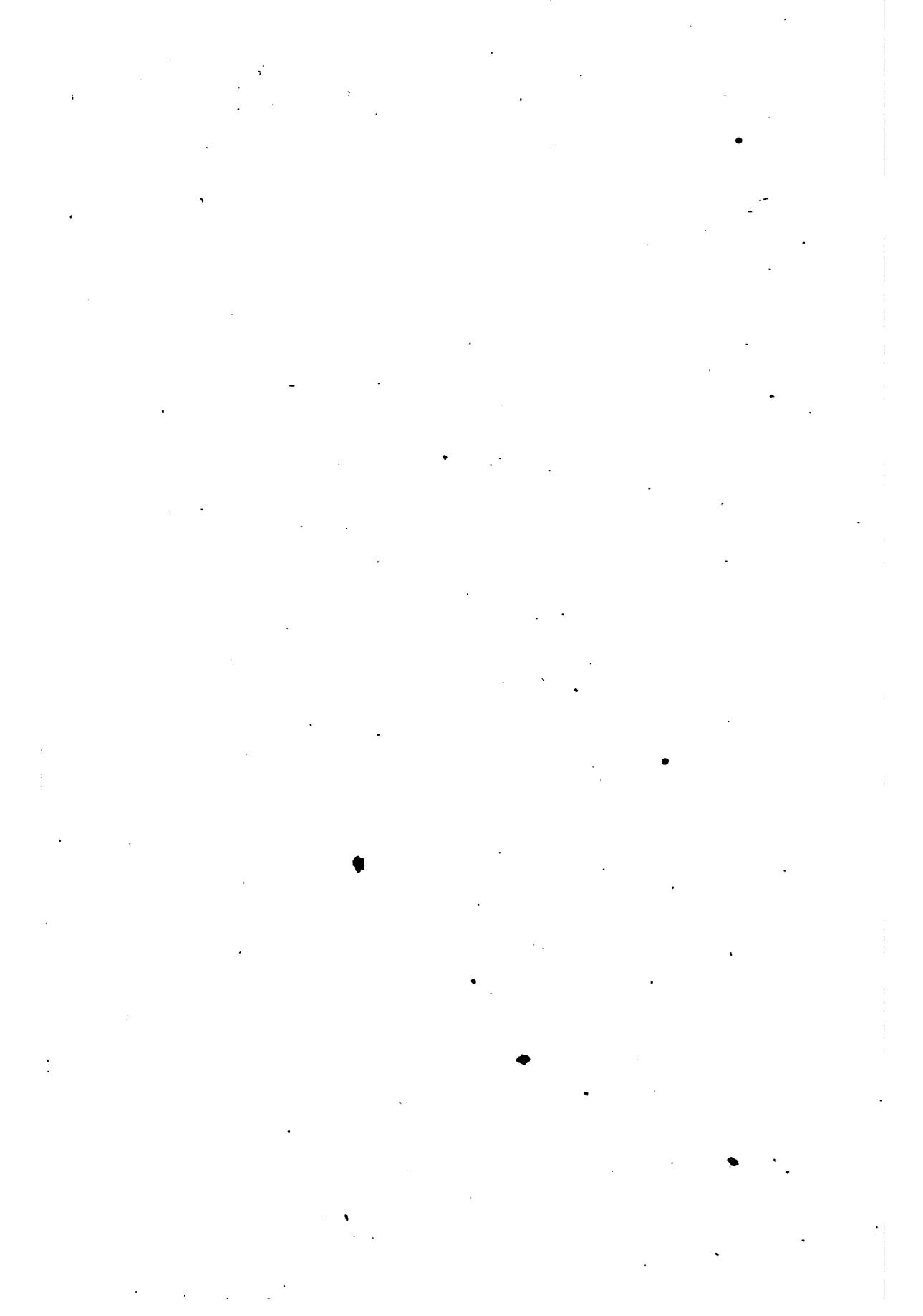
*De l'Ellipse en particulier.*

## DEFINITIONS.

17.

FIG. 147. Si une ligne droite indéfinie  $SZ$  qui est hors le plan d'un cercle  $VXX$ , se meut par un de ses points  $X$  autour de la circonférence de ce cercle toujours parallèle-





lement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même point d'où elle étoit partie : la surface convexe décrite par cette ligne  $SZ$  dans ce mouvement, est appelée *Surface cylindrique*.

18.

Cette ligne  $SZ$  en chaque différente position, en est toujours appelée le *Côté*.

19.

Le cercle  $VXY$ , la *Base*.

20.

La droite indéfinie  $CO$  menée du centre  $C$  de la base parallèlement aux côtés, en est l'*Axe*.

21.

Le solide indéfini compris par la base  $VXY$  & par la Surface cylindrique, est appelé *Cylindre*.

22.

Si l'on coupe un Cylindre par un plan qui ne soit point parallèle à ses côtés, ni au plan de sa base ; la ligne courbe  $AMBN$  formée par la rencontre de ce plan avec la Surface cylindrique, est appelée *Séction cylindrique*.

## PROPOSITION XI.

## Theorème.

278. Si l'on coupe un cylindre par un plan  $uxy$  parallèle FIG. 147. au plan de la base  $VXY$  ; la Séction  $vxy$  sera un cercle qui aura pour centre le point  $c$  où ce plan rencontre l'axe, & pour rayon une ligne  $cx$  égale au rayon  $CX$  de la base.

Car menant par un point quelconque  $x$  de la Séction  $vxy$  un côté  $xX$  de la Surface cylindrique, il sera parallèle\* à l'axe  $Cc$  : c'est pourquoi on pourra faire passer un plan par ces deux lignes, qui formera par sa rencontre avec les deux plans parallèles  $CVXY$ ,  $cvxy$ , deux droites  $CX$ ,  $cx$ , parallèles entr'elles ; & qui seront de plus égales, puisqu'elles sont renfermées entre

A a ij

les parallèles  $Cc$ ,  $Xx$ . Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la Section  $vxy$  qu'on prenne le point  $x$ , il s'ensuit que toutes les lignes  $cx$  menées du point  $c$ , aux points  $x$  de la Section  $vxy$ , sont égales aux rayons  $CX$  de la base : c'est à dire que la Section  $vxy$  fera la circonférence d'un cercle, qui aura pour centre le point  $c$ , où le plan  $vxy$  rencontre l'axe du cylindre, & pour rayon une ligne  $cx$  égale au rayon  $CX$  de la base. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## PROPOSITION XII

## Theorème.

FIG. 148.

279. **T**OUTE Ellipse peut être regardée comme une Section cylindrique.

Ayant mené dans la base du cone où est produite un Ellipse quelconque, le diametre  $ab$  qui rencontre à angles droits au point  $D$  la Diréctrice  $DE$ , soient tirés sur la surface Conique les côtes  $Sa$ ,  $Sb$ , qui rencontrent le plan de l'Ellipse aux points  $A$ ,  $B$ ; & dans les plans parallèles  $AMB$ ,  $SDE$ , les droites  $AB$ ,  $SD$ . Ayant pris  $DF$  moyenne proportionnelle entre  $aD$ ,  $Db$ , & mené à  $SF$  les parallèles  $AG$ ,  $BH$ , soit décrit sur le plan de la base du cone, un cercle qui ait pour diametre la ligne  $GH$ , & une surface cylindrique qui ait pour base ce cercle, & pour côtés les droites  $AG$ ,  $BH$ . Cela posé.

Je dis que si par un point quelconque  $P$  de la ligne  $AB$ , l'on tire à la Diréctrice  $DE$ , une parallèle qui rencontre la surface Conique en  $M$ , & la Cylindrique en  $O$ ; les points  $M$ ,  $O$ , se confondront l'un avec l'autre & n'en feront qu'un seul.

Car ayant fait passer par cette parallèle un plan parallèle au plan des deux bases tant du cone que du cylindre, il formera sur la surface Conique \* un cercle  $KML$  dont le centre sera la commune Section de ce

\* Art. 259.



plan avec l'axe du cone, & sur la surface Cylindrique \* *Art. 278.*  
 un autre cercle  $QMR$  dont le centre sera la commune  
 Section de ce même plan avec l'axe du cylindre. Or le  
 plan  $Sab$  passe \* par l'axe du cone, & le plan  $AGHB$  \* *Def. 6.*  
 ( qui ne fait qu'un seul plan avec celui du triangle  $Sab$  )  
 par l'axe \* du cylindre; & par conséquent les lignes \* *Def. 20.*  
 $KL, QR$ , communes Sections de ces deux plans, avec le  
 plan parallele (à la base) qui passe par la ligne  $POM$ , seront  
 les diametres de ces deux cercles; & cette ligne  $POM$   
 sera perpendiculaire à ces diametres, puisqu'elle est \* pa- \* *Hyp.*  
 rallele à  $DE$  qui est \* perpendiculaire à  $ab$  & à  $GH$  qui ne \* *Hyp.*  
 font \* qu'une même ligne, à laquelle les diametres  $KL$  \* *Hyp.*  
 &  $QR$  qui ne font aussi qu'une même ligne, sont paral-  
 leles. De plus les lignes  $AB, SD$ , étant formées par  
 les rencontres du même plan  $Sba$  avec deux plans pa-  
 ralleles entr'eux; sçavoir, le plan  $SDE$  & celui de l'El-  
 lipse, seront aussi paralleles entr'elles. Ceci bien en-  
 tendu,

1°. Dans le cone, à cause du cercle  $KML$ , on aura  
 $\overline{PM} = KP \times PL$ ; & à cause des triangles semblables  
 $APK, SDa$ , &  $PBL, SDb$ , il vient  $AP. KP ::$   
 $SD. aD$ . Et  $PB. PL :: SD. Db$ . D'où il suit que  
 $AP \times PB. KP \times PL$  ou  $\overline{PM} :: \overline{SD}. aD \times Db$ .

2°. Dans le cylindre, à cause du cercle  $QOR$ , on aura  
 $\overline{PO} = QP \times PR$ ; & à cause des triangles semblables  
 $APQ, SDF$ , &  $PBR, SDF$ , on formera ces deux  
 proportions  $AP. QP :: SD. DF$ . Et  $PB. PR :: SD.$   
 $DF$ . D'où il suit que  $AP \times PB. QP \times QR$  ou  $\overline{PO} ::$   
 $\overline{SD}. DF$  ou  $aD \times Db$ . Donc  $\overline{PM} = \overline{PO}$ , &  
 $PM = PO$ . Donc les points  $M, O$ , se confondent l'un  
 avec l'autre, & n'en font qu'un seul. Donc, puisque cela  
 arrive toujours en quelque endroit de la ligne  $AB$  que  
 l'on prenne le point  $P$ , il s'ensuit que le plan de l'Ellipse  
 rencontre les surfaces Coniques & Cylindriques dans  
 les mêmes points, & qu'ainsi toute Ellipse peut toujours  
 être regardée comme une Section cylindrique.

## A V E R T I S S E M E N T.

Comme un Cylindre est moins composé qu'un cone, en ce que tous ses côtés sont parallèles entr'eux; au lieu que dans le cone ils aboutissent tous au même point qui en est le sommet; on a pris le parti de regarder dans ce Chapitre, l'Ellipse comme la Section d'un cylindre. Ce qui fait qu'on peut démontrer tout à la fois les propriétés de tous ses diametres; & que se servant ensuite dans le cone (comme l'on verra dans le Chapitre suivant) de plans Elliptiques au lieu de circulaires, on prouvera les mêmes choses dans la Parabole & Hyperbole avec une extrême facilité.

## P R O P O S I T I O N XIII.

## Theorème.

FIG. 149.

280. **T**ous les diametres d'une Ellipse passent par un seul & unique point, qui est celui où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre; & y sont coupés en deux parties égales.

*Et réciproquement toutes les lignes qui passent par ce point, & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse; y sont coupées en deux également, & en sont des diametres.*

On nomme ce point le Centre de l'Ellipse.

\*Def. 20.

1°. Soit  $AB$  un diametre quelconque, &  $C$  le point où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre. Si l'on mene les lignes  $Aa$ ,  $Bb$ , parallèles à l'axe  $Cc$ , il est clair\* qu'elles seront des côtés de la surface cylindrique, & que les deux plans  $FAa$ ,  $GBb$ , qui passent par ces deux lignes, & par les deux tangentes  $AF$ ,  $BG$ , qui selon la définition des diametres, doivent être parallèles entr'elles, seront parallèles entr'eux, & toucheront la surface cylindrique dans les côtés  $Aa$ ,  $Bb$ ; d'où il suit que ces deux plans formeront dans le plan de la base deux lignes  $af$ ,  $bg$ , parallèles entr'elles, &

qui toucheront la base aux points  $a, b$ , où les côtés  $Aa, Bb$ , la rencontrent. Or il est démontré dans les Elemens de Geometrie, que la ligne  $ab$  qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles  $af, bg$ , d'un cercle, passe par son centre  $c$ . Partant le plan  $AabB$  passera par l'axe  $Cc$  du cylindre; & la ligne  $AB$ , qui est la rencontre de ce plan avec celui de l'Ellipse, passera par le point  $C$  où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse. De plus à cause des paralleles  $Aa, Bb, Cc$ ; il est évident que le diametre  $AB$  de l'Ellipse, est divisé en deux également au point  $C$ ; puisque le diametre  $ab$  du cercle l'est au point  $c$  qui en est le centre. *Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.*

2°. Si l'on mene par les extremités  $A, B$ , d'une ligne quelconque  $AB$ , qui passe par le point  $C$  où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe  $Cc$  du cylindre, les lignes  $Aa, Bb$ , paralleles à cet axe; il est clair selon la définition 17. de la surface cylindrique, qu'elles en seront des côtés, & que le plan  $AabB$  passera par l'axe  $Cc$  du cylindre. D'où l'on voit que la ligne  $ab$  commune Section de ce plan & de celui de la base, passe par le centre  $c$  de la base; & qu'ainsi, puisqu'elle y est coupée en deux également, la ligne  $AB$  la fera aussi au point  $C$ . De plus les tangentes  $af, bg$ , qui passent par les extremités du diametre  $ab$  étant paralleles entr'elles; les plans touchans  $faA, gbB$ , seront paralleles entr'eux, & formeront dans le plan de l'Ellipse deux lignes paralleles  $AF, BG$ , qui la toucheront aux extremités  $A, B$ , de la ligne  $AB$ , qui en fera par conséquent un diametre. *C'est ce qu'il falloit démontrer en second lieu.*

## COROLLAIRE.

281. DE-LA il est évident que par un point donné sur le plan d'une Ellipse autre que le centre, on ne peut faire passer qu'un seul diametre.

## PROPOSITION XIV.

## Theorème.

FIG. 149. 282. **T**OUTE ordonnée  $MPN$  de part & d'autre à un diamètre  $AB$ , est coupée en deux également par ce diamètre en un point  $P$ .

*Et réciproquement si une ligne quelconque  $MPN$  terminée par une Ellipse & qui ne passe point par le centre  $C$ , est coupée en deux également en  $P$ , par un diamètre  $AB$ ; elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diamètre.*

Ayant mené par les points  $A, B, M, N$ , les côtés  $Aa, Bb, Mm, Nm$ , parallèles à l'axe  $Cc$  du cylindre, & qui rencontrent le plan de la base aux points  $a, b, m, n$ ; la ligne  $Pp$  commune Section des deux plans  $AabB, MmnN$ , sera parallèle aux côtés du cylindre, puisque tous les côtés sont parallèles entr'eux. De plus le plan  $AabB$  passera par l'axe  $Cc$  du cylindre, puisque le diamètre  $AB$  passe par le point  $C$  où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse; & il formera par conséquent dans le plan de la base une ligne  $ab$  qui passera par le centre  $c$ , c'est à dire, un diamètre. Cela posé.

Puisque par la supposition la ligne  $MPN$  est ordonnée de part & d'autre au diamètre  $AB$ , elle sera parallèle aux tangentes  $AF, BG$ , qui passent par les extrémités de ce diamètre; & par conséquent les plans touchans  $FAa, GBb$ , seront parallèles au plan  $MmnN$ . Les lignes que ces trois plans forment dans le plan de la base; sçavoir les deux tangentes  $af, bg$ , & la ligne  $mn$ , seront donc parallèles entr'elles; & ainsi la ligne  $mn$  sera perpendiculaire au diamètre  $ab$ , qui la divisera par conséquent en deux parties égales au point  $p$ . D'où il suit à cause des parallèles  $Mm, Pp, Nn$ , que la ligne  $MN$  sera aussi divisée en deux parties égales au point  $P$ .

Maintenant pour prouver la converse, on menera  
dans

dans le plan de l'Ellipse deux tangentes  $AF, BG$ , \* *Art. 167.* parallèles à  $MN$ ; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diamètre  $AB$ , il est clair selon les définitions 13. & 14. que cette ligne  $MN$  sera ordonnée de part & d'autre à ce diamètre, & par conséquent (selon ce qu'on vient de démontrer) coupée en deux également en  $P$  par ce même diamètre. Or comme l'on ne peut mener par le point  $P$  \* *Art. 181.* qu'un seul diamètre, il s'ensuit que si une ligne  $MN$  terminée par une Ellipse, & qui ne passe point par le centre  $C$ , est coupée en deux également en  $P$  par un diamètre  $AB$ , elle lui sera ordonnée de part & d'autre.

## PROPOSITION XV.

## Theorème.

283. *S'IL y a dans une Ellipse deux diametres  $AB, DE$ , dont l'un d'eux  $DE$  soit parallele aux Tangentes  $AF, BG$ , qui passent par les extremités de l'autre  $AB$ ; je dis réciproquement que le diamètre  $AB$  sera parallele aux Tangentes qui passent par les extremités du diamètre  $DE$ .* FIG. 149.

Les deux diametres  $AB, DE$ , sont appellés *Conjugués* l'un à l'autre.

Ayant mené par les points  $A, B, D, E$ , les côtés  $Aa, Bb, Dd, Ee$ , du cylindre, lesquels rencontrent le plan de la base aux points  $a, b, d, e$ ; les plans  $AabB, DdeE$ , passeront par l'axe  $Cc$  du cylindre, puisque les lignes  $AB, DE$ , sont des diametres de l'Ellipse; & formeront par conséquent dans le plan de la base, deux diametres  $ab, de$ . Or le plan touchant  $FAa$  étant parallele au plan  $DdeE$ , formera dans le plan de la base une Tangente  $af$  parallele au diamètre  $de$ , lequel diamètre sera par conséquent perpendiculaire sur le diamètre  $ab$ . Si donc l'on mene par l'une des extremités  $d$  du diamètre  $de$  une Tangente  $dh$  au cercle, elle sera parallele au diamètre  $ab$ , & le plan  $hdD$  parallele au

Bb

plan  $AabB$ : c'est pourquoi les communes Séctions de ces deux plans avec le plan de l'Ellipse, sçavoir la Tangente  $DH$  & le diamètre  $AB$ , sont parallèles entr'elles. On prouvera la même chose à l'égard de la Tangente qui passe par l'autre extrémité  $E$  du diamètre  $DE$ . Donc &c.

## COROLLAIRE I.

284. **D**E-LA il est évident que s'il y a deux diamètres conjugués  $AB$ ,  $DE$ , dans une Ellipse; les deux plans qui passent par ces diamètres & par l'axe  $Cc$  du cylindre, formeront dans le plan de la base deux diamètres  $ab$ ,  $de$ , qui seront perpendiculaires entr'eux: ce qui est réciproque.

## COROLLAIRE II.

285. **I**L suit encore de cette Proposition que si par un point quelconque  $P$  d'un diamètre  $AB$ , on mène une ordonnée  $MPN$  de part & d'autre, elle sera parallèle au diamètre  $DE$  qui lui est conjugué; & qu'ainsi  
 \* *Art. 275.* on aura \*  $MP \times PN$  ou  $\overline{PM}^2$ .  $DC \times CE$  ou  $\overline{DC}^2$  ::  $AP \times PB$ .  $AC \times CB$  ou  $\overline{AC}^2$ . Ce qui donne  $\overline{PM}^2$ .  $AP \times PB$  ::  $\overline{DC}^2$ .  $\overline{AC}^2$  ::  $4\overline{DC}^2$  ou  $\overline{DE}^2$ .  $4\overline{AC}^2$  ou  $\overline{AB}^2$ . C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque  $MP$  à un diamètre  $AB$ , est au réctangle  $AP \times PB$  fait des parties de ce diamètre, comme le quarré du diamètre  $DE$  qui lui est conjugué, est au quarré du diamètre  $AB$ .

## PROPOSITION XVI.

## Theorème.

FIG. 130.

286. **S**i par un point quelconque  $M$  d'une Ellipse  $AMB$ , l'on mène une Tangente  $FMG$  qui rencontre aux points  $F$ ,  $G$ , deux autres Tangentes  $AF$ ,  $BG$ , parallèles entr'elles: je dis que  $FM$ .  $MG$  ::  $AF$ .  $BG$ .

# DES TROIS SECT. CONIQ. EN GENERAL. 195

Ayant mené par les points d'attouchemens  $A, B, M$ , les côtés  $Aa, Bb, Mm$ , du cylindre, & fait passer par ces côtés & par les Tangentes  $AF, BG, FG$ , les trois plans  $FAa, GBb, FMm$ , ou  $GMm$ ; il est clair que les communes Séctions  $Ff, Gg$ , des deux premiers plans avec le troisiéme, seront paralleles tant entr'elles, qu'avec les côtés du cylindre; car les deux plans  $FMm, FAa$ , passant par les côtés  $Mm, Aa$ , qui sont paralleles entr'eux, leur commune Séction  $Ff$  sera parallele à ces côtés; & par la même raison  $Gg$  commune Séction des deux plans  $GBb, GMm$ , sera parallele aux côtés  $Bb, Mm$ . De plus les lignes  $af, bg$ , que forment les plans touchans paralleles  $FAa, GBb$ , dans le plan de la base, en seront des Tangentes paralleles; les parties  $fm, mg$ , de la troisiéme Tangente formée dans le plan de la base par le troisiéme plan touchant  $FMm$ , ou  $GMm$ , seront égales (par la propriété du cercle) aux Tangentes  $af, bg$ ; scavoir,  $fm$  à  $fa$ , &  $mg$  à  $gb$ . Cela posé.

A cause des lignes  $Aa, Ff, Mm, Gg, Bb$ ; &  $AF, BG$ ; &  $af, bg$ , qui sont paralleles entr'elles, on aura  $FM. MG :: fm$  ou  $fa. mg$  ou  $gb :: FA. GB$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE I.

287. Si l'on mene par les points d'attouchement  $A, B$ , des deux Tangentes paralleles entr'elles  $AF, BG$ , un diametre  $AB$  qui rencontre en  $T$  la Tangente  $FMG$ , & qu'on tire l'ordonnée  $MP$  à ce diametre: il est évident que  $AP. PB :: FM. MG :: AF. BG :: AT. BT$ . Et qu'ainsi  $PB - AP. PB :: BT - AT$  ou  $AB. BT$ .

## COROLLAIRE II.

288. DE-LA on tire la manière suivante de mener d'un point donné  $M$  sur une Ellipse la Tangente  $MT$ , un diametre  $AB$  étant donné avec la position de ses ordonnées.

De l'une des extrémités  $B$  du diamètre  $AB$ , soit tirée au point donné  $M$  la droite  $BM$ . Puis ayant mené l'ordonnée  $MP$  au diamètre  $AB$ , & pris sur ce diamètre du côté de  $B$  la partie  $PH$  égale à  $PA$ , soit tirée  $HK$  parallèle à  $PM$ , rencontrant la ligne  $BM$  en  $K$ , par ou & par l'autre extrémité  $A$  soit menée  $AK$ . Soit enfin tirée  $MT$  parallèle à  $AK$ , elle sera la Tangente qu'on cherche.

Car à cause des parallèles  $MP$ ,  $HK$ , &  $AK$ ,  $MT$ , l'on aura  $BP. PH.$  ou  $PA :: PM. MK :: BT. TA$ .

## COROLLAIRE III.

289. S'IL y a dans une Ellipse deux Tangentes  $MT$ ,  $NT$ , qui se rencontrent en un point  $T$ ; je dis que le diamètre  $AB$  qui passe par le point  $P$  milieu de la ligne  $MN$  qui joint les deux points d'attouchement, passera aussi par le point  $T$ . Car  $PN$  est ordonnée au diamètre  $AB$  de même que  $PM$ ; & par conséquent \* les Tangentes  $MT$ ,  $NT$ , iront chacune rencontrer ce diamètre en un point  $T$ , tel que  $PB - AP. PB :: AB. BT$ ; c'est à dire dans le même point.

## COROLLAIRE IV.

290. SI l'on joint dans une Ellipse les points d'attouchemens  $M$ ,  $N$ , de deux Tangentes  $MF$ ,  $NL$ , par une ligne droite  $MN$ ; & qu'il y ait une troisième Tangente  $FAL$  parallèle à  $MN$ : je dis que les parties  $FA$ ,  $AL$  de cette dernière Tangente, prises entre son point d'attouchement  $A$  & les deux premières, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point d'attouchement  $A$  le diamètre  $AB$ , il est clair que la ligne  $MN$  est ordonnée de part & d'autre à ce diamètre, puisqu'elle est parallèle à la Tangente  $FL$  qui passe par son extrémité  $A$ ; & qu'ainsi il la coupe par le milieu en \* Art. 289.  $P$ , & passe \* par conséquent par le point de rencontre



des deux Tangentes  $MF$ ,  $NL$ ; où bien il leur sera parallèle, si la ligne  $MN$  est \* un diamètre. Or il est \* Art. 283. visible en l'un & l'autre cas, que  $FZ$  sera divisé en deux parties égales au point  $A$  par le diamètre  $AB$ ; puis que  $MN$  l'est en  $P$  par ce même diamètre.

## CHAPITRE III.

*De la Parabole & de l'Hyperbole en particulier.*

## PROPOSITION XVII.

## Theorème.

291. **D**ANS une Parabole toute ordonnée  $MPN$  de FIG. 151. part & d'autre à un diamètre  $AB$ , est coupée en deux également par ce diamètre au point  $P$ : ce qui est réciproque.

Ayant fait passer par la ligne  $MN$  un plan Elliptique, il formera dans le plan touchant  $SDE$  parallèle au plan Parabolique, une Tangente  $DE$  parallèle à  $MN$ . De plus le plan  $SAF$  mené par le Sommet  $S$  du cône, & par la Tangente  $AF$  qui passe par l'origine  $A$  du diamètre  $AB$ , formera dans le plan Elliptique une Tangente  $af$ ; & la ligne  $Da$  qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes  $DE$ ,  $af$ , passera par le point  $P$ ; puisque le diamètre  $AB$  est parallèle au côté touchant  $SD$ . Cela posé.

Puisque par la supposition \* les deux lignes  $AF$ ,  $MN$ , \* Def. 14. sont parallèles entr'elles; il s'ensuit que la Tangente  $af$ , qui est la commune Section de deux plans qui passent par ces deux lignes, sera parallèle à  $MN$ ; & par conséquent à  $DE$ . D'où l'on voit \* que la ligne  $Da$ , qui joint les points d'at- \* Def. 13. touchement des deux Tangentes parallèles  $DE$ ,  $af$ , est un diamètre de l'Ellipse; & qu'ainsi la ligne  $MN$  qui est parallèle à ces Tangentes & terminée par l'Ellipse, sera \* divisée en deux également au point  $P$ . \* Art. 281.

Maintenant pour prouver la converse, on menera

- \* *Art. 267.* dans le plan de la Parabole \* une Tangente  $AF$  parallèle à la ligne  $MN$ ; & ayant tiré par le point d'attouchement  $A$  un diamètre  $AB$ , il aura pour ordonnée de part & d'autre \* la ligne  $MN$ , qu'il divisera par conséquent en deux parties égales au point  $P$  selon ce qu'on vient de démontrer. Or comme il n'y a qu'un seul diamètre \* qui puisse passer par le point de milieu  $P$  de la ligne  $MN$ , il s'ensuit &c.

## COROLLAIRE.

292. D.E-LA il est évident que si l'on mene par deux points quelconques  $P, Q$ , d'un diamètre  $AB$  deux ordonnées de part & d'autre  $MPN, OQR$ ; on aura \* *Art. 277.* toujours \*  $MP \times PN$  ou  $\overline{PM}$ ,  $OQ \times QR$  ou  $\overline{QO} :: AP. AQ$ . C'est à dire que les quarrés de deux ordonnées quelconques  $PM, QO$ , à un diamètre  $AB$ , seront toujours entr'eux, comme les parties  $AP, AQ$ , de ce diamètre prises depuis son origine  $A$  jusqu'à ces mêmes ordonnées.

## PROPOSITION XVIII.

## Theorème.

- FIG. 151. 293. SI par un point quelconque  $M$  d'une Parabole, l'on mene une ordonnée  $MP$  à tel de ses diamètres  $AB$  qu'on voudra, & une Tangente  $MT$  qui rencontre en  $T$  ce diamètre prolongé au delà de son origine  $A$ : je dis que ses parties  $AP, AT$ , seront égales.

La même préparation étant faite que dans la Proposition précédente, soit de plus mené par le Sommet  $S$  du cone & par la Tangente  $MT$ , le plan touchant  $STM$  qui formera dans le plan Elliptique la Tangente  $MH$ , laquelle rencontrera le diamètre  $Da$  de l'Ellipse en un point  $H$  par ou passera la ligne  $ST$ ; & soit enfin tirée la droite  $TG$  parallèle à  $SA$ . Ceci bien en-

- \* *Art. 287.* tendu, on aura \*  $DH. Ha :: DP. Pa$ , & (*alternando*)

$DH. DP :: Ha. Pa.$  Mais à cause des parallèles  $AB, SD, \& SA, TG$ ; il est clair que  $DH. DP :: SH. ST :: Ha. Ga.$  Donc  $Ha. Pa :: Ha. Ga.$  Donc aussi  $Pa = Ga$ ; & par conséquent  $AP = AT.$  Ce qu'il falloit démontrer.

## PROPOSITION XIX.

## Theorème.

294. **D**ANS les Hyperboles opposées tout diamètre  $AB$  FIG. 152. passe par le point d'intersection  $C$  des deux asymptotes, & y est coupé en deux également : ce qui est réciproque.

On nommera ce point, Centre.

Soit  $HSb$  une des deux communes Sections du plan parallèle au plan Hyperbolique, & des deux surfaces Coniques opposées; & soit l'Asymptote  $FG$  formée par la rencontre du plan Hyperbolique avec celui qui touche ces deux surfaces en cette ligne  $HSb$ . Soient menées par les Tangentes parallèles  $AF, BG$ , qui passent par les extrémités du diamètre  $AB$ , & qui rencontrent l'Asymptote  $FG$  aux points  $F, G$ , deux plans Elliptiques parallèles, ils formeront dans le plan touchant qui passe par le côté  $HSb$ , les Tangentes parallèles  $FH, Gbf$ , & dans le plan touchant  $SAF$  les Tangentes parallèles  $AF, af$ .

Cela posé, les lignes parallèles  $FH, Gh$ , étant renfermées entre les deux autres parallèles  $FG, Hb$ , seront égales entr'elles; & les triangles semblables  $SHF, Shf$ , &  $SFA, Sfa$ , donneront cette proportion,  $HF. hf :: SF. sf :: FA. fa.$  Et partant  $HF. FA :: hf. fa :: * hG. GB.$  Donc puisque  $HF = hG$ , il s'ensuit que  $AF = BG$ ; & à cause des triangles semblables  $ACF, BCG$ , que  $AC = CB$ : c'est à dire que l'Asymptote  $FG$  passe par le point de milieu  $C$  du diamètre  $AB$ . On prouvera de même que l'autre Asymptote passera encore par le point de milieu  $C$  du diamètre  $AB$ ; d'où l'on voit que le diamètre  $AB$  passe par le

point d'intersection  $C$  des deux Asymptotes, & y est coupé en deux parties égales.

Soit à présent une ligne  $AB$  qui passant par le point d'intersection  $C$  des deux Asymptotes, rencontre les Hyperboles opposées aux points  $A, B$ . Si l'on mène par le point  $A$  la Tangente  $AF$ , & à l'Hyperbole opposée une Tangente  $DG$  \* parallèle à  $AF$ ; il est clair parce qu'on vient de prouver que la ligne  $AD$  qui joint les point d'attouchemens de ces deux Tangentes étant un diamètre, passera par le point d'intersection  $C$  des Asymptotes. Elle se confondra donc avec la ligne  $AB$  qui passe aussi \* par les deux mêmes points  $A, C$ : c'est à dire que le point  $D$  tombera sur le point  $B$ . C'est pourquoi cette ligne  $AB$  sera un diamètre, & partant coupée en deux parties égales au point  $C$ .

#### COROLLAIRE.

295. **D**E-LA on voit que d'un point donné au dedans d'une Hyperbole, on ne peut mener qu'un seul diamètre; puisqu'il n'y a qu'une seule ligne qui puisse passer par ce point, & par le centre.

#### PROPOSITION XX.

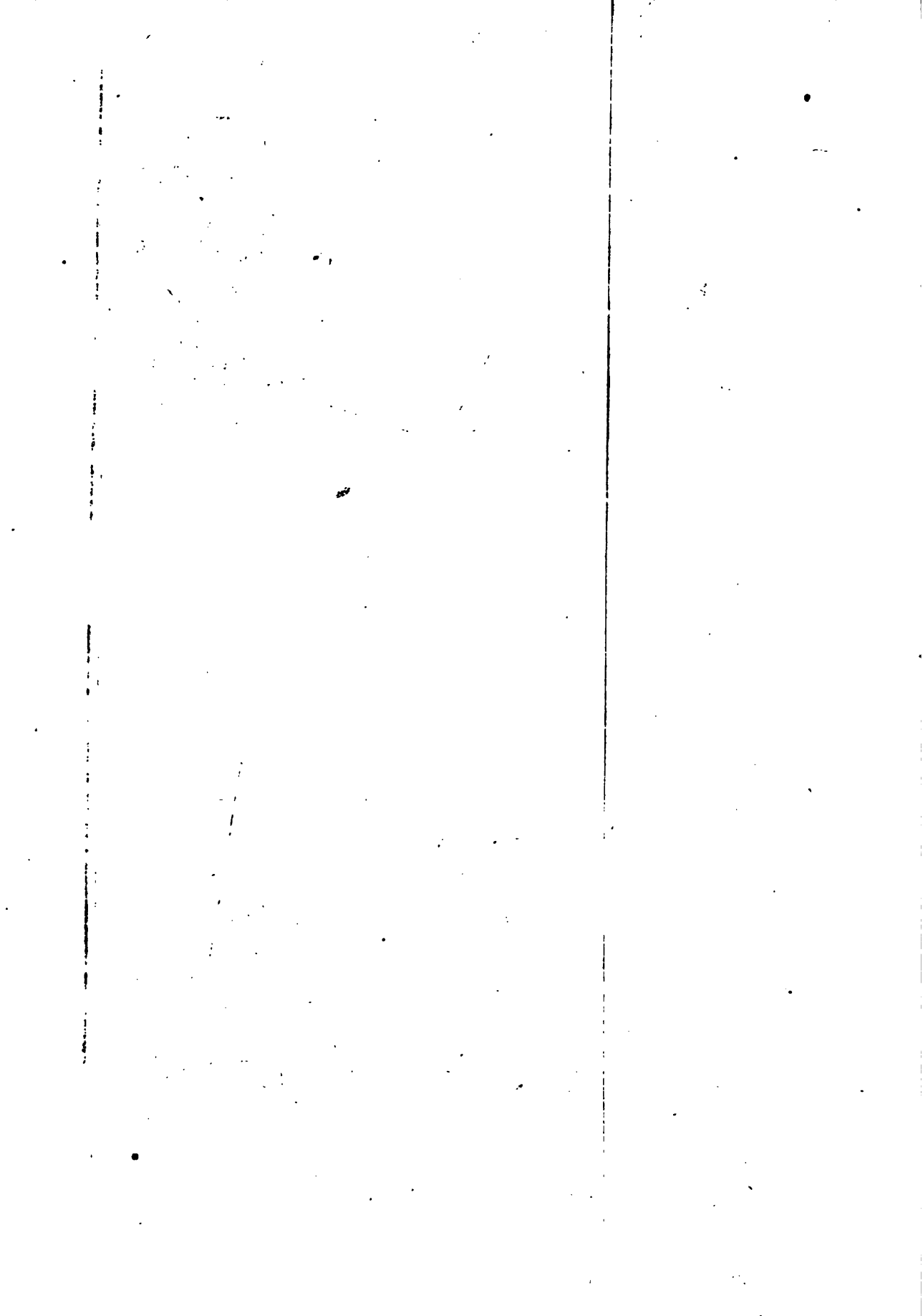
##### Theorème.

FIG. 153.

296. **D**ANS les Hyperboles opposées toute ordonnée  $MPN$  de part & d'autre à un diamètre  $AB$ , est coupée en deux également par ce diamètre au point  $P$ : ce qui est réciproque.

Ayant fait passer par la ligne  $MN$  un plan Elliptique, il formera dans les deux plans touchans  $SAB$ ,  $SBG$ , deux Tangentes  $af$ ,  $bg$ ; & la ligne  $ab$  qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes, étant la commune Section du plan Elliptique & du plan  $SAB$ , passera par le point  $P$ . Or puisque par la supposition  
les





les deux lignes  $AF$ ,  $MN$ , sont parallèles, il s'ensuit que la ligne  $af$  qui est la commune Section de deux plans, qui passent par ces deux lignes, sera parallèle à  $MN$ . Par la même raison la Tangente  $bg$  commune Section du plan Elliptique & du plan touchant  $SBG$ , lesquels passent par les deux parallèles  $MN$ ,  $BG$ , sera parallèle à  $MN$ . Les deux Tangentes  $af$ ,  $bg$ , seront donc parallèles entr'elles: d'où il suit que la ligne  $ab$  \* est un diamètre de l'Ellipse; & qu'ainsi la ligne  $MN$  \* est divisée en deux parties égales au point  $P$ . \* *Def. 13.* \* *Art. 182.*

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans le plan des Hyperboles \* deux Tangentes  $AF$ ,  $BG$ , \* *Art. 167.* parallèles à la ligne  $MN$  terminée par l'Hyperbole; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diamètre  $AB$ , il est clair selon la Définition quatorzième, que ce diamètre aura pour ordonnée de part & d'autre la ligne  $MN$ ; & qu'ainsi il la coupera selon ce qu'on le vient de démontrer, en deux parties égales au point  $P$ . Or comme il n'y a qu'un seul diamètre \* qui puisse passer par ce point, il s'ensuit que si une ligne  $MN$  terminée par une Hyperbole, est coupée en deux également en  $P$  par un diamètre  $AB$ , elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diamètre. \* *Art. 195.*

## COROLLAIRE.

297. DE-LA il est évident que si l'on mène deux ordonnées de part & d'autre  $MPN$ ,  $OQR$ , à un diamètre  $AB$ , on aura toujours \*  $MP \times PN$ . ou  $\overline{PM}$ . \* *Art. 175.*  $OQ \times QR$  ou  $\overline{QO}$ . ::  $AP \times PB$ .  $AQ \times QB$ . C'est à dire &c.

## PROPOSITION XXI.

## Theorème.

298. SI par un point quelconque  $M$  d'une Hyperbole, *FIG. 154.* l'on mène une Tangente  $MFG$  qui rencontre deux autres Tangentes parallèles  $AF$ ,  $BG$ , aux points  $F$ ,  $G$ : je dis que  $MF$ .  $MG$  ::  $AF$ .  $BG$ . Cc

Ayant mené deux plans Elliptiques paralleles qui passent par les Tangentes  $AF$ ,  $BG$ ; ils formeront dans le plan touchant  $SMG$  deux Tangentes  $HF$ ,  $hG$ , paralleles entr'elles; & le plan Elliptique qui passe par  $BG$ , formera dans le plan touchant  $SAF$ , une Tangente  $af$  qui rencontrera la Tangente  $hG$  au point  $f$ , où la ligne  $FS$  rencontre ce plan Elliptique. Cela posé, les Tangentes  $af$ ,  $BG$ , seront paralleles entr'elles; puisqu'elles le sont chacune à la Tangente  $AF$ : & partant \* on aura  $BG. Gh :: af. fh$  (à cause des triangles semblables  $Sbf$ ,  $SHF$ , &  $Saf$ ,  $SAF$ ,)::  $AF.FH$ . Donc  $BG.AF :: Gh.FH$  (à cause des triangles semblables  $Mgh$ ,  $MFH$ ,)::  $MG.MF$ . Ce qu'il falloit démontrer.

Il est visible qu'on peut tirer de cette Proposition les mêmes Corollaires, que dans l'Ellipse art. 287. 288. 289. & 290. c'est pourquoi je ne m'amuserai point à les re-  
eter.

## PROPOSITION XXII.

### Theorème.

FIG. 155. 299. Si une ligne droite  $EG$  terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point  $A$ ; je dis que cette ligne droite y sera coupée en deux parties égales.

Soient menés par le Sommet  $S$  du cone, & par les deux Asymptotes  $CF$ ,  $CG$ , deux plans, lesquels toucheront \* la surface Conique dans les côtés  $SM$ ,  $SN$ , où le plan  $MSN$  parallele au plan Hyperbolique la rencontre. Soit mené un plan Elliptique qui passe par la droite  $FG$ ; il formera dans les deux plans touchans deux Tangentes  $MF$ ,  $NG$ , & dans le plan  $MSN$  une ligne droite  $MN$  parallele à  $FG$ , & qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes. Cela posé, il est visible que la ligne  $FG$  \* est coupée en deux parties égales au point  $A$ ; puisqu'elle touche dans ce point l'Ellipse, aussi-bien que l'Hyperbole.



## COROLLAIRE I.

300. COMME il ne peut y avoir qu'une seule ligne  $FG$  qui passant par un point donné  $A$  au dedans d'un angle  $FCG$ , & étant terminée par ses côtés, soit coupée en deux également par ce point  $A$ ; il s'ensuit que si une ligne droite  $FG$  terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point  $A$  qui la divise cette droite  $FG$  deux parties égales, elle touchera l'Hyperbole en ce point.

## COROLLAIRE II.

301. DE-LA on voit que pour mener d'un point donné  $A$  sur une Hyperbole dont les Asymptotes  $CF, CG$ , sont données, une Tangente  $FAG$ ; il n'y a qu'à tirer la ligne  $AD$  parallèle à l'une des Asymptotes  $CG$ , & terminée par l'autre; & ayant pris la partie  $DF$  égale à  $CD$ , tirer la ligne  $FAG$ : elle sera la Tangente cherchée. Car à cause des triangles semblables  $FCG, FDA$ , la ligne  $FG$  sera coupée par le milieu en  $A$ ; puisque  $CF$  l'est en  $D$ . \* *Hyp.*

## COROLLAIRE III.

302. SI l'on joint deux points quelconques  $M, N$ , Fig. 156. d'une Hyperbole  $MAN$  par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes aux points  $H, K$ ; les deux parties  $MH, NK$ , de cette droite renfermées entre l'Hyperbole & les Asymptotes, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point  $P$  milieu de  $MN$ , le diamètre  $CP$ ; & par le point  $A$  où ce diamètre rencontre l'Hyperbole, la ligne  $FG$  parallèle à  $MN$ , & terminée par les Asymptotes: il est clair \* que cette ligne  $FG$  sera \* *Art. 196.* Tangente en  $A$ ; & par conséquent \* divisée en deux parties \* *Art. 199.* égales en ce point. D'où il est clair, à cause des triangles semblables  $CAF, CPH$ , &  $CAG, CPK$ , que  $PH=PK$ ; & par conséquent  $MH=NK$ .

## COROLLAIRE IV.

Fig. 157. 303. Si d'un point donné  $A$  sur une Hyperbole, l'on tire deux droites  $AF$ ,  $AG$ , terminées par les Asymptotes; & que d'un autre point quelconque  $M$  de la même Hyperbole, ou de son opposée, on tire deux autres droites  $MH$ ,  $MK$ , terminée aussi par les Asymptotes, & parallèles aux deux premières  $AF$ ,  $AG$ : je dis que  $FA \times AG = HM \times MK$ .

Car 1°. Lorsque les deux points  $A$ ,  $M$ , tombent sur la même Hyperbole; ayant joint ces deux points  $A$ ,  $M$ , par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes en  $P$  &  $Q$ , les triangles semblables  $PAF$ ,  $PMH$ , &  $QMK$ ,  $QAG$ , donneront ces deux proportions,  $AF : MH :: AP : MP$  \* : :  $MQ : AQ :: MK : AG$ . ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens,  $FA \times AG = HM \times MK$ .

2°. Lorsque les points  $A$ ,  $M$ , tombent sur les deux Hyperboles opposées; ayant mené par le point donné  $A$  & par le centre  $C$ , le diamètre  $AB$ , & tiré les droites  $BD$ ,  $BE$ , parallèles à  $AF$ ,  $AG$ , & terminées par les mêmes Asymptotes; il est clair que les triangles  $CAF$ ,  $CBD$ , &  $CAG$ ,  $CBE$ , seront semblables & de plus égaux entr'eux, puisque \*  $CA = CB$ . C'est pourquoi  $BD = AF$ , &  $BE = AG$ ; & partant  $DB \times BE = FA \times AG$ . Or selon le cas précédent  $KM \times MH = DB \times BE$ . Donc aussi  $FA \times AG = KM \times MH$ .

## A V E R T I S S E M E N T.

Je laisse les autres propriétés des Asymptotes, & des Diamètres conjugués, parcequ'elles se tirent de celles-ci sur le plan, comme l'on a fait dans le troisième Livre; mon dessein n'étant ici que de faire voir de quelle utilité peut être la considération du Solide, pour démontrer tout à la fois & sans aucun calcul, les pro-

DES TROIS SECT. CONIQ. EN GENERAL. 205

priétés de tous les Diametres, des Tangentes, & des Asymptotes; d'où dépendent toutes les autres. C'est ce que je crois avoir exécuté d'une manière fort aisée, & entièrement nouvelle; puisque je ne me suis point servi de lignes coupées harmoniquement, comme ont fait les Geometres Modernes après M<sup>re</sup>. *Paschal* & *Desargues*; ce qui les a obligés d'avoir recours à un grand nombre de Lemmes, dont les démonstrations seules me paroissent aussi longues que celles de tout ce Livre.

## LIVRE SEPTIEME.

*Des lieux Geometriques.*

## DÉFINITION I.

FIG. 158.  
159.

SOIENT deux droites inconnuës & indéterminées  $AP$ ,  $PM$ , qui fassent entr'elles un angle  $APM$  donné ou pris à volonté; & dont l'une  $AP$  que j'appellerai toujours  $x$ , ait un commencement fixe au point  $A$ , & s'étende indéfiniment le long d'une ligne droite donnée de position; & l'autre  $PM$  que je nommerai  $y$ , en change continuellement, & soit toujours parallèle à elle-même : c'est à dire que toutes les droites  $PM$  doivent être parallèles entr'elles. Soit de plus une équation qui ne renferme que ces deux inconnuës  $x$  &  $y$  mêlées avec des connuës, & qui exprime la relation de chaque indéterminée  $AP (x)$  à sa correspondante  $PM (y)$ . La ligne droite ou courbe qui passe par les extrémités de toutes les valeurs de  $y$ , c'est à dire, par tous les points  $M$ , est appelée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation.

FIG. 158.

Supposons, par exemple, que l'équation  $y = \frac{bx}{a}$  doive exprimer toujours la relation de  $AP (x)$  à  $PM (y)$  qui font entr'elles un angle donné ou pris à volonté  $APM$ . Ayant pris sur la ligne  $AP$  la partie  $AB = a$ , & de  $B$  mené  $BE = b$  parallèle à  $PM$  & du même côté; la droite indéfinie  $AE$  sera nommée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  la droite  $MP$  parallèle à  $BE$ , les triangles semblables  $ABE$ ,  $APM$ , donneront toujours cette proportion,  $AB (a) . BE (b) :: AP (x) . PM (y) = \frac{bx}{a}$ . Et partant la droite  $AE$  est le lieu de tous les points  $M$ .

De même si  $yy = aa - xx$  exprime la relation de Fig. 159.  
 $AP$  à  $PM$ , & que l'angle  $APM$  soit droit, la cir-  
 conference d'un cercle qui a pour rayon la droite  $AB$   
 $= a$  prise sur la ligne  $AP$ , sera appelée en général un  
*Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équa-  
 tion. Car ayant mené d'un de ses points quelconques  
 $M$ , la perpendiculaire  $MP$  ( $y$ ), on aura toujours par  
 la propriété du cercle,  $\overline{PM}^2 (yy) = DP \times PB (aa - xx)$   
 en prenant  $BD$  pour le diamètre de ce cercle. D'où l'on  
 voit que la circonference est le lieu de tous les points  $M$ .

## REMARQUE.

304. Si après avoir supposé que les  $PM$  tendent Fig. 158.  
 vers un certain côté de la ligne  $AB$ , comme vers  $Q$ , 159.  
 on suppose ensuite qu'elles tendent vers le côté oppo-  
 sé, comme vers  $G$ ; il faut remarquer que leurs valeurs  
 deviennent négatives de positives qu'elles étoient, &  
 qu'ainsi on a purlors  $PM = -y$ . De même si après  
 avoir supposé que les points  $P$  tombent d'un certain  
 côté par rapport au point  $A$ , comme du côté de  $B$ , on  
 suppose ensuite qu'ils tombent du côté opposé, comme  
 vers  $D$ ; les  $AP$  deviendront négatives de positives  
 qu'elles étoient, & on aura par conséquent  $AP = -x$ .  
 Les positives de ces valeurs s'appellent aussi *Valeurs*  
*vraies*; & les négatives, *Valeurs fausses*. Or un lieu Geo-  
 metrique doit passer par les extremités de toutes les va-  
 leurs tant vraies que fausses de l'inconnue  $y$ , qui répon-  
 dent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue  
 $x$ . Si donc l'on mene la droite  $QAG$  parallele à  
 $PM$ , un lieu Geometrique pourra se trouver dans les  
 quatre angles  $BAQ, BAG, GAD, DAQ$ , comme dans  
 le second exemple (fig. 159.), ou seulement dans quel-  
 ques-uns de ces angles comme dans le premier (fig. 158.).  
 Car supposé dans le second exemple, qu'on fasse d'a-  
 bord  $AP = x$ , &  $PM = y$ , en prenant le point  $M$  sur  
 le quart  $QB$  de la circonference, si ensuite le point  $M$

est pris sur le quart  $GB$ , on aura  $AP = x$ , &  $PM = -y$ ; s'il est pris sur  $DG$ , on aura  $AP = -x$ , &  $PM = -y$ ; & enfin s'il est pris sur  $DQ$ , on aura  $AP = -x$ , &  $PM = y$ ; & il viendra toujours dans tous ces cas par la propriété du cercle, la même équation  $yy = aa - xx$ ; parce que les quarrés de  $\pm y$  & de  $\pm x$  sont les mêmes dans tous ces cas, sçavoir  $yy$  &  $xx$ . De même dans le premier exemple, si en prenant d'abord le point  $M$  du côté de  $E$  sur  $AE$ , dans l'angle  $QAP$ , on fait  $AP = x$ , &  $PM = y$ ; Ce point  $M$  pris ensuite sur  $EA$  prolongée du côté de  $A$  dans l'angle  $GAD$ , donnera  $AP = -x$ , &  $PM = -y$ ; & à cause des triangles semblables  $ABE$ ,  $APM$ , on formera cette proportion  $AB(a) \cdot BE(b) :: AP(-x) \cdot PM(-y) = -\frac{bx}{a}$ ; & partant  $y = \frac{bx}{a}$ , qui est la même équation que l'on trouve en supposant que le point  $M$  tombe dans l'angle  $BAQ$ .

## A V E R T I S S E M E N T.

Lorsqu'il s'agira dans la suite de construire le lieu d'une équation donnée, on supposera toujours que  $AP(x)$  &  $PM(y)$  soient positives, c'est à dire que tous les points  $M$  tombent dans le même angle  $BAQ$ . Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui sera renfermée dans cet angle.

## D É F I N I T I O N II.

Les anciens Geometres ont appelé *Lieux plans*, ceux qui sont des lignes droites, ou des cercles; *Solides*, ceux qui sont des Paraboles, des Ellipses, ou des Hyperboles. Mais les Modernes distribuent les lieux Geometriques en differens degres: ils comprennent sous le premier tous ceux où les inconnues  $x$  &  $y$  n'ont qu'une dimension dans leurs équations; sous le second, tous ceux où elles n'en ont que deux; sous le troisième, tous ceux où elles n'en ont que trois; & ainsi de suite. Où l'on doit

doit observer que les inconnuës  $x$  &  $y$  ne se doivent point multiplier l'une l'autre dans le premier degré ; qu'elles ne doivent faire au plus ensemble qu'un produit de deux dimensions  $xy$  dans le second, un de trois  $xx$  ou  $yy$  dans le troisième, &c.

## DÉFINITION III.

Les termes de l'équation d'un lieu, sont regardés comme differens entr'eux lorsque l'une ou l'autre des inconnuës  $x$  &  $y$ , ou toutes les deux jointes ensemble s'y trouvent avec différentes dimensions. Ainsi dans le premier degré si l'on propose l'équation  $y - \frac{bx}{a} + c = 0$ , les termes  $y$ ,  $-\frac{bx}{a}$ ,  $c$ , seront differens ; & de même dans le second, si l'on proposoit  $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy - \frac{fx}{a} - gx + bx - bh + ll = 0$ , les termes  $yy$ ,  $\frac{2bxy}{a}$ ,  $-2cy$ ,  $-\frac{fx}{a}$ ,  $gx + bx$ ,  $-bh + ll$ , seroient chacun differens.

## AVERTISSEMENT.

Je n'expliquerai ici en détail que les lieux du premier & du second degré ; ce que j'en dirai donnera beaucoup d'ouverture pour construire des lieux plus composés dans les cas particuliers qui se peuvent rencontrer : on en trouvera même quelques exemples dans la suite. Mon dessein est donc de donner dans ce Livre une methode générale pour construire les lieux du premier & du second degré, leurs équations étant données ; & de faire voir que le premier ne renferme que la ligne droite ; & que le second ne renferme de même que la Parabole, l'Ellipse & le Cercle, l'Hyperbole & les Hyperboles opposées.

## DEMANDE.

305. ON demande qu'on puisse réduire sous une fraction simple & abrégée, toute quantité littérale donnée, si composée qu'elle puisse être.

On demande par exemple, 1°. Qu'on puisse prendre une fraction simple  $\frac{b}{a} = \frac{ca+fg}{af+fe} + \frac{aa}{gg}$ , où les lettres  $a, c, f, g$ , marquent des lignes données. 2°. Qu'on puisse trouver une seule ligne droite  $s = \frac{aga-bca}{bb+af}$ , où les lignes droites  $a, b, c, e, f, g$ , sont données. 3°. Qu'on puisse trouver un carré  $tt = ss - \frac{cca-ebb}{bb+af}$ , où les lignes  $a, b, c, e, f, b, s$ , sont données; de sorte qu'on ait son côté  $t = \sqrt{ss - \frac{cca-ebb}{bb+af}}$ . On enseignera au commencement du huitième Livre comment cela se fait.

## PROPOSITION I.

## Problème.

306. CONSTRUIRE tout lieu du premier degré, son équation étant donnée.

Lorsque les inconnues  $x$  &  $y$  n'ont qu'une dimension dans l'équation proposée, & que leur produit  $xy$  ne s'y rencontre point; le lieu de cette équation sera toujours une ligne droite, & on la réduira à l'une des quatre formules suivantes.

1°.  $y = \frac{bx}{a}$ , 2°.  $y = \frac{bx}{a} + c$ , 3°.  $y = \frac{bx}{a} - c$ , 4°.  $y = c - \frac{bx}{a}$ , dans lesquelles on suppose que l'inconnue  $y$  soit délivrée de fractions, & que la fraction qui multiplie l'autre inconnue  $x$  soit réduite \* sous cette expression  $\frac{b}{a}$ , &

\* Art. 305. tous les termes connus sous cette autre  $c$ .

Les mêmes choses étant posées que dans la définition première, on construira les lieux des trois dernie-



## DES LIEUX GEOMETRIQUES. 217

res formules de la maniere qui suit, car pour le lieu de la premiere, on l'a déjà construit dans cette définition.

Pour construire le lieu de la seconde formule FIG. 160.

$y = \frac{bx}{a} + c$ , on prendra sur la ligne  $AP$  la partie  $AB = a$  & ayant mené les droites  $BE = b$ ,  $AD = c$ , paralleles à  $PM$  & du même côté, on tirera la ligne  $AE$  indéfinie du côté de  $E$ , & la droite indéfinie  $DM$  parallele à  $AE$ . Je dis que cette ligne  $DM$  renfermée dans l'angle  $PAQ$  fait par la ligne  $AP$  & par la droite  $AQ$  menée parallelement à  $PM$  & du même côté, sera le lieu de cette équation ou formule. Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  la ligne  $MP$  parallele à  $AQ$  & qui rencontre  $AE$  en  $F$ ; les triangles semblables  $ABE$ ,  $APF$ , donneront  $AB(a) \cdot BE(b) :: AP(x) \cdot PF = \frac{bx}{a}$ . Et partant  $PM(y) = PF(\frac{bx}{a}) + FM(c)$ .

Le lieu de la troisième formule  $y = \frac{bx}{a} - c$  se construit en cette sorte. Ayant pris  $AB = a$ , & mené les droites  $BE = b$ ,  $AD = c$ , paralleles à  $PM$ ; sçavoir,  $BE$  du même côté que  $AQ$ , &  $AD$  du côté opposé; on tirera par les points  $A, E$ , la droite  $AE$  indéfinie du côté de  $E$ , & par le point  $D$  la ligne  $DM$  parallele à  $AE$ , & qui rencontre  $AP$  en  $G$ . Je dis que la droite indéfinie  $GM$  renfermée dans l'angle  $PAQ$ , sera le lieu qu'on cherche. Car on aura toujours  $PM(y) = PF(\frac{bx}{a}) - FM(c)$ .

FIG. 161.

Enfin pour avoir le lieu de la quatrième formule FIG. 162.  
 $y = c - \frac{bx}{a}$ . Ayant pris sur  $AP$  la partie  $AB = a$ , & mené les droites  $BE = b$ ,  $AD = c$ , paralleles à  $PM$ ; sçavoir,  $BE$  du côté opposé, &  $AD$  du même côté que  $AQ$ ; on tirera par les points  $A, E$ , la ligne  $AE$  indéfinie du côté de  $E$ , & par le point  $D$  la ligne  $DM$  parallele à  $AE$ , & qui rencontre en  $G$  la ligne  $AP$ . Je dis que la droite  $DG$  renfermée dans l'angle  $PAQ$ , sera le lieu cherché. Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  la ligne

D d ij

$MP$  parallèle à  $AQ$ , & qui rencontre  $AE$  en  $F$ , on aura toujours  $PM(y) = FM(c) - PF(\frac{bx}{a})$ .

Si l'inconnue  $x$  n'est multipliée par aucune fraction, les quatre formules précédentes se changeront en celles-ci.

1°.  $y = x$ , 2°.  $y = x + c$ , 3°.  $y = x - c$ , 4°.  $y = c - x$ , lesquelles se construisent de la même manière, en observant de prendre la droite  $BE$  égale à  $AB$  que l'on prend de telle grandeur qu'on veut.

#### REMARQUE.

307. IL peut arriver que l'équation soit un lieu à la ligne droite, quoiqu'elle ne renferme qu'une des inconnues  $x$  ou  $y$ ; ce qui donne encore ces deux nouvelles formules,  $y = c$ , &  $x = c$ .

FIG. 163.

Pour construire la première formule  $y = c$ . Les mêmes choses étant toujours posées que dans la définition première; on menera par le point fixe  $A$ , la droite  $AD = c$  parallèle à  $PM$  & du même côté, on tirera ensuite la droite indéfinie  $DM$  parallèle à  $AP$ : je dis que cette ligne  $DM$  sera le lieu de l'équation proposée. Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  la droite  $MP$  parallèle à  $AD$ , il est clair qu'on aura toujours  $PM(y) = AD(c)$ .

FIG. 164.

Pour construire la seconde formule  $x = c$ . Ayant pris  $AP = c$ , on tirera la droite indéfinie  $PM$  qui fasse avec  $AP$  l'angle  $APM$  donné ou pris à volonté: je dis qu'elle sera le lieu de tous les points  $M$ . Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ , la droite  $MQ$  parallèle à  $AP$ , & qui rencontre au point  $Q$  l'indéfinie  $AQ$  parallèle à  $PM$ ; il est clair qu'on aura toujours  $MQ$  ou  $AP(x) = c$ , de quelque grandeur que l'on puisse prendre  $PM(y)$ .

#### AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos pour éclairer l'esprit des Lecteurs, de leur donner une idée de la méthode dont

je vais me servir pour la construction des lieux du second degré. Elle consiste à construire d'abord une Parabole en sorte que l'équation qui en exprime la nature soit la plus composée qu'il se puisse, de faire ensuite la même chose dans l'Ellipse, & dans l'Hyperbole rapportée à ses diamètres & considérée entre les asymptotes; ce qui fournit des équations ou formules générales. J'examine ce qu'elles ont chacune de particulier, afin qu'une équation étant proposée, je puisse connoître à laquelle de ces formules elle doit être rapportée; & comparant ensuite tous les termes avec ceux de la formule, j'en tire la construction du lieu de cette équation, en observant certaines remarques qui servent pour toutes les formules. Tout ceci s'éclaircira parfaitement dans les Lemmes & Propositions qui suivent.

## LEMME FONDAMENTAL

*Pour la construction des lieux à la Parabole.*

308. SOIENT comme dans la première définition *Fig. 164.* deux lignes droites inconnues & indéterminées *AP* (*x*), *PM* (*y*); & soient de plus des lignes droites données *m, n, p, r, s*. Cela posé.

1°. On prendra sur la ligne *AP*, la partie *AB = m*; *Fig. 164.* ayant mené les droites *BE = n*, *AD = r*, parallèles à *PM* & du même côté, on tirera par le point *A* la droite *AE* que j'appelle *e*, & par le point *D* la droite indéfinie *DG* parallèle à *AE*; sur laquelle *DG* ayant pris la partie *DC = s* du côté de *PM*, on décrira \* du diamètre *CG* qui ait pour paramètre *CH = p*, & pour ordonnées des droites parallèles à *PM*, une Parabole *CM* qui s'étende du même côté que *AP*. Je dis que la portion renfermée dans l'angle *PAD*, fait par la ligne *AP*, & par une ligne *AD* menée par le point fixe *A* parallèlement à *PM* & du même côté, est le lieu de l'équation ou formule suivante. *\* Art. 161.*

D d iii

$$yy - \frac{2x}{m}xy + \frac{x^2}{mm}xx - 2ry + \frac{2xy}{m}x + rr = 0.$$

$$- \frac{r}{m}x + ps.$$

Car ayant mené d'un des points quelconques  $M$  de cette portion de Parabole, la ligne  $MP$  qui fasse avec  $AP$  l'angle donné ou pris à volonté  $APM$ , & qui rencontre les parallèles  $AE, DG$ , aux points  $F, G$ ; les triangles semblables  $ABE, APF$ , donneront ces deux proportions,  $AB$

$(m). AE(e) :: AP(x). AF$  ou  $DG = \frac{ex}{m}$ . Et  $AB(m).$

$BE(n) :: AP(x). PF = \frac{nx}{m}$ . Et par conséquent  $GM$

ou  $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m} - r$ , &  $CG$  ou  $DG - DC$

\* Art. 19.  $= \frac{ex}{m} - s$ . Or la Parabole donne \*  $\overline{GM}^2 = CG \times CH$ , laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

Etc. 166. 2°. On menera par le point fixe  $A$ , une ligne droite indéfinie  $AQ$  parallèle à  $PM$  & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie  $AB = m$ , on tirera  $BE = n$  parallèle à  $AP$  & du même côté que  $PM$ , & par les points déterminés  $A, E$ , la ligne  $AE$  que j'appelle  $e$ ; & ayant pris sur  $AP$  la partie  $AD = r$  du même côté que  $PM$ , on tirera la droite indéfinie  $DG$  parallèle à  $AE$ , sur laquelle on prendra la partie  $DC = s$  aussi du même côté de  $PM$ . On décrira ensuite \* du diamètre  $CG$  qui ait pour paramètre  $CH = p$ , & pour ordonnées des droites parallèles à  $AP$ , une Parabole  $CM$  qui s'étende du même côté que  $AQ$ . Je dis que la portion renfermée dans l'angle  $BAP$ , sera le lieu de cette seconde équation ou formule.

\* Art. 161.

$$xx - \frac{2x}{m}yx + \frac{xy}{mm}yy - 2rx + \frac{2xy}{m}y + rr = 0.$$

$$- \frac{r}{m}y + ps.$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ , la ligne  $MQ$  parallèle à  $AP$ , & qui rencontre les paral,

les  $AE, DG$ , aux points  $F, G$ ; les triangles semblables  $ABE, AQF$ , donneront ces deux proportions,  $AB(m). AE(e) :: AQ$  ou  $PM(y). AF$  ou  $DG = \frac{y}{m}$ . Et  $AB(m). BE(n) :: AQ(y). QF = \frac{ny}{m}$ . Et par conséquent  $GM$  ou  $QM - QF - FG = x - \frac{y}{m} - r$ , &  $CG$  ou  $DG - DC = \frac{2}{m} - s$ . Or la Parabole donne  $\overline{GM} = CG \times CH$ , laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

## COROLLAIRE.

309. IL est clair 1°. Que dans la première de ces équations ou formules, le carré  $yy$  se trouve sans fraction, & que dans la seconde c'est le carré  $xx$ . 2°. Que dans ces deux formules les deux carrés  $yy$  &  $xx$  s'y trouvent avec les mêmes lignes, en sorte que le carré  $\frac{xx}{mm}$  de la moitié de la fraction  $\frac{2s}{m}$  qui multiplie le plan  $xy$ , multiplie l'un des carrés  $xx$  ou  $yy$ ; d'où il suit que si le plan  $xy$  ne se rencontreroit point dans l'une ou l'autre de ces deux formules, le carré  $\frac{xxx}{mm}$  ou  $\frac{xyy}{mm}$  ne s'y rencontreroit point non plus, puisqu'alors la fraction donnée  $\frac{2s}{m}$  seroit nulle.

## PROPOSITION II.

## Problème.

310. CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan  $xy$  ne se rencontrant point, il n'y a qu'un des deux carrés  $xx$  &  $yy$ ; ou bien le plan  $xy$  s'y rencontrant, les deux carrés  $xx$  &  $yy$  s'y rencontrent aussi avec les mêmes lignes, en sorte que le carré de la moitié de la

*fraction qui multiplie  $xy$ , soit égal à celle qui multiplie le carré de l'une des inconnues. On suppose toujours qu'il y ait un des carrés  $xx$  ou  $yy$  qui soit dépourvu de fractions.*

On comparera chaque terme de l'équation donnée, avec celui qui lui répond dans la première formule du Lemme précédent, si le carré  $yy$  s'y rencontre sans fraction; ou avec celui qui lui répond dans la seconde formule, lorsque c'est le carré  $xx$ . On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités  $m, n, p, r, s$ , par le moyen desquelles on décrira comme l'on a enseigné dans le Lemme (en se servant des deux Remarques suivantes) une Parabole qui sera le lieu cherché.

#### REMARQUE I.

311. 1°. ON prendra pour  $AB(m)$  telle grandeur positive que l'on voudra. 2°. Les lignes  $AB(m)$ ,  $BE(n)$  étant données, la ligne  $AE(e)$  l'est aussi puisque l'angle  $ABE$  est donné. 3°. Lorsque  $n=0$ , la ligne  $AE$  tombe sur  $AB$ , c'est à dire, sur  $AP$  dans la construction de la première formule, & sur  $AQ$  dans celle de la seconde: alors on aura  $AB(m) = AE(e)$ , puisque les points  $B, E$ , se confondront alors ensemble. 4°. Lorsque la valeur de l'une des quantités  $n, r, s$ , est négative, il faut prendre ou mener la ligne qu'elle exprime du côté opposé à celui de  $PM$ ; au lieu qu'il la faut mener du même côté, comme l'on a fait dans le Lemme, lorsqu'elle est positive.

#### REMARQUE II.

312. S'IL arrive que la valeur du paramètre  $CH(p)$  soit négative, il faudra que la Parabole s'étende du côté opposé à celui du Lemme: c'est à dire, du côté opposé à celui vers lequel s'étend l'indéterminée  $AP$  dans la construction de la première formule, & l'indéterminée terminée

terminée  $AQ$  dans celle de la seconde. Tout ceci s'éclaircira parfaitement par les Exemples qui suivent.

## E X E M P L E I.

313. Soit  $yy - 2ay - bx + cc = 0$  l'équation donnée, dont il faut construire le lieu.

Comme le carré  $yy$  se trouve ici sans fraction, je choisis la première formule\* du Lemme, de laquelle comparant \* Art. 308. chaque terme avec celui qui lui répond dans la proposée, n. 1. j'ai 1°.  $\frac{2^e}{2} = 0$ , parce que le plan  $xy$  ne se rencontrant point dans la proposée, on doit regarder ce plan comme étant multiplié par zero; d'où je tire  $n = 0$ , & par conséquent \* Art. 311.  $m = c$ : c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où  $\frac{n}{m}$  se rencontre, & mettant au lieu de  $c$  sa valeur  $m$ , je trouve  $yy - 2ry - px + rr + ps = 0$ . 2°. La comparaison des termes correspondans  $-2ry$  &  $-2ay$  donne  $r = a$ . 3°. Celle de  $-px$  &  $-bx$  fournit  $p = b$ . 4°. Celle des termes où les inconnues  $x$  &  $y$  ne se trouvent point, donne enfin  $rr + ps = cc$ , d'où en mettant pour  $r$  &  $p$  leurs valeurs  $a$  &  $b$ , je tire  $s = \frac{cc - aa}{b}$ , qui est une valeur négative lorsque  $a$  surpasse  $c$ , comme on le suppose ici. Je n'ai point comparé les premiers termes  $yy$  &  $yy$  entr'eux; parce qu'étant précisément les mêmes, cela ne feroit rien connoître. Or les valeurs de  $n$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $s$ , étant ainsi déterminées, je construis le \* Art. 308. lieu en me servant de la construction\* de la formule, & n. 11. observant ce qu'il y a dans la première\* Remarque en \* Art. 311. cette sorte.

Puisque  $BE(n) = 0$ , les points  $B$ ,  $E$ , se confondent, & la ligne  $AE$  tombe\* sur  $AP$ ; c'est pourquoi je me- \* Art. 311. ne d'abord par le point fixe  $A$  la ligne  $AD(r) = a$  Fig. 167. parallèle à  $PM$ , & du même côté, parce que sa valeur est positive. Je tire ensuite  $DG$  parallèle à  $AP$ , sur laquelle je prends  $DC = \frac{aa - cc}{b} = -s$  du côté opposé à

Ee

*\* Art. 161.*  $PM$ ; parce que  $s = \frac{a-y}{p}$ , qui est une valeur négative, Je décris enfin \* du diamètre  $CG$  ( qui ait pour parametre la ligne  $CH$  ( $p$ )  $= b$ , & pour ordonnées des droites paralleles à  $PM$ ) une Parabole; & je dis que les deux portions  $OMM$ ,  $RMS$ , renfermées dans l'angle  $PAO$  fait par  $AP$  & par la ligne  $AO$  menée parallelement à  $PM$  & du même côté, fera le lieu de l'équation donnée.

Car menant d'un de leurs points quelconques  $M$ , la ligne  $MP$  qui fasse avec  $AP$  l'angle donné ou pris à volonté  $APM$ , & qui rencontre  $DG$  au point  $G$ ; on aura  $GM = y - a$ , ou  $GM = a - y$ , selon que le point  $M$  tombera audessus ou audessous du diamètre  $CG$ ; &  $CG$  ou *\* Art. 19.*  $DG + CD = x + \frac{a^2}{p}$ ; & partant \* par la propriété de la Parabole,  $\overline{GM}^2 (yy - 2ay + aa) = CG \times CH (bx + aa - cc)$ , c'est à dire  $yy - 2ay - bx + cc = a$ , qui est l'équation donnée. Donc &c.

REMARQUE.

314. Si l'on prolonge  $AQ$  de l'autre côté de  $A$  vers  $X$ , il faut remarquer,

1°. Que la portion indéfinie  $SM$  de la Parabole, renfermée dans l'angle  $SAX$ , fera le lieu de toutes les valeurs fausses & de l'inconnue  $y$ , qui répondent aux valeurs vraies de l'autre inconnue  $x$  dans l'équation donnée. En effet si l'on prend  $AP$  plus grande que  $AS$ , & qu'on mène  $PM$  parallele à  $AX$ , & du même côté, laquelle rencontre la portion  $SM$  en  $M$ ; l'on aura \*  $PM = -y$ , & partant la droite  $GM$  ou  $GP + PM = a - y$ , & on retrouvera par la propriété de la Parabole comme ci-dessus l'équation donnée.

2°. Que la portion  $RCO$  de cette Parabole, qui tombe dans l'angle  $TAO$  opposé au sommet à l'angle  $SAX$ , fera le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnue  $y$



dans l'équation donnée, qui répondent aux valeurs fausses de l'autre inconnue  $x$ ; car faisant \*  $AP = -x$ , on \* Art. 304. retrouvera encore l'équation donnée.

3°. Que s'il tomboit une portion de cette Parabole dans l'angle  $TAX$  opposé au sommet à l'angle  $PAO$ , elle seroit le lieu des valeurs fausses de l'inconnue  $y$ , qui répondroient aux valeurs fausses de l'autre inconnue  $x$ . De sorte que cette Parabole est le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue  $y$ , qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue  $x$ , dans l'équation donnée  $yy - 2ay - bx + c = 0$ .

D'où l'on voit que dans cet Exemple il y a deux valeurs vraies  $PM, PM$ , de l'inconnue  $y$ , qui répondent à la même valeur vraie  $AP$  de l'autre inconnue  $x$ , lorsque cette ligne  $AP$  est moindre que  $AS$ ; qu'il y a une valeur vraie  $PM$ , & une fausse  $-PM$ , lorsque  $AP$  surpasse  $AS$ ; qu'il n'y a qu'une valeur vraie  $SV$  de  $y$ , l'autre étant nulle ou zero, lorsque  $AP = AS$ ; qu'il y a deux valeurs vraies  $PM, PM$ , de l'inconnue  $y$ , qui répondent à la même valeur fausse  $-AP$  de l'inconnue  $x$ , lorsque  $AP$  est moindre que  $AT$ ; que ces deux valeurs deviennent égales chacune à la Tangente  $TC$ , lorsque  $AP = AT$ ; & qu'enfin si l'on prenoit  $AP (-x)$  plus grande que  $AT$ , comme l'appliquée  $PM$  ne rencontreroit alors la Parabole en aucun point, il s'ensuivroit qu'il n'y auroit aucune valeur vraie ou fausse de l'inconnue  $y$ , qui pût répondre à cette valeur fausse  $-AP$  de l'autre inconnue  $x$ : c'est à dire que les valeurs de l'inconnue  $y$  deviendroient en ce cas imaginaires.

Tout ceci se doit entendre de la même manière dans tous les autres Exemples qui suivent; tant dans la Parabole que dans les autres Sections Coniques: de sorte que la Section Conique qu'on trouvera, sera non-seulement le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnue  $y$  par rapport aux valeurs vraies de l'autre inconnue  $x$ ;

mais aussi celui de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue  $y$  par rapport aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue  $x$ .

## EXEMPLE II.

315. Soit l'équation donnée  $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx - 2cy - bx + cc = 0$ , dont il faille construire le lieu.

Comme le carré  $yy$  est ici sans fraction, je choisis de même que dans l'Exemple précédent, la première formule\* du Lemme; & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée,

\* Art. 308.  
n. 1.

\* Art. 311. 1°.  $\frac{2b}{m} = -\frac{2b}{a}$ ; d'où en faisant  $m = a$ , je tire  $n = -b$ .

2°.  $\frac{bb}{mm} = \frac{bb}{aa}$ ; d'où il vient, comme ci-dessus,  $n = -b$ .

3°.  $r = -c$ . 4°.  $\frac{2b - r}{m} = -b$ ; & partant  $p = \frac{ab + 2bc}{c}$ , en mettant pour  $m, n, r$ , leurs valeurs  $a, -b, -c$ .

5°.  $rr + ps = cc$ , ce qui donne  $s = 0$ , en mettant pour  $rr$  la valeur  $cc$ . Or ces valeurs de  $m, n, r, p, s$ , étant ainsi déterminées, je construis le lieu de cette équation en me servant de la construction\* de la première formule en cette sorte.

\* Art. 308.  
n. 1.

Fig. 168. Ayant pris sur la ligne  $AP$  la partie  $AB(m) = a$ , je mène les droites  $BE = b = -n$ ,  $AD = c = -r$  parallèles à  $PM$ , & du côté opposé, parce que  $n = -b$  &  $r = -c$  qui sont des valeurs négatives. Je tire ensuite par les points déterminés  $A, E$ , la ligne  $AE(s)$  qui est donnée, & par le point  $D$  la ligne  $DG$  parallèle à  $AE$ . Cela fait comme  $DC(s)$  est nulle ou zero, le point  $C$  tombe sur  $D$ ; c'est pourquoi je décris\* du diamètre  $DG$  (qui ait pour paramètre  $DH(p) = \frac{ab + 2bc}{c}$ , & pour ordonnées des droites parallèles à  $PM$ ) une Parabole; & je dis que la portion  $OM$  renfermée dans l'angle  $PAH$ , où l'on suppose que doivent tomber tous les points  $M$ , sera le lieu de l'équation donnée.

\* Art. 161.





Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ , la ligne  $MP$  qui fasse avec  $AP$  l'angle donné ou pis à volonté  $APM$ , & qui rencontre les parallèles  $AE$ ,  $DG$ , aux points  $F$ ,  $G$ ; les triangles semblables  $ABE$ ,  $APF$ , donneront ces deux proportions,  $AB(a) : AE(e) :: AP(x) : AF$  ou  $DG = \frac{ax}{a}$ . Et  $AB(a) : BE(b) :: AP(x) : PF = \frac{bx}{a}$ . Et par conséquent  $GM$  ou  $PM - PF + FG = y - \frac{bx}{a} + c$ . Or par la propriété \* de la Parabole,  $GM^2 = GD \times DH$ , c'est à dire, \* Art. 19. en mettant les valeurs analytiques,  $yy - \frac{bx}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx - + 2cy - bx + cc = 0$ . Donc &c.

## REMARQUE I.

316. Si la ligne  $AP$  ne coupoit point la Parabole; mais qu'elle la touchât ou qu'elle tombât toute entière au dehors, il s'ensuivroit qu'aucun des points cherchés  $M$  ne pourroit tomber dans l'angle  $PAH$ , comme l'on avoit supposé en faisant la construction; & qu'ainsi il n'y auroit aucune valeur vraie de l'inconnue  $y$  qui répondit à une valeur vraie de l'autre inconnue  $x$ , de quelque grandeur qu'elle pût être.

FIG. 168.

Cette Remarque est générale pour tous les Exemples pareils à celui-ci, non seulement dans la Parabole, mais aussi dans les autres Sections.

## REMARQUE II.

317. Il est à propos de remarquer que si l'on avoit pris pour  $AB(m)$  une autre grandeur que  $a$ , telle qu'elle pût être, les valeurs de  $BE(n)$  & de  $AE(e)$  changeroient à la vérité; mais les rapports  $\frac{n}{m}$ ,  $\frac{e}{m}$ , demeureroient toujours les mêmes; parce que dans le triangle  $ABE$  l'angle  $ABE$  est donné, comme aussi la raison

du côté  $AB$  au côté  $BE$ , savoir dans cet Exemple  $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$ . Or comme il n'y a que ces raisons de  $\frac{n}{m}$ ,  $\frac{r}{s}$ , qui se puissent trouver dans les valeurs de  $p$ ,  $r$ ,  $s$ ; il s'en suit que ces valeurs demeurent toujours les mêmes, telle grandeur positive que l'on puisse prendre pour la ligne  $AB$  ( $m$ ); de sorte qu'on n'a pris  $m = a$  que pour rendre la construction plus simple. Ce que l'on doit toujours observer dans la suite.

### EXEMPLE III.

§18. ON demande le lieu de l'équation donnée  $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$ .

\* Art. 308. Comme c'est ici le carré  $xx$  qui est délivré de fractions, je choisis la seconde formule\* du Lemme; & j'ai par la comparaison des termes correspondans,

1°.  $\frac{2b}{a} = \frac{2c}{a}$ ; d'où en faisant  $m = a$ , je tire  $n = -b$ .

2°.  $\frac{bb}{aa} = \frac{bb}{aa}$ ; & partant, puisque  $m = a$ , on trouve comme ci-dessus  $n = -b$ . 3°.  $r = c$ . 4°.  $\frac{2bc}{a} = b - \frac{2bc}{a}$ ; ce

qui donne  $p = -\frac{ab}{a}$ , en mettant à la place de  $m$ ,  $n$ ,  $r$ , leurs valeurs  $a$ ,  $-b$ ,  $c$ . 5°.  $rs + ps = 0$ ; parce que dans l'équation donnée il ne se trouve point de termes entièrement connus, que l'on puisse comparer au terme  $rr + ps$  de la formule; ce qui donne  $s = -\frac{r}{p} = \frac{ac}{ab}$ .

en mettant pour  $r$  &  $p$  leurs valeurs  $c$  &  $-\frac{ab}{a}$ . Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu requis en me servant de la construction de la seconde formule\* du Lemme; & observant exactement les articles 311. & 312. de la manière qui suit.

\* Art. 308.  
n. 2.

FIG. 169.

Ayant mené par le point fixe  $A$ , une ligne indéfinie  $AQ$  parallèle à  $PM$ , je prends sur cette ligne la partie  $AB$  ( $m$ )  $= a$ ; & du point  $B$  je tire  $BE = b = -n$  parallèle à  $AP$ , & du côté opposé à  $PM$ , parce que la

valeur de  $\pi$  est négative; & par les points déterminés  $A, E$ , la ligne  $AE (e)$  qui est donnée. Ayant pris sur  $AP$  la partie  $AD (r) = 0$  du côté de  $PM$ , je tire la droite indéfinie  $DG$  parallèle à  $AE$ , sur laquelle je prends la partie  $DC (s) = \frac{ac}{ab}$  du côté de  $PM$ . Je décris ensuite \* du diamètre  $CG$  (qui ait pour ordonnées \* *Art. 16.* des droites parallèles à  $AP$ , & pour paramètre la ligne  $CH = \frac{ab}{c} = -p$ ) une Parabole qui s'étende \* du \* *Art. 312.* côté opposé à celui où s'étend  $AQ$ , parce que  $p = -\frac{ab}{c}$  qui est une valeur négative. Je dis que la portion  $OMR$  de cette Parabole, renfermée dans l'angle  $PAB$ , sera le lieu qu'on cherche.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ , la ligne  $MQ$  parallèle à  $AP$ , & qui rencontre les parallèles  $AE, DG$ , aux points  $F, G$ ; les triangles semblables  $ABE, AQF$ , donneront ces deux proportions,  $AB(a). AE(e) :: AQ \text{ ou } PM(y). AF \text{ ou } DG = \frac{e}{a}$ . Et  $AB(a). BE(b) :: AQ(y). QF = \frac{by}{a}$ . Et par conséquent  $GM(QM + FQ - FG) = x + \frac{by}{a} - c$ , ou  $GM(FG - FQ - QM) = c - \frac{by}{a} - x$ , selon que le point  $M$  tombe de part ou d'autre du diamètre  $CD$ ; & la coupée  $CG$  ou  $CD - DG = \frac{ac}{ab} - \frac{e}{a}$ . Or \* par la propriété \* *Art. 19.* de la Parabole,  $GM^2 = CG \times CH$ : c'est à dire, en mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques,  $xx - \frac{2b}{a}yx + \frac{b^2}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = a$ , qui est l'équation donnée. Donc &c.

## REMARQUE.

§ 19. S'il arrivoit qu'en comparant les termes de l'équation donnée avec ceux de la formule, on trouvât que  $p = 0$ ; il est visible que la construction de la Parabole qui en devroit être le lieu, seroit impossible. Mais il faut bien remarquer que l'équation donnée se

peut toujours alors abaisser en sorte que son lieu devient  
 \* Art. 308. une ligne droite; ce qui se voit par les formules \* du  
 Lemme. Car effaçant, par exemple, dans la première  
 les termes où  $p$  se rencontre, il vient  $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx$   
 $- 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0$ , de laquelle extrayant la ra-  
 cine quarrée, on trouve  $y - \frac{nx}{m} - r = 0$ , ou  $y = \frac{nx}{m} + r$ ,  
 dont le lieu est une ligne droite que l'on construira  
 selon l'article 306. La même chose arrivera de la secon-  
 de formule de l'art. 308.

## E X E M P L E I V.

320. Soit proposée l'équation  $xx - ay = 0$ , de  
 laquelle il faut trouver le lieu.

\* Art. 308. Comme c'est ici le quarré  $xx$  qui se trouve délivré de  
 n. 2. fractions, je choisis la seconde formule \* du Lemme; &  
 j'ai par la comparaison des termes qui se répondent,

\* Art. 311. 1°.  $\frac{2n}{m} = 0$ , parce que  $xy$  ne se trouve point dans la  
 proposée; d'où je tire  $n = 0$ , & par conséquent \*  $m = e$ .

2°.  $\frac{nn}{mm} = 0$ , parce que le quarré  $yy$  ne s'y trouve pas non  
 plus; d'où je tire encore  $n = 0$ . 3°.  $r = 0$ , parce que l'incon-  
 nue  $x$  ne se trouve point au premier degré dans la pro-  
 posée: c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les  
 termes où  $\frac{n}{m}$  &  $r$  se rencontrent, & mettant pour  $e$  sa  
 valeur  $m$ ; il vient  $xx - py + ps = 0$ , dont il reste à  
 comparer les termes avec ceux qui leur répondent  
 dans la proposée. 4°. La comparaison des termes  $-py$   
 &  $-ay$  donnent  $p = a$ . 5°. Puisque dans la proposée il  
 ne se trouve aucun terme entierement connu que l'on  
 puisse comparer au terme  $ps$ ; il s'ensuit que  $ps = 0$ , &  
 qu'ainsi  $s = 0$ . Or ces valeurs de  $n$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $s$ , ainsi déter-  
 minées me servent à construire le lieu qu'on deman-  
 de, ayant égard à la construction de la seconde for-  
 mule de l'art. 308, & à l'article 311. en cette sorte.

\* Art. 311.

FIG. 170.

Puisque  $BE(n) = 0$ , la ligne  $AE$  tombe \* sur  $AQ$   
 menée parallèlement à  $PM$  & du même côté; comme  
 aussi



aussi  $DG$ , parce que  $AD(r)=0$ . Or puisque  $CD(s)=0$ , le point  $C$  tombe sur le point  $D$  lequel tombe en  $A$  comme l'on vient de voir. Je décris donc \* une *Art. 161.*  
 Parabole du diamètre  $AQ$ , qui ait pour parametre  $AH(p)=a$ , & pour ordonnées des droites  $MQ$  parallèles à  $AP$ : je dis que la portion indéfinie  $AM$  renfermée dans l'angle  $PAQ$ , est le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  les droites  $MP$ ,  $MQ$ , parallèles à  $AQ$  & à  $AP$ , on aura par la propriété \* de la Parabole,  $QM^2(x,x)$  \* *Art. 19.*  
 $=AQ \cdot AH(ay)$ ; & partant  $xx - ay = 0$ , qui étoit l'équation proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### DÉMONSTRATION DU PROBLÈME.

321. Si l'on met dans la formule générale \* à la place \* *Art. 308.*  
 de  $m, n, r, s, p$ , les valeurs que l'on aura trouvées par la comparaison de ses termes avec ceux de l'équation proposée, telle qu'elle puisse être, pourvu qu'elle ait les conditions marquées dans le Problème; il est clair que cette formule générale se changera en la proposée: & partant que si l'on prend aussi ces valeurs dans la construction \* du Lemme \* *Art. 308.*  
 le lieu de la formule générale se changera en celui de l'équation proposée. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Problème accompagné de ses deux Remarques, comme les Exemples précédens le font assez voir. Donc &c.

### LEMME FONDAMENTAL.

*Pour la construction des lieux à l'Ellipse ou au Cercle.*

322. SOIENT encore comme dans la définition première deux lignes droites inconnues & indéterminées  $AP(x)$ ,  $PM(y)$ ; & soient de plus des lignes droites données  $m, n, p, r, s, t$ . Cela posé, Fig. 171.

On prendra sur la ligne  $AP$ , la partie  $AB = m$  & ayant mené les droites  $BE = n$ ,  $AD = r$ , parallèles à  $PM$ , & du même côté, on tirera par le point  $A$  la droite  $AE$  qui est donnée, & que j'appelle  $e$ ; & par le point  $D$ , la droite indéfinie  $DG$  parallèle à  $AE$ , sur laquelle on prendra la partie  $DC = s$  du côté de  $PM$ ; & de part & d'autre du point  $C$ , les parties  $CK$ ,  $CL$ , \* Art. 161. égales chacune à 1. On décrira ensuite une Ellipse\* du diamètre  $LK$  (21), qui ait pour paramètre  $KH = p$ , & pour ordonnées des droites parallèles à  $PM$ . Je dis que la portion  $OMR$  renfermée dans l'angle  $PAD$  fait par la ligne  $AP$  & par une ligne  $AD$  menée par le point fixe  $A$  parallèlement à  $PM$  & du même côté, sera le lieu de l'équation ou formule générale que voici.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x - rr = 0,$$

$$- \frac{ep}{2mm} \quad - \frac{2ep}{2ms} \quad - \frac{pr}{2s}$$

$$+ \frac{ps}{2s}$$

Cas ayant mené d'un des points quelconques  $M$ , de cette portion d'Ellipse, la ligne  $MP$  qui fasse avec  $AP$  l'angle donné ou pris à volonté  $APM$ , & qui rencontre les parallèles  $AE$ ,  $DG$ , aux points  $F$ ,  $G$ ; les triangles semblables  $ABE$ ,  $APF$ , donneront  $AF$  ou  $DG = \frac{nx}{m}$ , &  $PF = \frac{nx}{m}$ . On

aura donc  $GM = y - \frac{nx}{m} - r$ , &  $CG = \frac{nx}{m} - s$ . Or par \* Art. 55. & 41. la propriété de l'Ellipse\*  $KL$  (21).  $KH(p) :: LG \times GK$  ou :

$$\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2 \left( ss - ss + \frac{2srx}{m} - \frac{nnxx}{mm} \right) : \overline{GM}^2 \left( yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - rr \right) = \frac{ps - pr}{2s} + \frac{2epx}{2ms} - \frac{epxx}{2mm}$$

Donc &c.

S'il arrive que le diamètre  $KL$  (21) & son paramètre  $KH(p)$  soient égaux entr'eux, on aura toujours  $\overline{GM}^2 = LG \times GK$ ; d'où il est évident selon les Elements de Geometrie, que si l'angle  $CGM$  est droit, l'Ellipse se changera alors en un cercle qui aura pour diamètre la ligne  $KL$ .

## COROLLAIRE.

323. IL est clair que les deux quarrés  $yy$  &  $xx$  se trouvent toujours avec les mêmes signes dans cette formule ; & que lorsque le plan  $xy$  s'y rencontre, le quarré  $\frac{mm}{mm}$  de la moitié de la fraction  $\frac{2m}{m}$  qui multiplie ce plan, doit être moindre que la fraction  $\frac{mm}{mm} + \frac{m}{2mm}$  qui multiplie le quarré  $xx$ .

## PROPOSITION III.

## Problème.

324. CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée ; dans laquelle les deux quarrés  $yy$  &  $xx$  se rencontrent avec les mêmes signes sans le plan  $xy$ , ou avec ce plan, en sorte que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit moindre que la fraction qui multiplie le quarré  $xx$ . On suppose toujours ici que le quarré  $yy$  soit délivré de fractions.

On comparera les termes de l'équation donnée, avec ceux qui leur répondent dans la formule générale \* du \* Art. 322. Lemme précédent ; & on tirera de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités  $m, n, p, r, s, t$ , par le moyen desquelles valeurs on décrira comme l'on a enseigné dans ce Lemme (en observant exactement l'Art. 311.) une Ellipse qui sera le lieu cherché.

## EXEMPLE I.

325. Soit proposé de trouver le lieu de cette équation  $yy - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}xx - 2ay - bx + cc = 0$ , dans laquelle le quarré de  $\frac{1}{2}$  moitié de la fraction  $\frac{1}{2}$  ou 1 qui multiplie  $xy$ , est moindre que la fraction  $\frac{1}{2}$  qui multiplie  $xx$ .

La comparaison de chaque terme de la formule générale

Ff ij

\* Art. 322. du Lemme\* avec celui qui lui répond dans cette équation, donne 1°.  $\frac{2n}{m} = -1$ , car n'y ayant ici aucune fraction litterale qui multiplie le plan  $xy$ , on le doit considerer comme étant multiplié par l'unité numerique 1: & partant si l'on fait  $m=a$ , l'on aura  $n=-\frac{1}{2}a$ . 2°.  $\frac{nr}{mm} + \frac{ep}{2mmr} = \frac{1}{2}$ ; d'où l'on tire  $\frac{p}{s} = \frac{mm-2nr}{2s} = \frac{aa}{2ss}$  en mettant pour  $m, n$ , leurs valeurs  $a, -\frac{1}{2}a$ : & par conséquent  $p = \frac{as}{2ss}$ . 3°.  $r=a$ . 4°.  $\frac{2nr}{ss} - \frac{2ep}{2ms} = b$ ; d'où en mettant pour  $m, n, r, \frac{p}{s}$ , leurs valeurs  $a, -\frac{1}{2}a, a, \frac{as}{2ss}$ , il vient  $s = \frac{-2as-2eb}{a}$ . 5°.  $rr - \frac{p^2}{2s} + \frac{p^2}{2s} = cc$ : & partant  $tt = ss + \frac{2rr}{p} - \frac{2ec}{p} = ss + 4ec - \frac{4ccs}{as}$ , en mettant pour  $\frac{p}{s}, r$ , les valeurs  $\frac{as}{2ss}, a$ , qu'on leur vient de trouver. Or les valeurs de  $m, n, r, s, t, p$ , étant ainsi déterminées, je décris l'Ellipse cherchée en me servant de la construction du

\* Art. 322. Lemme\* & de l'article 311. en cette sorte.

Fig. 172. Je prens sur la ligne  $AP$  la partie  $AB(m)a$ ; & ayant mené parallelement à  $PM$  & du même côté la ligne  $AD(r)=a$ , & du côté opposé la droite  $BE=\frac{1}{2}a = -n$ , parce  $n=-\frac{1}{2}a$  qui est une valeur négative, je tire par le point  $A$  la droite  $AE(e)$  qui est donnée; & par le point  $D$ , la droite  $DG$  parallele à  $AE$ , sur laquelle je prends la partie  $DC = \frac{2as+2br}{a} = -s$  du côté opposé à  $PM$ ; & de part & d'autre du point  $C$ , les parties  $CK, CL$ , égales chacune à

\* Art. 161.  $t = Vss + 4ec - \frac{4ccs}{as}$ . Je décris ensuite\* une Ellipse du diametre  $ZK$ , qui ait pour ordonnées des droites paralleles à  $PM$ , & pour parametre la ligne  $KH(p) = \frac{as}{2ss}$ . Je dis que la portion  $OMR$  renfermée dans l'angle  $PAD$ , est le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ ,

la ligne  $MP$  qui fasse avec  $AP$  l'angle donné ou pris à volonté  $APM$ , & qui rencontre les parallèles  $AE$ ,  $DG$ , aux points  $F$ ,  $G$ ; les triangles semblables  $ABE$ ,  $APF$  donneront  $AB(a)$ .  $AE(e) :: AP(x)$ .  $AF$  ou  $DG = \frac{ex}{a}$ . Et  $AB(a)$ .  $BE(\frac{1}{2}a) :: AP(x)$ .  $PF = \frac{1}{2}x$ . On aura donc  $GM = y + \frac{1}{2}x - a$ ; &  $CG$  ou  $DG - DC = \frac{ex}{a} - s$ , puisque  $DC = -s$ . Or par la propriété \* de \* Art. 55. & l'Ellipse  $KL(2t)$ .  $KH(\frac{ant}{2st}) :: LG \times GK$  ou  $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2$  4<sup>1</sup>.  
 $(tt - ss + \frac{2stx}{a} - \frac{exx}{aa}) \cdot \overline{GM}^2 (yy + xy - 2ay + \frac{1}{4}xx - ax + aa)$ . D'où en mettant à la place de  $tt - ss$  & de  $s$ , leurs valeurs  $4ee - \frac{4ccc}{aa}$  &  $-\frac{2ae - 2be}{a}$ , multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant de part & d'autre par  $2t$ , l'on retrouve l'équation même proposée. Donc &c.

## REMARQUE.

326. S'IL arrive que  $ss + 4ee$  soit égale ou moindre que  $\frac{4ccc}{aa}$ , il est évident que la valeur de  $t$  deviendra nulle ou imaginaire; & qu'ainsi il sera pour lors impossible de construire l'Ellipse qui devoit être le lieu de l'équation donnée. Et comme cette équation renfermeroit nécessairement des contradictions, il s'ensuit qu'il ne pourroit y avoir aucune ligne qui en pût être le lieu; c'est à dire que toutes les valeurs de l'inconnue  $y$  qui devroient répondre à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue  $x$ , seroient toutes imaginaires.

Ceci se voit clairement dans la formule générale \* du \* Art. 322. Lemme qui, en transposant quelques termes, devient  $yy - \frac{2s}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr = \frac{p^2 - p^2}{2s} - \frac{19612}{2mm} - \frac{66pxx}{2mm}$ , dans laquelle équation le premier membre est le quarré de  $y - \frac{s}{m}x - r$ ; & le second, le quarré de  $t$ .

moins le quarré de  $s - \frac{cx}{m}$ , multiplié par la fraction  $\frac{t}{2}$ . Or il est visible que si la valeur du quarré  $ss$  est nulle ou négative, la valeur de ce second membre sera négative; & qu'ainsi l'on aura dans ces deux cas un quarré, savoir le premier membre, égal à une valeur négative; ce qui est une contradiction manifeste.

## EXEMPLE II.

327. ON demande le lieu de l'équation  $yy + \frac{b}{a}xy - +xx + cy + fx - ag = 0$ , dans laquelle on suppose suivant l'art. 323. que  $\frac{bb}{4aa}$  est moindre que la fraction  $\frac{1}{4}$  ou 1 qui multiplie le quarré  $xx$ ; c'est à dire que  $b$  est moindre que  $2a$ .  
 \* Art. 322. La comparaison des termes de la formule \* générale avec ceux qui leur répondent dans l'équation proposée, donne  
 1°.  $\frac{2n}{m} = -\frac{b}{a}$ ; d'où en faisant  $m = a$ , on tire  $n = -\frac{1}{2}b$ .  
 2°.  $\frac{nn}{mm} + \frac{cp}{2mm} = 1$ ; d'où en mettant pour  $m, n$ , leurs valeurs  $a, -\frac{1}{2}b$ , l'on tire  $\frac{t}{2} = \frac{4aa - bb}{4aa}$ : & partant  $p = \frac{4aa - bb}{2aa}$ . 3°.  $r = -\frac{1}{2}c$ . 4°.  $s = \frac{bce - 2af}{4aa - bb}$ .  
 5°.  $t = \sqrt{ss + \frac{cpe + 4ag}{4aa - bb}}$ . Ce qui fournit cette construction.

Fig. 173,

Ayant pris sur la ligne droite indéfinie  $AP$  la partie  $AB(m) = a$ , & mené parallèlement à  $PM$  & du côté opposé les droites  $BE = \frac{1}{2}b = -n$ ,  $AD = \frac{1}{2}c = -r$ , on tirera par le point  $A$  la droite  $AE(e)$  qui est donnée, & par le point  $D$  la droite  $DG$  parallèle à  $AE$ , sur laquelle on prendra la partie  $DC(s) = \frac{bce - 2af}{4aa - bb}$  du côté de  $PM$ , si  $bce$  surpasse  $2af$ , comme on le suppose ici; & du côté opposé, s'il est moindre; ensuite on prendra de part & d'autre du point  $C$ , les parties  $CK$  &  $CL$  égales cha-

\* Art. 161. cune à  $t = \sqrt{ss + \frac{cpe + 4ag}{4aa - bb}}$ . Cela fait, on décrira \* une

# DES LIEUX GEOMETRIQUES. 231

Ellipse du diametre  $LK(zt)$  qui ait pour ordonnées des droites paralleles à  $PM$ , & pour parametre une ligne  $KH(p) = \frac{4aat-bb^2}{2aa}$ . Je dis que la portion  $OR$  fera le lieu de l'équation proposée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ , la droite  $MP$  qui fasse avec  $AP$  l'angle donné ou pris à volonté  $APM$ , & qui rencontre les paralleles  $AE$ ,  $LK$ , aux points  $F$ ,  $G$ ; on aura  $PF = \frac{bx}{2a}$ , &  $AF$  ou  $DG = \frac{ex}{a}$ ; ce qui donnera  $MG$  ou  $MP - PP + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$ , &  $CG = \frac{ex}{a} - s$ , ou  $s = \frac{ex}{a}$ . Or par la propriété \* de l'Ellip. \* Art. 32. de  $LK(zt)$ .  $KH(\frac{4aat-bb^2}{2aa}) :: LG \times GK(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eex}{aa})$ .  $GM(y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c)$ .  $CG(\frac{ex}{a} - s)$ . multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant par  $zt$  donne l'équation même proposée.

Il est à propos de remarquer que si l'angle  $AEB$  étoit droit, l'angle  $CGM$  le seroit aussi; & le diametre  $LK(zt)$  seroit égal au parametre  $KH(\frac{4aat-bb^2}{2aa})$ , puisque  $ee = aa - \frac{1}{2}bb$  à cause du triangle rectangle  $AEB$ . D'où l'on voit que l'Ellipse deviendrait alors un cercle qui auroit pour rayon la droite  $CK$  ou  $CL(s) = \sqrt{ss + \frac{1}{2}cc + ag}$ , & que  $DC(s) = \frac{bb-2af}{4}$ ; ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

## EXEMPLE III.

328. Soit proposé de trouver le lieu de l'équation  $xy + xn - ax = o$ .

Je compare les termes de la formule générale, avec ceux \* Art. 32. qui leur répondent dans l'équation donnée; & j'ai  $r. \frac{2a}{b} = o$ , parce que le terme  $xy$  manquant, on le doit

considerer comme étant multiplié par zero; d'où je tire  $n=0$ : & partant  $m=e$ . 2°.  $\frac{nn}{mm} + \frac{op}{2mm} = 1$ ; c'est à dire,  $\frac{p}{2t} = 1$  en mettant pour  $n$  &  $m$  leurs valeurs 0 &  $e$ : & partant  $p=2t$ . 3°.  $r=0$ ; parce que l'inconnue  $y$  ne se trouvant point au premier degré dans l'équation donnée, on la doit aussi considerer comme étant multipliée par zero: c'est pourquoi effaçant dans la formule générale \* tous les termes où  $\frac{n}{m}$  &  $r$  se rencontrent, & mettant pour  $e$  &  $\frac{p}{2t}$  leurs valeurs  $m$  & 1, elle se changera en celle-ci  $yy+xx-2sx-tt+ss=0$ , dont il reste à comparer les termes avec ceux de la proposée. 4°.  $2s=a$ ; & partant  $s=\frac{1}{2}a$ . 5°.  $ss-tt=0$ ; puisqu'il n'y a point de termes entierement connus dans l'équation donnée: & partant  $tt=ss=\frac{1}{4}aa$ ; & en extrayant de part & d'autre la racine quarrée,  $t=\frac{1}{2}a$ . Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu en cette sorte.

FIG. 174. Puisque  $BE(n)=0$ , il s'ensuit que  $AE$  tombe sur  $AP$ , laquelle tombe aussi sur  $DG$ , puisqu'on a encore  $AD(r)=0$ ; de sorte que le point  $D$  tombe en  $A$ . C'est pourquoi prenant sur  $AP$ , la partie  $AC(s)=\frac{1}{2}a$  du côté de  $PM$ ; & de part & d'autre du point  $C$ , les parties  $CK$ ,  $CL$ , égales chacune à  $t=\frac{1}{2}a$  (le point  $L$  tombe ici sur le point  $A$ ); on décrira \* du diametre  $AK$  qui ait pour ordonnées des droites parallèles à  $PM$ , & pour parametre la ligne  $KH(p)=2t=a$ , une Ellipse qui sera le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  la droite  $MP$  qui fasse avec  $AP$  l'angle donné ou pris à volonté  $APM$ , on aura \*  $AK(a)KH(a):AP \times PK$  (41.  $(ax-xx).PM(yy)$ ). Ce qui donne  $yy+xx-ax=0$ . Il est évident que si l'angle  $APM$  est droit, l'Ellipse devient alors un cercle qui a pour diametre la ligne  $AK=a$ .

REMARQUE.



## REMARQUE.

329. IL peut arriver deux differens cas, où le lieu de l'équation donnée est un cercle.

*Premier cas.* Lorsque les quarrés  $yy$  &  $xx$  se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan  $xy$  se trouve aussi; & que de plus l'angle  $AEB$  est droit (ce qui arrive lorsqu'ayant mené  $AF$  perpendiculaire sur  $PM$  la raison de  $PF$  à  $AP$ , qui est la même que celle de  $BE$  à  $AB$  est exprimée par la moitié de la fraction qui multiplie le plan  $xy$ ): le lieu de cette équation sera toujours un cercle comme l'on a déjà vu dans l'article 324, & la raison en est évidente par la formule générale. Car l'on aura par la comparaison des termes correspondans où se trouve le quarré  $xx$ , cette égalité  $\frac{nn}{mm} + \frac{cc}{2pm} = 1$ ; d'où l'on tire  $\frac{p}{m} = \frac{mm-nn}{2c} = 1$ , puisque à cause du triangle rectangle  $AEB$  le quarré  $mm = nn + cc$ . Or l'angle  $AEB$  étant droit, l'angle  $CGM$  que fait le diamètre  $LK$  avec ses ordonnées sera aussi droit; & par conséquent puisque le diamètre  $LK$  est égal à son parametre  $KH$ , il s'ensuit que l'Ellipse devient alors un cercle.

*Second cas.* Lorsque les quarrés  $yy$  &  $xx$  se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan  $xy$  ne se rencontre pas, & que de plus l'angle  $APM$  est droit: son lieu sera toujours un cercle, comme l'on vient de voir dans l'article 328; & cela se prouve par le moyen de la formule générale. Car puisque le plan  $xy$  ne se trouve point dans l'équation donnée, la fraction  $\frac{xy}{m}$  de la formule sera nulle ou zero; & partant  $BE(n) = 0$ , &  $m = c$ , d'où l'on voit. 1°. Que le diamètre  $LK$  est parallèle à la ligne  $AP$ , & qu'ainsi l'angle  $CGM$  qu'il fait avec ses ordonnées étant égal à l'angle  $APM$  sera

Gg

droit. 2°. Que la fraction  $\frac{nn}{mm} + \frac{op}{2mm}$  qui multiplie le quatre  $xx$  dans la formule devient  $\frac{p}{2t}$ , & qu'ainsi on aura  $\frac{p}{2t} = 1$ : c'est à dire que le diamètre  $LK$  sera égal à son parametre  $KH$ . L'Ellipse qui est le lieu de l'équation donnée sera donc alors un cercle. Or comme alors la formule générale se change en celle-ci

$$yy - xx - 2ty - 2sx - tr = 0,$$

$$- 2t$$

$$+ 2s$$

on pourra, si l'on veut abréger le calcul, en se servant d'abord de cette formule, pour trouver par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée, les valeurs de  $t$ ,  $s$ ,  $r$ , qui servent à décrire le cercle qui en est le lieu.

### LEMME FONDAMENTAL.

*Pour la construction des lieux à l'Hyperbole par rapport à ses diametres.*

\* Art. 162

FIG. 175.  
176.

330. LES mêmes choses étant posées que dans le Lemme précédent pour l'Ellipse, on décrira\* du diamètre  $LK$  ( $2t$ ) qui ait pour parametre  $KH$  ( $p$ ), & pour ordonnées des droites parallèles à  $PM$ , une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées. Je dis que sa portion  $OM$ , ou leurs portions renfermées dans l'angle  $PAD$  fait par la ligne  $AP$  & par une ligne  $AD$  menée par le point fixe  $A$  parallèlement à  $PM$  & du même côté, sera le lieu de cette équation ou formule.

$$yy - \frac{2n}{m} xy + \frac{nn}{mm} xx - 2ty - \frac{2op}{2mm} x + tr = 0.$$

$$- \frac{op}{2mm}$$

$$+ \frac{2ps}{2mm} x + \frac{ps}{2t}$$

$$- \frac{ps}{2t}$$

dans laquelle on doit observer qu'il y a  $+$   $\frac{ps}{2t}$  lorsque

le diametre  $ZK$  est un premier diametre, &  $-\frac{p^2}{2s}$  lorsque c'est un second.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  la ligne  $MP$ , qui fasse avec  $AP$  l'angle donné ou pris à volonté  $APM$ , & qui rencontre les parallèles  $AE$ ,  $DG$ , aux points  $F, G$ , on aura par la propriété de l'Hyperbole \*  $KL (2t) \cdot KH (p) :: \overline{CG} \pm \overline{CK} \left( \frac{xx}{mm} - \frac{2sxx}{m} \right)$  \* Art. 81. & 118.  
 $+ss \pm st$  ).  $\overline{GM}^2 = \frac{pssx}{2mm} - \frac{2spxx}{2ms} + \frac{ps}{2s} + \frac{p^2}{2s} = yy - \frac{2s}{m} xy$   
 $- 2xy + \frac{ss}{mm} xx + \frac{2sp}{m} x + rr$ . Donc &c.

S'il arrive que le diametre  $KL (2t)$  & son parametre  $KH (p)$  soient égaux entr'eux; l'Hyperbole fera équilaterre.

## COROLLAIRE.

331. IL est clair, 1<sup>o</sup>. Que les deux quarrés  $yy$  &  $xx$  se trouvent toujours avec differens signes dans cette formule, lorsque le plan  $xy$  ne s'y rencontre point; ou bien lorsqu'il s'y trouve, & que  $\frac{sp}{2mm}$  surpasse  $\frac{ss}{mm}$ .  
 2<sup>o</sup>. Qu'ils s'y peuvent trouver avec les mêmes signes, mais avec ces conditions que le plan  $xy$  s'y rencontre, & que le quarré  $\frac{ss}{mm}$  de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit plus grand que la fraction  $\frac{ss}{mm} - \frac{sp}{2mm}$  qui multiplie le quarré  $xx$ .

## PROPOSITION IV.

## Problème.

332. CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée, dans laquelle, ou les deux quarrés  $yy$  &  $xx$  se rencontrent avec differens signes, ou bien avec les mêmes signes, mais avec ces deux conditions que le plan  $xy$  s'y trouve, & que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie soit plus grand  
 Gg ij

que la fraction qui multiplie le quarré  $xx$ . On suppose encore ici que le quarré  $yy$  soit dépourvu de fractions.

On construit l'Hyperbole qui en est le lieu, comme l'on vient de faire l'Éllipse dans le Problème précédent. Les Exemples qui suivent le feront voir.

### EXEMPLE I.

333. SOIT  $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - bb = 0$ , l'équation dont il faut construire le lieu, & dans laquelle on suppose que le quarré  $\frac{bb}{aa}$  surpasse  $\frac{f}{a}$ .

Je compare les termes de cette équation avec ceux qui leur répondent dans la formule du Lemme; & j'ai  
 1°.  $\frac{2b}{m} = -\frac{2b}{a}$ , & partant si l'on fait  $m = a$ , on aura  
 $n = -b$ . 2°.  $\frac{2cy}{2mm} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$ , donc  $\frac{p}{2s} = \frac{bb - af}{a^2}$ , &  
 $p = \frac{2bb - 2af}{a}$ . 3°.  $r = -c$ . 4°.  $\frac{2gx}{m} + \frac{2cp}{2ms} = -2g$ , d'où  
 en mettant pour  $m, n, r, \frac{p}{2s}$  les valeurs que l'on vient de trouver, on tire  $s = \frac{-bco - agx}{bb - af}$ , 5°.  $+st = ss - \frac{2crr - 2bbx}{p}$   
 $= ss - \frac{ccco - cbbx}{bb - af}$ , sçavoir  $+st$  lorsque le quarré  $ss$  surpasse  $\frac{ccco + cbbx}{bb - af}$ , &  $-st$  lorsqu'il est moindre, parce que le quarré  $st$  doit être positif; ce qui fait deux différens cas. Or les valeurs de  $m, n, r, s, t, p$ , étant ainsi déterminées, je construis le lieu en me réglant sur la construction du Lemme, de la manière qui suit.

Fig. 177.  
178.

Ayant pris sur  $AP$ , la partie  $AB = a$ , & mené parallèlement à  $PM$  & du côté opposé les droites  $BE = b = -n$ ,  $AD = c = -r$ , je tire par les points  $A, E$ , la droite  $AE (e)$  qui est donnée, & par le point  $D$  la droite indéfinie  $DG$  parallèle à  $AE$  sur laquelle je prends la partie  $DC = \frac{ccco + cbbx}{bb - af} = -s$  du côté opposé à  $PM$ , & de part & d'autre du point  $C$  les parties

$CZ$ ,  $CK$ , égales chacune à  $t = \sqrt{ss - \frac{cccc - eebb}{bb - af}}$  ou  $\sqrt{\frac{cccc + eebb}{bb - af}} - ss$ , selon que  $ss$  est plus grand ou moindre que  $\frac{cccc + eebb}{bb - af}$ . Cela fait, du diametre  $LK$  (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à  $PM$ , & pour parametre la ligne  $KH$  ( $p = \frac{2bbt - 2aft}{ss}$ )) je décris une Hyperbole, en observant que  $LK$  (*fig. 177.*) doit être un premier diametre dans le premier cas, & un second (*fig. 178.*) dans le dernier. Je dis que la portion  $OM$  sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  une parallele  $MP$  à  $AD$ , laquelle rencontre les lignes  $AB$ ,  $AE$ ,  $DG$ , aux points  $P$ ,  $F$ ,  $G$ ; on aura  $PF = \frac{bx}{a}$ , &  $AF$  ou  $DG = \frac{ex}{a}$ . Et par conséquent  $MG = y + \frac{bx}{a} + c$ ,  $CG$  ou  $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$ , puisque  $CD = -s$ . Or par la propriété de l'Hyperbole,  $LK$  (*2t*).  $KH$  ( $\frac{2bbt - 2aft}{ss}$ ) ::  $\overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2$  ( $\frac{exx}{aa} - \frac{2sxx}{a} + ss \pm tt$ ).  $\overline{GM}^2$  ( $yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc$ ); ce qui, en mettant pour  $ss \pm tt$  &  $s$  leurs valeurs  $\frac{cccc + eebb}{bb - af}$  &  $\frac{-bcc - afe}{bb - af}$ , multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par  $2t$ , donne l'équation proposée. Donc &c.

## REMARQUE.

334. S'IL arrive que  $ss = \frac{cccc + eebb}{bb - af}$ ; il est clair que la valeur de  $tt$  devient nulle ou zero, & qu'ainsi la construction de l'Hyperbole devient impossible. Mais il faut bien remarquer alors que l'équation proposée s'abaisse toujours, en sorte que son lieu, qui devoit être une ou deux Hyperboles opposées, devient une ou deux lignes droites. En effet dans notre exemple on a réduit l'équation donnée à cette proportion  $ee.bb - af ::$

G g iij

$\therefore \frac{ay}{ax} = \frac{ay}{a} + ss + tt. yy + \frac{2b}{a} xy + \frac{bb}{aa} xx + 2cy$   
 $+ \frac{2bc}{a} x + cc$  d'où, en effaçant  $tt$  qui est nul, multi-  
 pliant les extrêmes & les moyens, & extrayant de part  
 & d'autre la racine quarrée, l'on tire  $ey + \frac{bxx}{a} + cc$   
 $= \frac{ay}{a} - s \sqrt{bb - af}$ , c'est à dire en mettant pour  $-s$   
 sa valeur  $\frac{bx + ay}{bb - af}$ , & divisant de part & d'autre par  $e$ ,  
 cette équation  $y + \frac{bx}{a} + c = \frac{x \sqrt{bb - af}}{a} + \frac{ay + bc}{\sqrt{bb - af}}$  ou  $y$   
 $= \frac{-b + \sqrt{bb - af}}{a} x + \frac{ay + bc}{\sqrt{bb - af}} - c$ , qui en faisant  $\frac{a}{m} =$   
 $= \frac{b - \sqrt{bb - af}}{a}$ , &  $p = \frac{ay + bc}{\sqrt{bb - af}} - c$ , se change en cette autre  
 $y = p - \frac{a}{m} x$  dont le lieu est une ligne droite que l'on  
 construit selon l'article 306.

La raison de ceci est évidente par la formule gène-  
 rale du Lemme; car effaçant dans cette formule le  
 terme  $+\frac{t^2}{t}$  qui renferme le quarré  $tt$  que l'on suppo-  
 se égal à zero ou nul, elle se change en transposant  
 certains termes, & extrayant les racines quarrées, en  
 cette autre  $y - \frac{a}{m} x - r = \frac{ax}{m} - s \sqrt{\frac{p}{z}}$  ou  $s - \frac{ax}{m} \sqrt{\frac{p}{z}}$  où  
 les inconnues  $x$  &  $y$  ne sont plus qu'au premier degré,  
 & dont le lieu par conséquent devient des lignes droi-  
 tes.

### EXEMPLE II.

335. On demande le lieu de l'équation donnée  
 $yy - xx + 2ay + ax = a$ .

La comparaison des termes correspondans donne  
 1°.  $\frac{2a}{m} = 0$ , parce que le terme  $xy$  ne se trouve point  
 dans la proposée; d'où l'on tire  $n = 0$ , & par consé-  
 quent  $m = c$ . 2°.  $\frac{p}{z} = 1$ , & partant  $p = az$ . 3°.  $r = -a$ ,

4°.  $\frac{11r}{22} = a$ , d'où l'on tire  $r = \frac{1}{2}a$ . 5°.  $rr + \frac{11r}{22} - \frac{11r}{22} = 0$ ,

& ainsi  $+rr = ss - \frac{2rr}{p} = -\frac{1}{4}aa$  en mettant pour

$r, \frac{ss}{p}$ ,  $s$  leurs valeurs  $-a, 1, \frac{1}{2}a$ ; d'où je connois qu'il faut prendre dans le dernier terme de la formule  $-ss$  & non pas  $+ss$ , afin que la valeur de  $ss$  soit positive. Je construis ensuite le lieu en cette sorte.

Puisque  $AD(r) = -a$ , je mène par le point  $A$  FIG. 179. parallèlement à  $PM$  & du côté opposé la ligne  $AD = a$ ; & puisque  $BE(n) = 0$ , je tire par le point  $D$  la droite  $DG$  parallèle à  $AP$ , sur laquelle je prends la partie  $DC(s) = \frac{1}{2}a$  du côté de  $PM$ , & de part & d'autre du point  $C$  les parties  $CL, CK$ , égales chacune à  $s = \frac{1}{2}a$ . Ensuite du second diamètre  $LK$  (parce qu'on a pris  $-ss$  dans le dernier terme de la formule) qui ait pour ordonnées des droites parallèles à  $PM$ , & pour parametre la droite  $KH(p) = 2s = LK$ , je décris une Hyperbole. Je dis que la portion  $OM$  sera le lieu qu'on cherche.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  une parallèle  $MP$  à  $AD$ , qui rencontre les droites  $AP, DG$ , aux points  $P, G$ ; on aura  $MG = y + a$ ,  $CG$  ou  $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$ , & par la propriété de l'Hyperbole  $LK(2s)$ .  $KH(2s) :: CG + CK :: (xx - ax + \frac{1}{4}aa + ss) :: GM^2 (yy + 2ay + aa)$ ; ce qui donne, en mettant pour  $ss$  la valeur  $\frac{1}{4}aa$ , l'équation même proposée  $yy + 2ay - xx - ax = 0$ .

Il est évident que l'Hyperbole est équilatère.

#### REMARQUE.

336. LORSQUE les deux quarrés  $yy$  &  $xx$  se trouvent avec differens signes & sans fraction dans une équation, où le plan  $xy$  ne se rencontre point; son lieu sera toujours une Hyperbole équilatère. Car la fraction  $\frac{2s}{m}$  de la formule sera nulle ou zero; & partant

$BE(n)=0$ , &  $m=e$ . D'où il suit que la fraction  $\frac{ap}{mm}$  —  $\frac{ap}{mm}$  qui multiplie le carré  $xx$  dans la formule devient  $-\frac{p}{s}$ ; & qu'ainsi on aura  $-\frac{p}{s}=1$ , c'est à dire que le diamètre  $LK$  sera égal à son paramètre  $KH$ , ou, ce qui est la même chose, que l'Hyperbole sera équilatère. Or comme la formule générale se change alors en celle-ci

$$yy - xx - 2ry + 2sx + rr = 0,$$

$$\begin{array}{c} +ss \\ -ss \end{array}$$

il s'ensuit qu'on peut s'en servir d'abord pour trouver les valeurs de  $r, s, t$ , qui servent à construire l'Hyperbole équilatère qui est le lieu de l'équation donnée; ce qui abrége le calcul.

### LEMME FONDAMENTAL.

*Pour la construction des lieux à l'Hyperbole entre ses Asymptotes.*

337. SOIENT comme dans la définition première, deux lignes inconnues & indéterminées  $AP(x)$ ,  $PM(y)$  qui fassent entr'elles un angle donné ou pris à volonté  $APM$ ; & soient de plus des lignes droites données  $m, n, p, r, s$ . Cela posé.

FIG. 130. 1°. On prendra sur la ligne  $AP$ , la partie  $AB=m$ ; & ayant mené les droites  $BE=n$ ,  $AD=r$  parallèles à  $PM$ , & du même côté; on tirera par le point  $A$  la droite  $AE$  qui est donnée, & que j'appelle  $e$ , & par le point  $D$  la droite indéfinie  $DG$  parallèle à  $AE$ , sur laquelle ayant pris les parties  $DC=s$ ,  $CK=e$  du côté que s'étend  $AP$ , on menera parallèlement à  $PM$  & du même côté la droite indéfinie  $CL$ , & la ligne  $KH=p$ .

\* Art. 130,  
131.

On décrira ensuite \* entre les Asymptotes  $CL, CK$ ,  
une



une Hyperbole qui passe par le point *H*. Je dis qu'elle sera le lieu de cette équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} = 0.$$

$$-rx - mp$$

Car  $GM = y - \frac{nx}{m} - r$ ,  $CG = \frac{ex}{m} - s$ , & par la proprie. \* *Art.* 101.

de l'Hyperbole \*  $CG \times GM (\frac{exy}{m} - sy - \frac{mxx}{mm} + \frac{nsx}{m} - \frac{exx}{m} + rs) = CK \times KH (ep)$ ; ce qui donne, en délivrant le terme  $xy$  de fractions, & mettant par ordre tous les termes, la même équation  $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e}$  &c. que cy-dessus.

2°. On menera par le point fixe *A*, une ligne indéfinie *AQ* parallèle à *PM* & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie  $AB = m$ , on tirera  $BE = n$  parallèle à *AP* & du même côté, & par les points déterminés *A*, *E*, la ligne *AE* que j'appelle *e*; & ayant pris sur *AP* la partie  $AD = r$  du côté de *PM*, on tirera la droite indéfinie *DG* parallèle à *AE*, sur laquelle on prendra les parties  $DC = s$ ,  $CK = e$  du côté que s'étend *PM*, & on menera parallèlement à *AP* & du même côté, la droite indéfinie *CL* & la ligne  $KH = p$ . On décrira ensuite \* entre les asymptotes \* *Art.* 130. *CL*, *CK*, une Hyperbole qui passe par le point *H*. 131. Je dis qu'elle sera le lieu de cette seconde équation ou formule.

FIG. 181.

$$xy - \frac{n}{m}yy - \frac{ms}{e}x + \frac{ns}{e}y + \frac{mrs}{e} = 0.$$

$$-ry - mp$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M*, la ligne *MQ* parallèle à *AP*, & qui rencontre les parallèles *AE*, *DG*, aux points *F*, *G*; les triangles semblables *ABE*, *AQF*, donneront  $AB (m)$ .  $AE (e) :: AQ$  ou  $PM (y)$ .  $AF$  ou  $DG = \frac{ry}{m}$ , &  $AB (m)$ .  $BE (n) :: AQ (y)$ .  $QF = \frac{ny}{m}$ . Et par conséquent  $GM = x$

H h

$-\frac{r}{m}-r$ ,  $CG=\frac{r}{m}-s$ . Or par la propriété de l'Hyperbole  $CG \times GM = CK \times KH$ , ce qui donne, en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques, & délivrant le terme  $xy$  de fractions, la même seconde formule que ci-dessus. Donc &c.

## COROLLAIRE.

338. Il est clair 1°. Que le terme  $xy$  se rencontre toujours dans ces deux formules, puisque n'étant multiplié par aucune fraction, on ne peut point la supposer nulle pour le faire évanouir. 2°. Qu'il ne s'y peut rencontrer que l'un des quarrés  $xx$  ou  $yy$ , lequel s'évanouit si la fraction  $\frac{r}{m}$  qui le multiplie est nulle.

## PROPOSITION V.

## Problème.

339. TROUVER le lieu d'une équation donnée dans laquelle le plan  $xy$  se rencontre, sans aucun des quarrés  $xx$  &  $yy$ , ou seulement avec l'un des deux.

On délivrera le plan  $xy$  de fractions, & on comparera les termes de l'équation donnée avec ceux qui lui répondent dans la première formule lorsque le quarré  $xx$  s'y rencontre, & avec ceux de la seconde lorsque c'est le quarré  $yy$ , & enfin avec celle des deux qu'on voudra lorsque pas un des quarrés  $xx$  &  $yy$  ne s'y trouve. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités  $m, n, p, r, s$ , par le moyen desquelles on décrira une Hyperbole entre ses asymptotes comme l'on a enseigné dans le Lemme précédent, en observant toujours de mener ou de prendre du côté opposé à  $AP$  & à  $PM$  les lignes dont les valeurs sont négatives. Les exemples qui suivent éclairciront ces règles.

## EXEMPLE I.

340. On demande le lieu de  $xy - \frac{b}{a}xx - cy = 0$ .

Comme c'est le quarré  $xx$  qui se rencontre dans l'équation donnée, je choisis la première formule, & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée, 1°.  $\frac{n}{a} = \frac{b}{a}$ , d'où en faisant  $m = a$ , je tire

$n = b$ . 2°.  $\frac{ms}{a} = c$ , & partant  $s = \frac{ac}{b}$ . 3°.  $\frac{ms}{a} - r = 0$ ,

parce que l'inconnuë  $x$  ne se trouve point au premier degré dans l'équation donnée, & partant  $r = \frac{bc}{a}$ .

4°.  $\frac{mrs}{a} - mp = 0$ , parce qu'il ne se trouve point de termes entièrement connus, & partant  $p = \frac{rs}{a} = \frac{bc}{a}$ . Or

comme les valeurs de  $AP(m)$ ,  $BE(n)$ ,  $CD(s)$ ,  $AD(r)$ ,  $KH(p)$  sont toutes positives, je construis le lieu précisément comme dans le Lemme (fig. 180.) en observant de prendre pour les lignes les valeurs que l'on vient de trouver.

Car  $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$ ,  $CG$  ou  $DG - DC = \frac{ac - n}{a}$ , Fig. 180.  
& par la propriété de l'Hyperbole  $CG \times GM = CK \times KH$  c'est à dire, en mettant les valeurs analytiques, l'équation même donnée. Donc &c.

## EXEMPLE II.

341. Soit  $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = 0$ , l'équation dont il faut construire le lieu.

Comme c'est le quarré  $yy$  qui se trouve dans l'équation donnée, je choisis la seconde formule, & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée,

1°.  $\frac{n}{a} = -\frac{b}{a}$ , & si l'on fait  $m = a$ , on aura  $n = -b$ .

2°.  $\frac{ms}{a} = c$ , & partant  $s = 0$ . 3°.  $r = c$ . 4°.  $mp = ff$ , &

H h ij

partant  $p = \frac{f}{a}$ . Ce qui donne la construction suivante.

FIG. 182. Ayant mené par le point fixe  $A$ , une ligne indéfinie  $AQ$  parallèle à  $PM$  & du même côté, & ayant pris sur cette ligne, la partie  $AB (m) = a$ , je tire  $BE = b = -n$  parallèle à  $AP$  & du côté opposé, & par les points déterminés  $A, E$ , la ligne  $AE (e)$ . Je prends sur  $AP$  la partie  $AD (r) = c$  du côté de  $PM$ , & je tire la droite indéfinie  $DG$  parallèle à  $AE$ , & comme les points  $D, C$ , tombent l'un sur l'autre, parce que  $DC (s) = 0$ , je prends sur cette ligne la partie  $DK = e$  du côté que s'étend  $PM$ , & ayant mené parallèlement à  $AP$  & du même côté la ligne  $KH (p) = \frac{f}{a}$ , & la droite indéfinie  $DL$  qui tombe ici sur  $AP$ , je décris entre les Asymptotes  $DL, DK$ , une Hyperbole qui passe par le point  $H$ . Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ , la droite  $MQ$  parallèle à  $AP$  & qui rencontre les parallèles  $AE, DG$ , aux points  $F, G$ , on aura  $GM$  ou  $MQ + QF - FG = x + \frac{by}{a} - c$ ,  $DG$  ou  $AF = \frac{ay}{a}$ , & partant  $DG \times GM = \frac{xy}{a} + \frac{byy}{aa} - \frac{cy}{a} = DK \times KH (\frac{ff}{a})$ . Ce qui donne, en délivrant le terme  $xy$  de fractions, l'équation proposée  $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = 0$ .

#### REMARQUE.

342. Si l'on prend pour l'arbitraire  $AB (m)$  une autre valeur que  $a$ , celles de  $CK (e)$  & de  $KH (p)$  changeront, mais les valeurs du rectangle  $CK \times KH (ep)$ , & des droites  $AD (r)$ ,  $CD (s)$  demeureront toujours les mêmes; car elles ne renferment dans leurs expressions que les rapports  $\frac{n}{m}, \frac{n}{e}, \frac{m}{e}$ , qui ne chan-

gent point, puisque dans le triangle  $ABE$  l'angle  $ABE$  est donné, & la raison  $\frac{n}{m}$  (qui dans cet exemple est  $\frac{b}{a}$ ) du côté  $AB(m)$  au côté  $BE(n)$ . Or comme l'Hyperbole qui doit passer par le point  $H$ , sera toujours la même \*, telle grandeur que l'on puisse donner à  $CK^*$  *Art. 101.* ( $e$ ) & à  $KH(p)$ , pourvu que le rectangle  $CK \times KH$  demeure le même; il s'ensuit que l'on construira toujours la même Hyperbole, telle grandeur que l'on puisse prendre pour l'arbitraire  $AB(m)$ .

## EXEMPLE III.

343. Il faut construire le lieu de l'équation donnée  
 $xy - ay + bx + cc = 0$ .

Comme pas un des carrés  $xx$  &  $yy$  ne se trouve dans l'équation proposée, je puis prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux formules, par exemple, la première, de laquelle comparant les termes avec ceux de la proposée, j'ai 1°.  $\frac{n}{m} = 0$ , & partant  $n = 0$ , &  $m = a$ ; je fais 2°.  $\frac{r}{s} = 0$  ou  $s = a$ . 3°.  $r = -b$ , puisque  $\frac{r}{s} = 0$ . 4°.  $rs - mp = cc$ , & partant  $p = -b - \frac{cc}{a}$ . Or ces valeurs de  $m, n, r, s, p$ , étant ainsi *Fig. 184.* déterminées, je construis le lieu de la manière qui suit.

Puisque  $AD(r) = -b$ , je mène parallèlement à  $PM$  & du côté opposé la ligne  $AD = b$ ; & puisque  $BE(n) = 0$ , je tire la droite indéfinie  $DG$  parallèle à  $AP$  sur laquelle ayant pris les parties  $DC(s) = a$ ,  $CK(e) = m = a$  du côté que s'étend  $AP$ , je tire la droite indéfinie  $CL$ , & la ligne  $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$  parallèle à  $PM$  & du côté opposé. Je décris ensuite l'Hyperbole opposée à celle qui ayant pour Asymptotes les droites  $CL, CK$ , passe par le point  $H$ . Je dis

que la portion indéfinie  $OM$  renfermée dans l'angle  $PAS$ , fait par la droite indéfinie  $AP$  & par la ligne  $AS$  menée parallèlement à  $PM$  & du même côté, sera le lieu cherché.

Car  $GM$  ou  $PG - PM = y - b$  &  $CG$  ou  $CD - DG = a - x$ , & par conséquent  $CG \times GM = ay - xy - ab + bx = CK \times KH (ab + cc)$ ; ce qui, en effaçant de part & d'autre le rectangle  $ab$ , & transposant à l'ordinaire, donne  $xy - ay + bx + cc = 0$  qui est l'équation proposée.

Il auroit été inutile dans cet Exemple de décrire l'Hyperbole qui passe par le point  $H$ ; car aucun de ses points ne pourroit tomber dans l'angle  $PAS$ , où l'on suppose que doivent tomber les points  $M$ .

#### REMARQUE.

344. S'il arrivoit qu'en comparant les termes de la formule avec ceux de l'équation donnée, on trouvât que  $p = 0$ ; on voit qu'il seroit alors impossible de décrire l'Hyperbole qui en devroit être le lieu, puisqu'elle auroit une puissance qui est égale au rectangle  $pe$  seroit nulle. Mais alors l'équation se pourroit toujours abaisser, en sorte que son lieu deviendrait une ligne droite; car effaçant par exemple dans la première formule du Lemme le terme  $mp$ , elle devient  $xy - \frac{p}{2}xx - \frac{m}{2}y + \frac{m}{2}x - rx + \frac{mr}{2} = 0$ , qui étant divisée par

\* Art. 306.  $\frac{p}{2}$  —  $s$  donne  $y - \frac{mx}{p} - r = 0$ , dont le lieu\* est une ligne droite.

#### PROPOSITION V.

##### Problème.

345. CONSTRUIRE tout lieu du second degré, son équation étant donnée.

Tous les termes de l'équation étant mis d'un même côté, en sorte que l'un des membres soit zero, je distingue deux differens cas.

*Premier cas.* Lorsque le plan  $xy$  ne se trouve point dans l'équation donnée. 1°. S'il n'y a que l'un des quarrés  $yy$  ou  $xx$ , le lieu sera une \* Parabole. 2°. Si \* Art. 310. les deux quarrés  $yy$  &  $xx$  s'y trouvent avec les mêmes signes, le lieu sera une \* Ellipse ou un cercle. \* Art. 324. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec differens signes, le lieu sera une \* Hyperbole ou deux Hyper- \* Art. 332. boles opposées rapportées à ses diametres.

*Second cas.* Lorsque le plan  $xy$  se trouve dans l'équation donnée. 1°. Si pas un des quarrés  $yy$  &  $xx$  ne s'y rencontre ou seulement l'un des deux, le lieu sera \* une Hyperbole entre ses Asymptotes. 2°. Si les \* Art. 339. deux quarrés  $yy$  &  $xx$  s'y trouvent avec differens signes, le lieu sera \* une Hyperbole rapportée à ses dia- \* Art. 332. metres. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec les mêmes signes, on délivrera le quarré  $yy$  de fractions, & le lieu sera \* une Parabole lorsque le quar- \* Art. 310. ré de la moitié de la fraction qui multiplie  $xy$  est égal à la fraction qui multiplie le quarré  $xx$ ; une \* Ellipse \* Art. 324. ou un cercle lorsqu'il est moindre; & enfin une \* Hy- \* Art. 332. perbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres lorsqu'il est plus grand.

On décrira le lieu selon l'article 310. s'il est une Parabole; selon l'article 324. s'il est une Ellipse ou un cercle; selon l'article 332. s'il est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres; & enfin selon l'article 339. si c'est une Hyperbole entre ses Asymptotes. Tout ceci n'est qu'une suite de ces quatre articles.

#### C O N O L L A I R E.

346. U N E équation du second degré étant donnée, comme la Section Conique que l'on trouve par

- \* Art. 314. les règles prescrites est le lieu \* de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue  $y$ , qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue  $x$ ; il s'ensuit qu'il ne peut y avoir que cette seule Section qui soit le lieu de l'équation donnée.







## LIVRE HUITIEME.

*Proposition generale.*

347. **T**ROUVER le lieu d'une infinité de points qui FIG. 184.  
ayent tous certaines conditions marquées; lorsque ce lieu ne passe  
point le second degré.

1°. On supposera comme connues & déterminées deux lignes droites inconnues & indéterminées  $AP(x)$ ,  $PM(y)$ , qui fassent entr'elles un angle  $APM$  donné ou pris à discretion; & dont l'une  $AP$  ait une origine fixe & invariable en un point  $A$ , & s'étende le long d'une ligne donnée de position; & l'autre  $PM$  qui détermine toujours par son extrémité  $M$ , l'un des points cherchés, change continuellement d'origine, & soit toujours parallèle à la même ligne. 2°. On tirera les autres lignes que l'on jugera utiles à la solution du Problème, & on les exprimera par des lettres; sçavoir, les connues par les premières lettres de l'Alphabet, & les inconnues par les dernières. 3°. On regardera la question comme résolue, & après en avoir parcouru toutes les conditions, on arrivera enfin à une équation qui ne renfermera que les deux inconnues  $x$  &  $y$  mêlées avec des connues. 4°. Cette équation dans laquelle on suppose que les inconnues  $x$  &  $y$  aient au plus deux dimensions, étant formée, on en construira le lieu selon les regles prescrites dans le Livre précédent; & le lieu ainsi construit résoudra la question. Tout ceci s'éclaircira par les Exemples qui suivent,

## E X E M P L E I.

348. **T**ROUVER dans l'angle donné  $BAC$  le point FIG. 184.  
 $M$ , tel qu'ayant mené de ce point les deux droites  $MF$ ,  
 $MG$ , qui fassent sur les côtés  $AB$ ,  $AC$ , toujours vers  
la même part, des angles donnés  $MFB$ ,  $MGC$ ; la  
I i

droite  $MF$  soit toujours à la droite  $MG$  en la raison donnée de  $a$  à  $b$ . Et comme il y a une infinité de ces points, on demande la ligne qui les renferme tous, & qui en est par conséquent le lieu.

Par le point  $M$ , que l'on suppose être un des points cherchés, ayant mené la ligne  $MP$  parallèle à  $AC$ ; on considérera les deux droites inconnues & indéterminées  $AP(x)$ ,  $PM(y)$ , comme connues & déterminées. On prendra sur le côté  $AB$  la partie  $AB=a$ , on tirera les droites  $BC$ ,  $BD$ , parallèles à  $MF$ ,  $MG$ , & qui rencontrent aux points  $C$ ,  $D$ , l'autre côté  $AC$  prolongé, s'il est nécessaire; & on nommera les connues  $AC, c$ ;  $BC, f$ ;  $BD, g$ . Presentement menant  $MQ$  parallèle à  $AB$ , les triangles semblables  $ACB$ ,  $PMF$ , &  $ABD$ ,  $QMG$ , donneront ces deux proportions:  $AC(c). CB(f) :: MP(y). MF = \frac{fy}{c}$ , &  $AB(a). BD(g) :: MQ$  ou  $AP(x). MG = \frac{gx}{a}$ ; ce qui satisfait à la première condition du Problème, puisque les lignes  $MF$ ,  $MG$ , sont toujours supposées parallèles aux deux mêmes droites  $BC$ ,  $BD$ , qui sont sur les côtés  $AB$ ,  $AC$ , les angles donnés. Or par la seconde condition qui reste à accomplir, il faut que  $MF(\frac{fy}{c}). MG(\frac{gx}{a}) :: a. b$ ; d'où l'on tire l'équation  $y = \frac{agx}{bf}$  qui renferme toutes les conditions du Problème, & dont le lieu sera par conséquent celui que l'on cherche. Il se construit \* ainsi.

\* Art. 306.

Ayant pris sur la ligne  $AP$ , la partie  $AH=b$ , soit menée  $HE = \frac{ag}{f}$  parallèle à  $PM$  & du même côté, & soit tirée la droite indéfinie  $AE$ . Je dis qu'elle sera le lieu de tous les points cherchés  $M$ .

Car ayant mené par un de ses points quelconques  $M$  les droites  $MP$ ,  $MQ$ , parallèles aux deux côtés  $AC$ ,  $AB$ , & les droites  $MF$ ,  $MG$ , parallèles à  $BC$ ,  $BD$ , & qui sont par conséquent sur les deux côtés  $AB$ ,  $AC$ , les angles donnés; on aura à cause des triangles simila-

bles  $AHE$ ,  $APM$ , cette proportion;  $AH(b)$ .  $HE(\frac{x}{f})::AP(x).PM(y)=\frac{ax}{bf}$ , & à cause des triangles semblables  $ACB$ ,  $PMF$ , &  $ABD$ ,  $QMG$ , ces deux autres:  $AC(c)$ .  $CB(f)::MP(\frac{ax}{bf})$ .  $MF=\frac{x}{b}$ ; &  $AB(a)$ .  $BD(g)::MQ$  ou  $AP(x)$ .  $MG=\frac{x}{a}$ . Et par conséquent  $MF(\frac{x}{b})$ .  $MG(\frac{x}{a})::a.b$ . Ce qui étoit proposé.

Je n'ai résolu cette question par le calcul, que pour la rapporter à la Proposition générale, & commencer par des Exemples simples & aisés à en faire voir l'application; car on peut résoudre ce Problème sans aucun calcul, & d'une manière plus facile en cette sorte.

Soient tirées les droites  $AK$ ,  $AL$ , qui fassent sur  $AB$ ,  $AC$ , les angles donnés  $KAB$ ,  $LAC$ , & qui soient entr'elles en la raison donnée de  $a$  à  $b$ . Soient menées les droites  $KM$ ,  $LM$ , parallèles aux côtés  $AB$ ,  $AC$ , & qui se rencontrent au point  $M$ ; par où, & par le sommet  $A$  de l'angle donné  $BAC$ , soit tirée la ligne  $AM$ : Je dis qu'elle fera le lieu cherché.

FIG. 185.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $E$  les droites  $ER$ ,  $ES$ , parallèles à  $AK$ ,  $AL$ ; on aura à cause des triangles semblables  $AER$ ,  $MAK$ , &  $AES$ ,  $MAL$ , ces proportions  $ER.AK::AE.AM::ES.AL$ . Et partant  $ER.ES::AK.AL::a.b$ .

## EXEMPLE II.

349. Les parallèles  $AB$ ,  $CD$ , étant données de position; trouver le lieu de tous les points  $M$  tellement placés entre ces lignes, qu'ayant tiré les droites  $MP$ ,  $MG$ , qui fassent avec elles toujours vers la même part des angles donnés  $MPB$ ,  $MGD$ ; elles soient toujours entr'elles en la raison donnée de  $a$  à  $b$ .

FIG. 186.

Ayant pris pour l'origine fixe des indéterminées  $AP(x)$ , un point quelconque  $A$  de la ligne  $AB$ , & les deux

Ii ij

droites inconnues & indéterminées  $AP(x)$ ,  $PM(y)$  étant supposées connues & déterminées, on mènera les lignes  $AC$ ,  $AE$ , parallèles aux deux droites  $MP$ ,  $MG$ ; & on nommera les connues  $AC$ ,  $c$ ;  $AE$ ,  $f$ ; C'est fait, on prolongera  $PM$  jusqu'à ce qu'elle rencontre  $CD$  en  $F$ ; & les triangles semblables  $CAE$ ,  $FMG$ , donneront  $AC(c) \cdot AE(f) :: MF(c-y) \cdot MG = \frac{cf-fy}{c}$ .

Or selon la condition du Problème qui reste à accomplir, il faut que  $MP(y) \cdot MG(\frac{cf-fy}{c}) :: a.b$ ; d'où l'on

tire l'équation  $y = \frac{acf}{bc+af}$  qui renferme toutes les conditions du Problème, & dont le lieu qui est \* une ligne droite indéfinie  $HM$  menée parallèlement à  $AB$  est sorte que  $AH = \frac{acf}{bc+af}$ , est par conséquent le lieu cherché.

### EXEMPLE III.

350. **DEUX** points  $A, B$ , étant donnez, en trouver un troisième  $M$ , tel qu'ayant mené les droites  $MA$ ,  $MB$ ; elles soient toujours entr'elles en raison donnée de  $a$  à  $b$ . Et comme il y a une infinité de ces points  $M$ , il est question de décrire le lieu qui les renferme tous.

Il peut arriver trois differens cas selon que  $a$  est moindre, plus grand, ou égal à  $b$ .

*Premier cas.* Par le point  $M$ , que je suppose être un de ceux qu'on cherche, ayant mené la ligne  $MP$  perpendiculaire sur  $AB$  (car n'y ayant point d'angle donné dans le Problème, on choisit l'angle droit comme le plus simple), & les deux droites inconnues & indéterminées  $AP(x)$ ,  $PM(y)$  étant supposées connues & déterminées; on nommera la donnée  $AB$ ,  $c$ ; & à cause des triangles rectangles  $APM$ ,  $BPM$ , on aura les quarrés  $\overline{AM} = xx + yy$ ,  $\overline{BM} = cc - 2cx + xx + yy$ . Or par la condition du Problème,  $\overline{AM}^2 (xx + yy) \cdot \overline{BM}^2 (cc - 2cx + xx + yy) :: aa.bb$ . D'où (en mul.

tipliant les extrêmes & les moyens & divisant ensuite par  $bb - aa$ ) on forme cette équation  $yy - xx + \frac{2aacx}{bb - aa} - \frac{aacc}{bb - aa} = 0$ , qui renferme la condition du Problème, & dont le lieu qui est par conséquent celui qu'on demande, se construit par le moyen de l'article 322. (Liv. précéd.) en cette sorte.

Soit prise sur la ligne  $AP$ , la partie  $AC = \frac{aac}{bb - aa}$  du côté opposé à  $PM$ ; & soit décrite du centre  $C$ , & du rayon  $CD$  ou  $CE = \frac{abc}{bb - aa}$  la circonférence d'un cercle. Je dis que la portion  $DMO$  renfermée dans l'angle  $PAO$ , fait par la ligne  $AP$  & par la droite  $AO$  menée parallèlement à  $PM$  & du même côté, sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver. F 10. 187.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ , la perpendiculaire  $MP$  sur  $AB$ , on aura par la propriété du cercle  $\overline{CD}^2 - \overline{CP}^2$  ou  $EB \times PD = \overline{PM}^2$ ; c'est à dire en mettant pour ces quarrés leurs valeurs analytiques, l'équation précédente.

Si l'on suppose à présent que les points  $M$  tombent dans l'angle  $EAR$  opposé au sommet à l'angle  $BAO$  dans lequel on a supposé en faisant le calcul qu'ils étoient situés, on trouvera en faisant  $AP = -x$ , &  $PM = -y$ , \* Art. 304. la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problème, que par la propriété de la portion  $RME$  de la même circonférence que l'on vient de décrire, d'où il suit que cette portion est le lieu de tous les points cherchés  $M$ , lorsqu'ils tombent dans l'angle  $RAE$ . Et si l'on suppose enfin que les points  $M$  tombent dans l'angle  $BAR$  & ensuite dans l'angle  $EA O$ , on trouvera de même (en observant de faire  $PM = -y$ , lorsqu'il tombe de l'autre côté de la ligne  $AB$ ; &  $AP = -x$ , lorsque le point  $P$  tombe de l'autre côté du point fixe  $A$ ) que les portions  $DR$ ,  $EO$ , de la même circonférence seront les lieux de ces points; & qu'ainsi la circonférence

ce entiere qui a pour diametre la ligne  $DE$ , est le lieu complet de tous les points requis  $M$ .

*Second cas.* On trouvera par un raisonnement semblable à celui du premier cas, cette équation  $yy - xx$

$$- \frac{2aacx}{aa-bb} + \frac{acc}{aa-bb} = 0, \text{ dont le lieu se construit ainsi.}$$

**FIG. 188.** Soit prise sur  $AP$ , la partie  $AC = \frac{acc}{aa-bb}$  du côté de  $P$   $M$ ; & soit décrite du centre  $C$ , & du rayon  $CD$  ou  $CE = \frac{abc}{aa-bb}$  un cercle. Je dis que sa circonference sera le lieu de tous les points requis  $M$ . Cela se prouve de même que dans le premier cas.

Si l'on considère dans ces deux cas que la circonference qui a pour diametre  $DE$ , & qui est le lieu de tous les points cherchés  $M$ , doit couper la ligne  $AB$  en deux points  $D, E$ , tels que  $AD \cdot DB :: a \cdot b$ , &  $AE \cdot EB :: a \cdot b$ ; puisque le point  $M$  tombant en  $D$  la droite  $AM$  devient  $AD$ ; &  $BM$ ,  $BD$ ; & de même que le point  $M$  tombant en  $E$ , la droite  $AM$  devient  $AE$ , &  $BM$ ,  $BE$ : on abrègera de beaucoup les constructions précédentes. Car il est visible qu'ayant divisé la ligne  $AB$  prolongée, du côté qu'il sera nécessaire, en deux points  $D, E$ , tels que  $AD \cdot DB :: a \cdot b$ , &  $AE \cdot EB :: a \cdot b$ ; la ligne  $DE$  sera en l'un & l'autre cas le diametre de la circonference qui est le lieu cherché.

*Troisième cas.* Puisque dans ce cas  $a = b$ , l'équation \* **Art. 307.** précédente se change en celle-ci  $x = \frac{1}{2}c$ ; d'où l'on voit \*

**FIG. 189.** que si l'on prend  $AP$  égale à la moitié de  $AB$  & qu'on tire la droite  $PM$  perpendiculaire sur  $AB$ , cette ligne  $PM$  indéfiniment prolongée de part & d'autre, sera le lieu de tous les points requis  $M$ . Ce qui est d'ailleurs évident par les Elements de Geometrie.

#### EXEMPLE IV,

**FIG. 190.** 351. **D**eux lignes droites  $DE, DN$ , indéfiniment prolongées de part & d'autre du point  $D$ , étant données



de position sur un plan, avec un point  $C$  hors de ces lignes; soit imaginé un angle donné  $CEM$  se mouvoir par son sommet  $E$  le long de  $DE$ , en sorte que son côté  $EC$  qui rencontre  $DN$  en  $N$ , passe toujours par le même point  $C$ , & que son autre côté  $EM$  soit toujours troisième proportionnel à  $NC$ ,  $CE$ . On demande le lieu de tous les points  $M$  dans ce mouvement.

Soient menées  $CA$  parallèle à  $DN$ ; &  $CB$  qui fasse sur  $DE$  au point  $B$  un angle égal à l'angle donné  $CEM$ , du côté qu'il sera nécessaire, afin que  $CE$  tombant sur  $CB$  la droite  $EM$  tombe sur  $DE$ . Cela posé, je distingue la question en trois differens cas: car ou le sommet  $E$  de l'angle donné  $CEM$  se meut sur la droite  $DE$  de l'autre côté du point  $B$  par rapport au point  $A$ ; ou entre les points  $B$ ,  $A$ ; ou enfin de l'autre côté du point  $A$  par rapport au point  $B$ .

*Premier cas.* Lorsque le sommet  $E$  se meut sur la ligne  $DE$  de l'autre côté du point  $B$  par rapport au point  $A$ . Ayant mené du côté du point  $C$  la ligne  $AQ$  qui fasse sur  $DE$  au point  $A$  l'angle  $BAQ$  égal à l'angle  $ABC$ , on tirera par l'un des points cherchés  $M$ , que l'on regarde comme donné, la ligne  $MP$  parallèle à  $AQ$ , & qui rencontre  $DE$  en  $P$ ; & on aura deux triangles semblables  $CBE$ ,  $EPM$ ; car les deux angles  $CBE$ ,  $EPM$ , sont égaux chacun à l'angle donné  $CEM$ , & de plus les angles  $BCE$ ,  $PEM$ , sont aussi égaux entr'eux; puisque dans le triangle  $CBE$  l'angle externe  $CEP$  ou  $CEM + PEM$  est égal aux deux internes opposés  $BCE$  &  $CBE$  ou  $CEM$ . Si donc l'on nomme les données  $AD$ ,  $a$ ;  $AB$ ,  $b$ ;  $BC$ ,  $c$ ; & les inconnues & indéterminées  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ;  $AE$ ,  $z$ ; on aura, tant à cause des parallèles  $DN$ ,  $AC$ , que de la condition du Problème, ces proportions  $AD(a) : AE(z) :: CN.CE :: CE.EM :: CB(c).EP(x-z) :: BE(z-b).PM(y)$ ; d'où l'on forme (en multipliant les extrêmes & les moyens) ces deux équations  $ax - az = cz$  &  $ay = zx - bz$ , qui, en prenant, pour abréger,

$f = a + c$ , & faisant évanouir  $c$ , se réduisent à celle-ci  $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = 0$  qui ne renferme plus que les inconnues  $x$  &  $y$ , & dont le lieu, qui est celui que l'on cherche, se construit \* ainsi.

Soit prise sur la ligne  $AP$ , la droite  $AF = \frac{bf}{2a}$  du côté de  $PM$ ; & ayant mené  $FL$  parallèle à  $PM$ , soit prise sur cette ligne du côté opposé à  $PM$ , la partie  $FO = \frac{bb}{4a}$ . Soit décrite du diamètre  $GL$  qui ait pour origine le point  $G$ , pour paramètre  $GH = \frac{ff}{a}$ , & pour ordonnées des droites  $LM$  parallèles à  $AP$ , une Parabole qui s'étende du côté de  $PM$ . Je dis que la portion indéfinie  $OM$  renfermée dans l'angle  $PAQ$ , sera le lieu de tous les points cherchés  $M$ .

Car ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$ , la ligne  $MQ$  parallèle à  $AP$  & qui rencontre le diamètre  $CL$  en  $L$ , on aura  $ML$  ou  $PF = x - \frac{bf}{2a}$  &  $GL = y + \frac{bb}{4a}$ , & par la propriété de la Parabole,  $\overline{ML}^2 = \left(x - \frac{bf}{a} + \frac{bbff}{4aa}\right) = LG \times GH = \left(\frac{ff}{a}y + \frac{bbff}{4aa}\right)$ ; ce qui en transposant à l'ordinaire donne l'équation  $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = 0$ , qu'il falloit construire.

*Second cas.* Lorsque le sommet  $E$  parcourt la partie  $BA$ . Il est clair dans ce cas que les points  $M$  tomberont de l'autre côté de  $DE$ , puisque l'angle donné  $CEM$  sera toujours plus grand que l'angle  $CEP$  qui diminue continuellement. C'est pourquoi j'ai  $PM = -y$ , & comme je trouve par un raisonnement semblable au précédent, la même équation; il s'ensuit que la portion  $AGO$  de la Parabole que l'on vient de décrire, sera le lieu de tous les points  $M$ , puisqu'elle donne aussi par sa propriété cette même équation.

*Troisième cas.* Lorsque le sommet se meut de l'autre côté

côté du point  $A$  par rapport au point  $B$ . Il est clair encore dans ce cas que tous les points cherchés  $M$  doivent tomber au dessous de la ligne  $DE$ ; & on trouvera comme dans le premier cas  $AD.AE::CN.CE::CF.FM::CB.EP$ . Et partant  $AD.CB::AE.EP$ . D'où l'on voit que  $EP$  est plus grande, moindre, ou égale à  $EA$  selon que  $CB$  est plus grande, moindre, ou égale à  $AD$ ; & qu'ainsi prolongeant  $AQ$  au dessous de  $DE$  vers  $K$ , tous les points cherchés  $M$  tombent dans l'angle  $BAK$  dans le premier de ces trois cas, dans son complément à deux droits  $DAK$  dans le second cas, & enfin sur la droite  $AK$  dans le troisième cas. Je suppose ici que  $CB$  soit plus grande que  $AD$ ; & comme faisant  $PM = -y$ , parce qu'il tombe de l'autre côté de  $AP$ , je ne trouve plus la même équation que dans le premier cas, je ne fais plus d'attention à la construction de ce cas. C'est pourquoi nommant à l'ordinaire  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; j'arrive à cette équation  $xx + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 0$ , dans laquelle  $g = c - a$ , dont le lieu qui est celui que l'on cherche est une portion indéfinie  $AM$  d'une autre Parabole que la précédente laquelle s'étend vers le côté opposé, & qui se construit \* en cette sorte.

\* Art. 310.

Soit prise sur  $AP$  de l'autre côté de  $PM$  la partie  $AS = \frac{1}{2}$ ; soit menée  $ST = \frac{1}{4}$  parallèle à  $AQ$ , & du côté opposé à  $PM$ ; soit décrite du diamètre  $TS$  qui ait pour origine le point  $T$ , pour parametre une ligne  $= \frac{1}{2}$ , & pour ordonnées des droites parallèles à  $AP$ , une Parabole qui s'étende du côté de  $PM$ . Sa portion indéfinie  $AM$  renfermée dans l'angle  $PAK$  sera le lieu de tous les points cherchés  $M$  dans ce dernier cas, où l'on suppose que  $CB$  surpasse  $AD$ .

Il est donc évident que le lieu cherché de tous les points  $M$  est composé de deux portions indéfinies de différentes Paraboles, dont l'une  $AGOM$  s'étend du côté de  $C$ , & l'autre  $AM$  du côté opposé, & partent

toutes deux du point  $A$ ; car le côté  $CE$  de l'angle donné  $CEM$  tombant sur  $CA$  parallèle à  $DN$ , il est clair que  $CN$  devient infinie, & qu'ainsi  $EM$  est nulle ou zero, puisqu'on a toujours  $NC. CE :: CE. EM$ : c'est à dire que le point  $M$  se confond avec le point  $E$  qui tombe sur le point  $D$ . D'où l'on voit que  $AF$  est une ordonnée au diamètre  $FG$ , &  $AS$  au diamètre  $ST$ ; ce qui donne lieu à la construction suivante qui est générale.

Ayant pris sur la ligne indéfinie  $AP$  de part & d'autre du point  $B$  les parties  $BO, BR$ , égales chacune à la quatrième proportionnelle aux trois lignes  $DA, AB, BC$ ; on menera par les points de milieu  $F, S$ , l'un de  $AO$ , l'autre de  $AR$ , les droites  $FG, ST$ , parallèles à  $AQ$ , & égales chacune à la troisième proportionnelle à  $4AD$ , & à  $AB$ ; sçavoir,  $FG$  du côté opposé au point  $C$ , &  $ST$  du même côté. Cela fait, on décrira deux différentes Paraboles dont l'une aura pour diamètre  $GF$  & pour ordonnée  $FA$ , & l'autre pour diamètre  $TS$  & pour ordonnée  $SA$ ; je dis que leurs portions indéfinies  $MAGOM$  feront le lieu complet de tous les points cherchés  $M$ .

Car  $BO$  ou  $BR = \frac{b^2}{2a}$ , & partant  $AF$  ou  $\frac{1}{2}AO = \frac{r}{2}b - \frac{b^2}{2a} = \frac{br}{2a}$ ; & de même  $AS$  ou  $\frac{1}{2}AR = \frac{r}{2}b - \frac{b^2}{2a} = \frac{br}{2a}$ . Donc &c.

On peut remarquer en passant que si l'angle donné, qui se meut par son sommet le long de la ligne  $DE$ , étoit égal au complément à deux droits de l'angle  $CEM$ , sans rien changer au reste; c'est à dire que les points  $M$  tombassent sur la ligne  $EM$  prolongée de l'autre côté du point  $E$ : le lieu de tous les points  $M$  seroit alors les portions restantes des deux Paraboles que l'on vient de décrire.

Si les points  $A, B, C$ , étoient situés différemment de ce qu'on les suppose dans cette figure, à laquelle on a accommodé le raisonnement, on arriveroit toujours

comme l'on vient de faire à deux équations qui ne pourroient être différentes des précédentes que par quelques signes, & dont les lieux seroient par conséquent des portions de Paraboles que l'on décriroit avec la même facilité.

Le Comte *Roger de Vintimille* a proposé ce Problème avec quelques autres dans le Journal de Parme du mois d'Avril de l'année 1693. ce qui a donné occasion au Pere *Saquerius* de faire imprimer un petit livre à Milan, dans lequel il avouë qu'il n'a pû refoudre celui-ci, quoiqu'il fasse assez paroître par la solution des autres qu'il est fort versé dans la Geometrie.

## E X E M P L E V.

352. **U**NE ligne droite indéfinie  $AP$  étant donnée FIG. 191.  
de position, avec deux points fixes  $A, C$ , l'un sur cette droite, & l'autre au dehors; soit décrite une Parabole  $AM$  qui ait pour parametre une ligne quelconque, & pour axe la ligne  $AP$  dont l'origine soit en  $A$ ; & soit menée du point donné  $C$  une perpendiculaire  $CM$  à cette Parabole. On demande le lieu de tous les points  $M$ , dont il est visible qu'il y a une infinité; puisque changeant continuellement de parametres, on peut décrire une infinité de Paraboles différentes, qui ayent toutes pour axes la même droite indéfinie  $AP$ , dont l'origine soit toujours en  $A$ .

Ayant mené par le point donné  $C$  la perpendiculaire  $CB$  sur  $AP$ , & par un des points cherchés  $M$  que l'on regarde comme donné, les droites  $MP, MK$ , parallèles à  $BC, AP$ , & la tangente  $MT$ ; on nommera les données  $AB, a$ ;  $BC, b$ ; & les inconnues & indéterminées  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; ce qui donne  $CK = b - y$ ,  $MK = a - x$ . Or par la condition du Problème, l'angle  $CMT$  est droit; & par conséquent les triangles rectangles  $TPM, CKM$ , seront semblables; car si l'on ôte des angles droits  $CMT, KMP$ , le même angle  $KMT$ ,  
K k ij

\* Art. 22. & les restes  $CMK$ ,  $TMP$ , seront égaux. Donc  $TP^*(1x)$ ;  
23.  $PM(y) :: CK(b-y) : KM(a+x)$ , d'où l'on forme

en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation  $yy - by + 2xx - 2ax = 0$ ; dont le lieu qui est

\* Art. 322. celui qu'on demande est \* une Ellipse que l'on construit \*  
\* Art. 324. en cette sorte.

Ayant mené  $AD = \frac{1}{2}b$  perpendiculaire à  $AP$  & du côté de  $PM$ , & tiré la droite indéfinie  $DZ$  parallèle à  $AP$ , on prendra sur cette ligne la partie  $DE = \frac{1}{2}a$  du côté opposé à  $PM$ ; & de part & d'autre du point  $E$  les parties  $EF$ ,  $EG$  égales chacune à  $V\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$ . Ensuite de l'axe  $FG$  qui ait pour parametre une ligne  $GH$  double de  $FG$ , on décrira une Ellipse. Je dis que sa portion  $AMO$  renfermée dans l'angle  $PAD$  est le lieu de l'équation précédente; & par conséquent de tous les points cherchés  $M$ , lorsqu'ils tombent dans cet angle.

Car prolongeant  $PM$ , s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe  $FG$  en  $L$ , on aura l'ordonnée  $ML = \frac{1}{2}b - y$ , &  $EL = \frac{1}{2}a + x$ , & par la propriété de l'Ellipse,  $FL \times LG$  ou  $EF^2 - EL^2$  ( $\frac{1}{4}bb - ax - xx$ ).  $LM^2$  ( $\frac{1}{4}bb - by + yy$ ) ::  $FG.GH :: 1. 2$ ; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens  $\frac{1}{4}bb - 2ax - 2xx = \frac{1}{4}bb - by + yy$ . Donc &c.

Si l'on suppose à présent que les points  $M$  tombent dans les angles  $BAD$ ,  $BAR$ , on trouvera toujours la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problème que par la propriété de l'Ellipse; en observant de faire  $AP = -x$ , &  $PM = -y$ , lorsque le point  $P$  tombe de l'autre côté de l'origine  $A$ , &  $PM$ , de l'autre côté de la ligne  $AP$ . D'où il suit que les portions de l'Ellipse, que l'on vient de décrire, renfermées dans ces angles sont le lieu de ces points.

On doit remarquer qu'il est impossible qu'aucun des points cherchés  $M$ , tombe dans l'angle  $PAA$ , opposé au sommet à l'angle  $BAD$  dans lequel est situé le point donné  $C$ , d'où doivent partir toutes les perpendiculaires aux Paraboles. Car si d'un point quelconque pris

dans cet angle  $PAR$ , on mene des droites comme  $MP$ ,  $MT$ , perpendiculaires sur  $AP$  &  $CM$ , il est visible que les points  $P$ ,  $T$ , tomberont du même côté du point  $A$ , & par conséquent que cette ligne  $MT$  ne pourra être tangente en  $M$  comme le demande la question.

Si l'on suppose que  $AP(x)$  devienne nulle ou zero, l'équation précédente  $yy - by + 2xx - ax = 0$  se changera en celle-ci  $yy - by = 0$ , dont les deux racines sont  $y = 0$ , &  $y = b$ ; ce qui fait voir qu'en tirant  $AO$  parallele & égale à  $BC$ , le lieu des points cherchés  $M$  passera par les deux points  $A$ ,  $O$ . On prouvera de même en supposant que le point  $P$  tombe de l'autre côté de l'origine  $A$ , & faisant  $AP(-x) = AB(a)$ , que ce même lieu passera par les points  $B$ ,  $C$ ; de sorte que l'Ellipse doit être décrite autour du rectangle  $ABCO$ . Ceci donne lieu à une nouvelle construction que voici.

Soit formé le rectangle  $ABCO$ , & soit décrite \* au- \* Art. 176.  
tour de ce rectangle une Ellipse, dont l'axe  $FG$  parallele aux côtés  $AB$ ,  $OC$ , soit à son parametre  $GH$ , comme 1 est à 2. Il est évident qu'elle sera le lieu cherché.

## REMARQUE. I.

353. Si la nature des lignes courbes telles que  $AM$  étoit exprimée par l'équation generale  $y^n = x^m a^{n-m}$  (les lettres  $m$ ,  $n$ , marquent les exposans des puissances de  $y$  &  $x$  tels qu'ils puissent être) qui renferme \* non seule- \* Art. 290.  
ment la Parabole ordinaire, mais encore celles de tous

les degrés à l'infini; on auroit  $TP^* (\frac{n}{m} x)$ .  $PM(y) : : *$  Art. 237.

$CK(b-y) \cdot KM(a+x)$ : ce qui donne  $yy - by + \frac{n}{m} x x$

$+ \frac{n}{m} a x = 0$ , dont le lieu qui est celui qu'on cherche,

est une Ellipse que l'on construira selon l'article 322. ou bien selon l'article 176. si l'on observe que cette Ellipse doit passer autour du rectangle donné  $ABCO$ , & que son axe  $FG$  parallele aux côtés  $AB$ ,  $OC$ , doit être

à son parametre  $GH$  en la raison donnée de  $m$  à  $n$ .

## REMARQUE II.

FIG. 191.

354. Si le centre  $E$  de l'Ellipse qu'on vient de décrire tomboit sur l'origine  $A$  de l'axe commun  $AP$  de toutes les Paraboles  $AM$ ; & l'axe  $FG$  de l'Ellipse sur l'axe  $AP$  des Paraboles: cette Ellipse couperoit toutes ces différentes Paraboles à angles droits. On peut énoncer ce Theorème de la maniere qui suit.

FIG. 192.

Soient une infinité de Paraboles comme  $AM$  de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour axe commun la même ligne  $AP$ , dont l'origine est toujours au même point  $A$ ; & soit une Ellipse qui ait pour centre le point  $A$ , & dont l'axe  $FG$  situé sur  $AP$  soit à son parametre, comme le nombre  $m$  exposant de la puissance de  $AP(x)$  est au nombre  $n$  exposant de la puissance de  $PM(y)$ , dans l'équation generale  $y^2 = x^m a^{-m}$  qui exprime la nature des Paraboles  $AM$ . Je dis que cette Ellipse coupera toutes ces Paraboles à angles droits.

Par le point  $M$ , où elle coupe telle de ces Paraboles qu'on voudra, ayant mené la tangente  $MT$  à cette Parabole, &  $MS$  perpendiculaire à cette tangente; il est question de prouver que  $MS$  touche l'Ellipse au point  $M$ . Pour en venir à bout, on tirera la perpendiculaire  $MP$  sur l'axe, & ayant nommé les indéterminées  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; & la donnée  $FG, 2t$ ; on aura par la propriété de l'Ellipse  $FP \times PG (tt - xx)$ .  $PM^2 (yy) :: m.n$ , & partant  $m yy = nt t - n xx$ . Or à cause des angles droits  $TPM$ ,

\* Art. 337.  $TMS$ , il vient  $TP^2 (\frac{n}{m} x)$ .  $PM(y) :: PM(y)$ .

$PS = \frac{m y}{n}$ , & par conséquent  $AS$  ou  $AP + PS = \frac{m x + m y}{n}$

$= \frac{n}{m}$  en mettant pour  $m y$  la valeur que l'on vient de trouver  $nt t - n x x$ . D'où l'on voit que  $AP.AF :: AF.AS$ ,

\* Art. 57.

& qu'ainsi \* la ligne  $MS$  touche l'Ellipse au point  $M$ .  
Ce qu'il falloit &c.



## EXEMPLE II.

355. SOIENT imaginées une infinité d'Hyperboles qui aient toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites  $AP, AO$ , données de position, qui font entr'elles un angle droit  $PAO$ ; & soient conceues partir d'un point donné  $C$  une infinité de perpendiculaires comme  $CM$  à ces Hyperboles. On demande le lieu de tous les points  $M$ , où chacune des droites  $CM$  rencontre l'Hyperbole à laquelle elle est perpendiculaire. FIG. 173.

Ayant tiré les mêmes lignes que dans l'exemple précédent, & les ayant nommées par les mêmes lettres, on arrivera de même à cette proportion  $TP^*(x) \cdot PM(y) :: CK(b-y) \cdot KM(a-x)$ ; ce qui donne cette équation  $yy - by - xx + ax = 0$ , dont voici le lieu. \* Art. 107.  
\* Art. 350.  
ou 335.

Ayant pris sur l'Asymptote  $AO$  parallèle à  $PM$ , la partie  $AD = \frac{1}{2}b$ , & mené  $DL$  parallèle à  $AP$ ; on prendra sur cette ligne la partie  $DE = \frac{1}{2}a$  du côté de  $PM$ , & de part & d'autre du point  $E$ , les parties  $EF, EG$ , égales chacune à  $V\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$  ou  $V\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$  selon que  $a$  est plus grand ou moindre que  $b$ . On décrira ensuite de la ligne  $FG$ , comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxième, deux Hyperboles opposées équilateres. Je dis que leurs portions renfermées dans l'angle  $PAO$ , feront le lieu de cette équation, & par conséquent celui de tous les points cherchés  $M$ .

Car prolongeant  $PM$  (s'il est nécessaire) jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe  $FG$ , en  $L$ , on aura l'ordonnée  $ML = \frac{1}{2}b - y$ , & la partie  $EL = x - \frac{1}{2}a$ ; & par la propriété des Hyperboles équilateres  $\overline{EL} \pm \overline{EF} (xx - ax + \frac{1}{4}bb) = \overline{EM}^2 (\frac{1}{4}bb - by + yy)$ . Donc &c. \* Art. 127.

Si  $a = b$ , la construction précédente n'a plus de lieu, car la valeur du demi axe  $EF$  ou  $EG$  devient nulle. Et comme l'équation précédente devient celle-ci  $yy - ay - xx + ax = 0$ , ou  $yy - ay + \frac{1}{4}aa = xx - ax + \frac{1}{4}aa$

de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient  $y - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$  ou  $y = x$ , &  $\frac{1}{2}a - y = x - \frac{1}{2}a$  ou  $y = a - x$ ; il s'ensuit que si l'on acheve le rectangle  $ABCO$ , & qu'on tire les deux diagonales  $AC$ ,  $BO$ : elles feront le lieu de tous les points cherchés  $M$ . Car la diagonale  $AC$  est le lieu de la première équation  $y = x$ , & l'autre diagonale  $BO$  est le lieu de la deuxième  $y = a - x$ .

FIG. 194.

## REMARQUE I.

356. Si la nature des lignes courbes qui ont pour Asymptotes les droites  $AB$ ,  $AO$ , étoit exprimée par l'équation générale  $x^m y^n = a^{m+n}$  qui renferme \* les Hyperboles de tous les degrés à l'infini, on auroit  $TP^*$  \* Art. 229.  $(\frac{n}{m}x) \cdot PM(y) :: CK(b-y) \cdot KM(a-x)$ ; ce qui donne  $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$ , dont le lieu se construit \* ainsi. \* Art. 330.

Ayant trouvé le point  $E$  comme dans l'exemple, on prendra sur  $DL$  de part & d'autre du point  $E$ , les parties  $EF$ ,  $EG$ , égales chacune à  $V\frac{1}{4}aa - \frac{m}{4n}bb$  ou  $V\frac{m}{4n}bb - \frac{1}{4}aa$ ; selon que  $naa$  est plus grand ou moindre que  $mnb$ . Ensuite de la ligne  $FG$  comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxième, qui soit à son parametre en la raison donnée de  $m$  à  $n$ , on décrira deux Hyperboles opposées: leurs portions renfermées dans l'angle  $OAB$  seront le lieu qu'on cherche.

Si  $a, b :: \sqrt{m}, \sqrt{n}$ , l'équation  $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$  se change en celle-ci  $yy - ayV\frac{n}{m} - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$ , ou  $yy - ayV\frac{n}{m} + \frac{n^2a^2}{4m} = \frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax + \frac{n^2a^2}{4m}$  de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient

FIG. 194.

vient  $y - \frac{1}{2}aV_{\frac{n}{m}} = xV_{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}aV_{\frac{n}{m}}$ , ou  $y = xV_{\frac{n}{m}}$ ; &  $\frac{1}{2}aV_{\frac{n}{m}} - y = xV_{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}aV_{\frac{n}{m}}$  ou  $y = aV_{\frac{n}{m}} - xV_{\frac{n}{m}}$ . D'où il suit que si l'on acheve le rectangle  $ABCO$ , & qu'on tire les diagonales  $BO$ ,  $AC$ ; ces deux lignes droites seront le lieu de tous les points cherchés  $M$ : car la diagonale  $AC$  est le lieu de la premiere équation  $y = xV_{\frac{n}{m}}$ , & l'autre diagonale  $BO$  le lieu de la seconde  $y = aV_{\frac{n}{m}} - xV_{\frac{n}{m}}$ .

On prouvera de même que dans l'Ellipse, que les Hyperboles opposées qui sont le lieu cherché, doivent être décrites autour du rectangle donné  $ABCO$ ; & comme l'axe  $FG$ , parallèle aux côtés  $AB$ ,  $OC$ , doit être à son parametre en la raison donnée de  $m$  à  $n$ , il s'ensuit qu'on peut décrire, si l'on veut, ces Hyperboles par le moyen de l'article 176. (Liv. 4.)

FIG. 193.

## REMARQUE II.

357. Si le centre  $E$  de l'Hyperbole  $BFC$  tomboit sur le point  $A$ , & son axe  $FG$  sur la ligne  $AP$ ; je dis que cette Hyperbole couperoit à angles droits toutes celles qui ont pour Asymptotes les droites  $AP$ ,  $AO$ ; ce qu'on peut énoncer ainsi.

FIG. 193.

Soient une infinité d'Hyperboles de tel degré qu'on voudra, qui aient toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites  $AP$ ,  $AO$ , qui font entr'elles un angle droit; & soit une Hyperbole ordinaire  $FM$  qui ait pour centre le point  $A$ , & dont le premier axe  $FG$  situé sur  $AP$ , soit à son parametre comme le nombre  $m$  exposant de la puissance de  $AP$  ( $x$ ) est au nombre  $n$  exposant de la puissance de  $PM$  ( $y$ ) dans l'équation generale  $x^m y^n = a^{m+n}$  qui exprime la nature des Hyperboles  $MAM$ . Je dis que l'Hyperbole  $FM$  coupe à angles droits toutes ces différentes Hyperboles.

FIG. 195.

Ayant mené par le point  $M$  où elle coupe telle de ces Hyperboles qu'on voudra, une tangente  $MT$  à cette Hyperbole, & une perpendiculaire  $MS$  à cette tangente; il s'agit de prouver que l'angle  $TMS$  sera droit. Pour le faire, on tirera  $MP$  perpendiculaire sur l'Asymptote  $AP$ ; & ayant nommé les indéterminés  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; & la donnée  $FG, t$ ; on aura par la propriété de l'Hyperbole  $FM$  cette proportion  $FP \times PG (xx - tt) : PM^2 (yy) :: m. n$ , & partant  $myy = nxx - ntt$ . Or à

\* Art. 237. cause des angles droits  $TPM, TMS$ , il vient  $TP^2 (\frac{n}{m}x)$ .

$PM (y) :: PM (y) . PS = \frac{myy}{nx}$ . Et par conséquent  $AS$

ou  $AP - PS = \frac{nxx - myy}{nx} = \frac{tt}{x}$  en mettant pour  $myy$  la valeur qu'on vient de trouver  $nxx - ntt$ . D'où l'on voit que  $AS$  est troisième proportionnelle à  $AP, AF$ ;

\* Art. 121. & qu'ainsi\* la ligne  $MS$  touche l'Hyperbole  $FM$  au point  $M$ . Ce qu'il falloit démontrer.

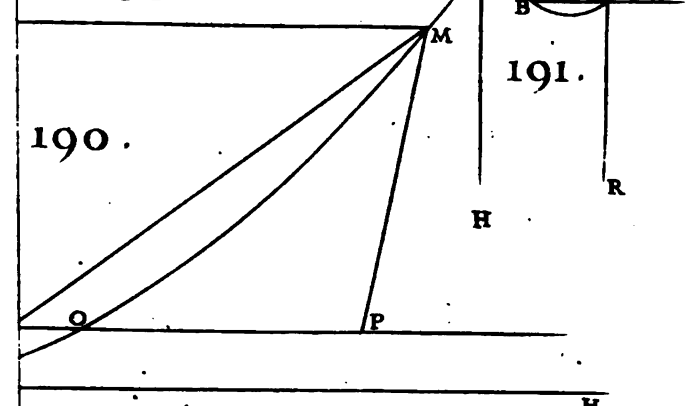
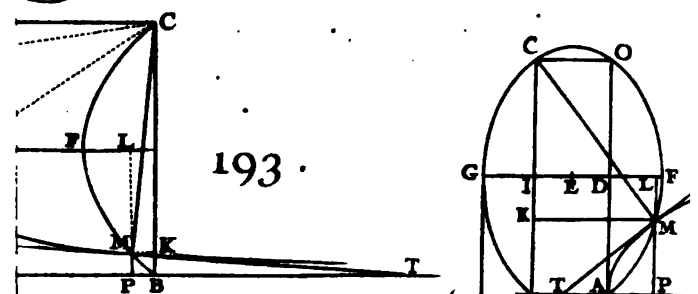
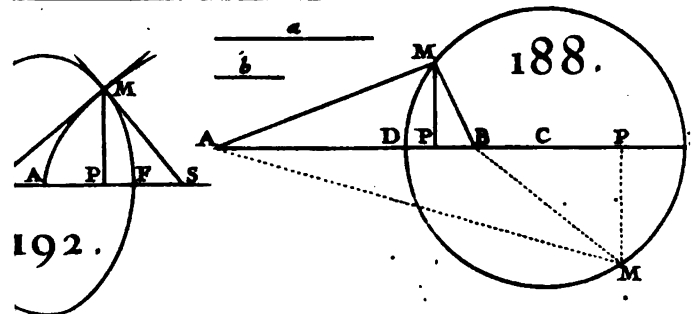
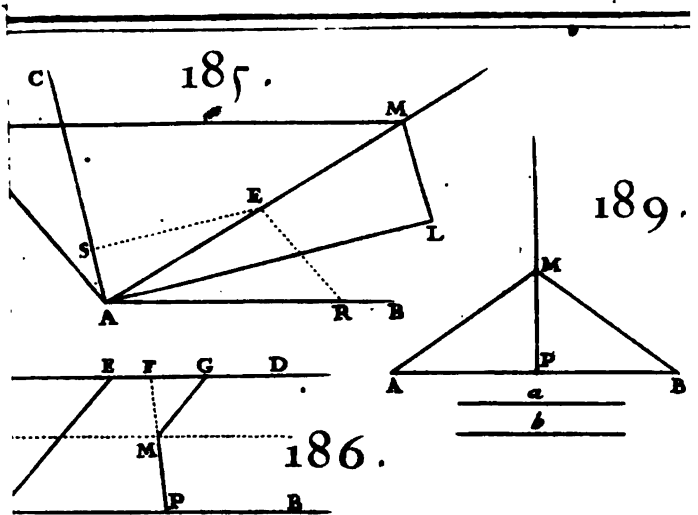
### EXEMPLE VII.

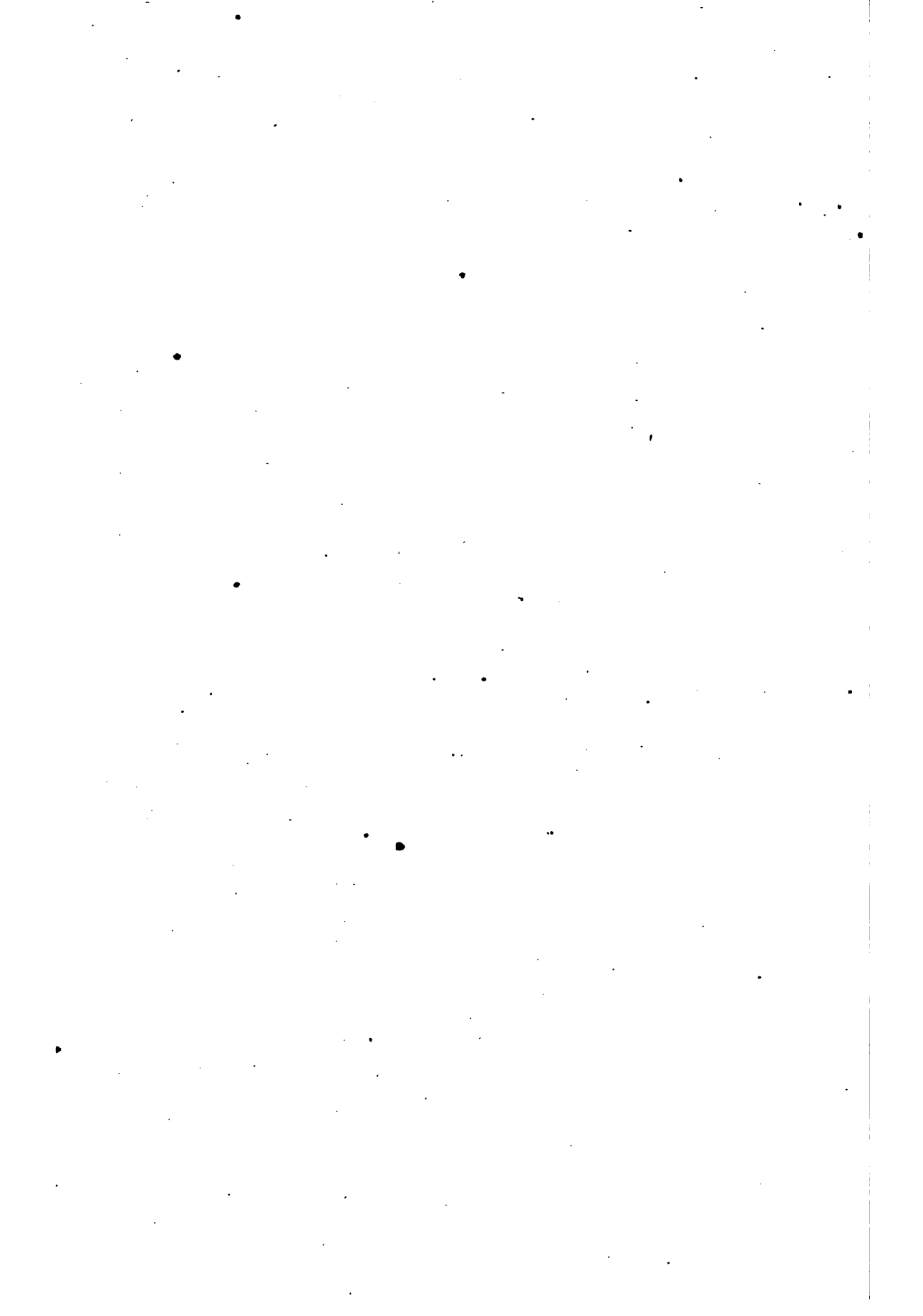
Fig. 396. 358. LA Parabole  $BAC$  étant donnée, on demande le lieu de tous les points  $M$ , tels qu'ayant mené de chacun de ces points, deux tangentes  $MB, MC$ , à cette Parabole; l'angle  $BMC$  qu'elles comprennent soit toujours égal à un angle donné.

Il peut arriver que l'angle donné  $BMC$  soit aigu, obtus, ou droit; ce qui fait trois differens cas.

*Premier cas.* Lorsque l'angle donné  $BMC$  est aigu.

\* Art. 160. Ayant mené\* l'axe  $AD$  de la Parabole donnée  $BAC$ , qui rencontre les tangentes  $MB, MC$ , aux points  $F, G$ , on tirera sur cet axe des points touchans  $B, C$ , & du point de concours  $M$ , les perpendiculaires  $BD, CE, MP$ . Et ayant mené  $MN$  qui fasse sur l'axe  $AD$  l'angle  $FNM$  égal à l'angle  $FMG$  complément à deux droits de l'angle donné  $BMC$ , on nommera les inconnues & indéterminées  $AP, x$ ;  $PM, y$ ;  $AF, s$ ;  $AG, t$ ;





& le parametre de l'axe  $AD$ , sçavoir,  $AV$ ,  $a$ ; lequel est donné, puisque la Parabole  $BAC$  est donnée. Cela posé; à cause du triangle rectangle  $FPM$ , on aura le Quarré  $FM^2 = ss - 2sx + xx + yy$ , lequel étant divisé par  $FG (s-t)$  donnera  $\frac{ss - 2sx + xx + yy}{s-t} = FN$ , à cause des triangles semblables  $FGM$ ,  $FMN$ ; & partant  $PN$  ou  $FP - FN = \frac{sx + tx - ss - xx - yy}{s-t}$ . Je cherche à present par le moyen de la Parabole donnée  $BAC$  des valeurs de  $s+t$ ,  $st$ , &  $s-t$  par rapport à  $x$  &  $y$ , afin qu'étant substituées, dans la valeur de  $PN$ , cette ligne ne renferme plus dans son expression d'autres inconnuës que  $x$  &  $y$ . Ce que je fais ainsi.

Les triangles semblables  $FPM$ ,  $FDB$ ; &  $GPM$ ,  $GEC$ , donnent  $FP(s-x).PM(y) :: FD^*(2s).BD^*(\sqrt{as})$ . \* Art. 22. Et  $GP(x-t).PM(y) :: GE(2t).CE(\sqrt{at})$ . D'où je \* Art. 7.

forme ces deux équations  $ss - 2xs - \frac{yy}{a}s + xx = 0$ , &  $st - 2xt - \frac{yy}{a}t + xx = 0$ ; c'est à dire (en faisant  $p = 2x + \frac{yy}{a}$  pour faciliter le calcul)  $ss - ps + xx = 0$ , &  $st - pt + xx = 0$ . Je retranche la seconde équation de la premiere, & j'ai  $ss - st - ps + pt = 0$  qui étant divisée par  $s-t$  donne  $s+t = p$ ; & partant  $s = p-t$ , &  $ss = ps - ts = ps - xx$  à cause de la premiere équation, d'où je tire  $st = xx$ . Si l'on ôte  $4xx$  valeur de  $4st$  de  $pp$  valeur de  $ss + 2ts + tt$ , on formera enfin cette égalité  $ss - 2st + tt = pp - 4xx$ , & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, on aura  $s-t = \sqrt{pp - 4xx} = \frac{4y\sqrt{ax+yy}}{a}$  en mettant pour  $p$  la valeur  $2x + \frac{yy}{a}$ .

Si l'on met à present à la place de  $s+t$ ,  $st$ , &  $s-t$ , leurs valeurs  $2x + \frac{yy}{a}$ ,  $xx$ , &  $\frac{4y\sqrt{ax+yy}}{a}$  dans  $\frac{sx + tx - ss - xx - yy}{s-t}$ , on trouvera  $PN = \frac{4xy - ay}{4\sqrt{ax+yy}}$ . Or si

Lij

l'on prend sur l'axe la partie  $NQ$  égale au parametre  $AV(a)$ , & qu'on tire  $QT$  parallele à  $PM$ , & qui rencontre en  $T$  la droite  $MN$  prolongée autant qu'il sera nécessaire; il est visible que la ligne  $QT$  sera donnée, puisque dans le triangle rectangle  $NQT$ , l'angle  $QNT$  qui est égal à l'angle donné  $BMC$  est donné, & que de plus le côté  $NQ$  qui est égal au parametre  $AV$  de l'axe de la Parabole, est aussi donné. Soit donc la donnée  $QT=b$ , & à cause des triangles semblables  $NPM$ ,  $NQT$ , on aura cette proportion,  $NP \left( \frac{4xy-ay}{4yy+ax} \right) : PM(y) :: a.b$ , & partant  $4a\sqrt{yy+ax}=4bx-ab$ , c'est à dire en ôtant les incommensurables  $yy - \frac{bb}{aa}xx + ax + \frac{bb}{2a}x - \frac{1}{16}bb=0$ , dont le lieu ( qui est celui qu'on cherche ) se construit \* en cette sorte.

\* Art. 330.  
 § 332.

Soit prise sur l'axe  $AD$  de la Parabole, la partie  $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$  du côté de  $PM$ ; & de part & d'autre du point  $H$  les parties  $HI$ ,  $HK$ , égales chacune à  $\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}$ ; & soit décrite du premier axe  $IK$  qui soit à son parametre  $KL$  comme  $aa$  est à  $bb$ , une Hyperbole  $KM$ . Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car  $HP = x - \frac{1}{4}a - \frac{a^3}{2bb}$ , & par la propriété de l'Hyperbole  $\overline{HP}^2 - \overline{HK}^2 (xx - \frac{1}{2}ax - \frac{a^3}{bb}x + \frac{1}{16}aa) . \overline{PM}^2 (yy) :: IK.KL :: aa.bb$ ; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, l'équation précédente.

Il est à propos de remarquer que dans ce cas  $FN$  sera toujours moindre que  $FP$ ; puisque l'angle  $FNM$ , qu'on a pris égal au complement à deux droits de l'angle donné, est obtus. C'est pourquoi  $\frac{4xy-ay}{4yy+ax}$  valeur de  $FP-FN$  doit être positive; & par conséquent  $x$  doit toujours surpasser  $\frac{1}{4}a$ . D'où l'on voit que quoiqu'il y ait



une portion de l'Hyperbole opposée à  $KM$  qui soit renfermée dans l'angle  $PAV$  fait par la ligne  $AP$  & par la droite  $AV$  menée parallèlement à  $PM$  & du même côté, elle ne peut pas néanmoins faire partie du lieu des points  $M$ ; parce que  $AI$  étant moindre que  $\frac{1}{4}a$ , l'indéterminée  $AP$  qui seroit alors moindre que  $AI$ , seroit à plus forte raison moindre que  $\frac{1}{4}a$ .

*Second cas.* Lorsque l'angle donné est obtus. En supposant que les points  $M$  tombent dans l'angle  $PAV$ , & par un raisonnement semblable à celui du premier cas, on trouvera la même équation; & par conséquent la construction du lieu demeurera la même. Mais il faut observer dans ce second cas que  $FN$  sera plus grande que  $FP$ , & qu'ainsi la valeur  $\frac{4xy - ay}{4yy + ax}$  de  $FP - FN$  deviendra négative; d'où il suit que  $x$  sera toujours moindre que  $\frac{1}{4}a$ , & partant que le lieu cherché sera alors la portion de l'Hyperbole qui s'étend du même côté de la Parabole, laquelle se trouve renfermée dans cet angle  $PAV$ . Et comme en supposant que les points  $M$  tombent dans l'angle  $DAV$ , on trouve encore la même équation, il s'ensuit que cette Hyperbole entière sera le lieu de tous les points cherchés  $M$ .

De là il est évident que si une Hyperbole  $KM$  est le lieu de tous les points  $M$  lorsque l'angle donné  $BMC$  est aigu, son opposée sera le lieu de tous ces points lorsque l'angle donné sera égal au complément à deux droits de l'angle  $BMC$ , parce qu'alors les lignes données  $a$  &  $b$  qui déterminent la construction des Hyperboles demeurent les mêmes.

*Troisième cas.* Lorsque l'angle donné est droit. Il est Fig. 196. clair que  $FN$  est alors égale à  $FP$ , & qu'ainsi la valeur 197.

$\frac{4xy - ay}{4yy + ax}$  de  $FP - FN$  sera nulle ou zéro. D'où l'on

voit \* que si l'on prend sur l'axe  $AD$  prolongé vers son \* Art. 306. origine  $A$  la partie  $AP = \frac{1}{4}a$ , & qu'on lui mene la perpendiculaire indéfinie  $PM$ ; cette ligne qui n'est autre

que la directrice comme l'on peut voir dans les définitions de la Parabole, sera le lieu cherché.

## COROLLAIRE.

FIG. 196. 197. 359. Si l'on mène le demi-second axe  $HO$ , & qu'on tire l'hypothénuse  $KO$ ; les triangles rectangles  $KHO$ ,  $NQT$  seront semblables: car puisque le second axe est moyen proportionnel entre le premier  $IK$  & son paramètre  $KL$ , il s'ensuit que  $\overline{KH} \cdot \overline{HO} :: IK \cdot KL :: aa \cdot bb$ , & qu'ainsi  $KH \cdot HO :: NQ(a) \cdot QT(b)$ . L'angle  $HKO$  (qui selon la définition 11. du 3. Livre, est égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole  $KM$ ) sera donc égal à l'angle  $QNT$ , c'est à dire, à l'angle donné  $BMC$ ; & on aura  $NQ(a) \cdot QT(b) :: KH \left( \frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb} \right) \cdot HO = \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}$ ; &  $NQ(a) \cdot QT(b) :: KH \left( \frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb} \right) \cdot HO = \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}$ ; &  $NQ(a) \cdot QT(b) :: KH \left( \frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb} \right) \cdot HO = \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}$ .

$$NT(\sqrt{aa+bb}) :: KH \left( \frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb} \right) \cdot KO = \frac{a^3+abb}{2bb}.$$

Or si l'on pose l'hypothénuse  $KO$  du triangle rectangle  $KHO$  fait par les deux demi-axes  $HK$ ,  $HO$ , sur le premier axe  $IK$  depuis le centre  $H$ , en  $R$  &  $S$ ; il est clair \* que ces deux points seront les deux foyers de l'Hyperbole  $KM$  & de son opposée; & que  $RA = \frac{1}{4}a$ , puisque  $HR = \frac{a^3+abb}{2bb}$  &  $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$ . D'où l'on voit que le foyer  $R$  de l'Hyperbole  $KM$  est encore le

\* Def. 3. 4. 5. foyer \* de la Parabole  $BAC$ , & que  $SR \left( \frac{a^3+abb}{bb} \right)$ .

$HO \left( \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b} \right) :: HO \left( \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b} \right) \cdot AR \left( \frac{1}{4}a \right)$ , puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Ce qui donne lieu à ce Theorème.

FIG. 196. Si sur la distance  $SR$  des foyers d'une Hyperbole  $KM$ , on prend du côté de  $S$ , la partie  $RA$  troisième proportionnelle à cette distance  $SR$ , & à la moitié  $HO$  de son second axe; & qu'ayant décrit \* une Parabole  $BAC$  qui ait pour foyer le point  $R$ , & pour axe la li-

\* Art. 4.

gne  $AR$  dont l'origine soit en  $A$ , on tire d'un point quelconque  $M$  de l'Hyperbole  $KM$  deux tangentes  $MB, MC$ , à cette Parabole: je dis que l'angle  $BMC$  qu'elles comprennent, sera toujours égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes; & que si l'on prend le point  $M$  sur l'Hyperbole opposée, l'angle compris par les tangentes, sera toujours égal au complément à deux droits de la moitié de l'angle fait par les Asymptotes.

## EXEMPLE VIII.

360. UNE ligne droite indéfinie  $B\overset{\curvearrowright}{A}P$  étant don- FIG. 198.  
née de position sur un plan avec deux points fixes  $A, D$ , l'un sur cette ligne & l'autre au dehors; on demande le lieu de tous les points  $M$ , dont la propriété soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points aux deux points fixes  $A, D$ , les droites  $MA, MD$ : la ligne  $AM$  soit toujours égale à la partie  $ME$  de l'autre droite  $DM$ , prise entre le point  $M$  & le point  $E$  où elle rencontre la ligne  $MP$ .

Du point donné  $D$  & du point  $M$  que l'on suppose être l'un des points cherchés, ayant mené les perpendiculaires  $BD, MP$ , sur la ligne  $AP$ , on nommera les données  $AB, 2a$ ;  $BD, 2b$ ; & les inconnues & indéterminées  $AP, x$ ;  $PM, y$ : & on aura  $AP = PE$ ; puis- que (*hyp.*)  $AM = ME$ . Or les triangles semblables  $EBD, EPM$ , donnent  $EB$  ou  $AE - AB (2x - 2a)$ .  $BD (2b) :: EP (x)$ .  $PM (y)$ . En multipliant donc les extrêmes & les moyens, on formera cette équation  $xy - ay = bx$ , qui renferme la condition marquée dans le Problème, & dont le lieu qui est \* une Hyperbole \* Art. 337.  
équilatère entre les Asymptotes se construit ainsi.

Soit tirée la ligne  $AD$  que l'on divisera par le milieu en  $C$ , par où l'on menera les droites  $CF, CG$ , l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à  $AP$ : soient décrites entre les Asymptotes  $CF, CG$ , indéfiniment prolongées de part & d'autre du point  $C$ , par les points  $D, A$ , \* Art. 130.  
131.

\* Def. 16.  
III.

les deux Hyperboles opposées  $DM$ ,  $AM$ , qui sont \* équilatères. Je dis qu'elles seront le lieu complet de tous les points cherchés  $M$ .

Car les Asymptotes  $CF$ ,  $CG$ , divisent les droites  $AB$ ,  $BD$  en deux parties égales aux points  $L$ ,  $K$ , puisque  $AD$  est divisée par le milieu en  $C$ ; & partant lorsque les points  $P$  tombent sur  $AB$  prolongée indéfiniment du côté de  $B$ , comme l'on vient de supposer en faisant le calcul, la ligne  $PL$  ou  $CH = x - a$ ,  $HM = y - b$ ;  
\* Art. 199. & par la propriété \* de l'Hyperbole  $CH \times HM$  ( $xy - ay - bx + ab$ )  $= CK \times KD$  ( $ab$ ): ce qui donne  $xy - ay = bx$ .

Si l'on suppose à présent que les points  $P$  tombent sur  $BA$  indéfiniment prolongée du côté de  $A$ , ou sur la partie déterminée  $AB$ ; on trouvera toujours (en observant de faire  $AP = -x$ , &  $PM = -y$  lorsqu'ils tombent de l'autre côté du point  $A$  & de la ligne  $AP$ ) la même équation  $xy - ay = bx$ , tant par la condition marquée dans le Problème que par la propriété de l'Hyperbole  $AM$  ou  $DM$ . Donc &c,

#### COROLLAIRE.

361. DE-LA il est évident que les parties  $MR$ ,  $MS$  des deux droites  $AM$ ,  $DM$ , comprises entre le point  $M$  & l'une ou l'autre des Asymptotes, sont égales entr'elles. Car 1°. Lorsque l'Asymptote, comme  $CF$ , est parallèle à la ligne  $AP$ , l'angle  $RS M$  est égal à l'angle  $AEM$ , & l'angle  $SR M$  à l'angle  $MAE$ . 2°. Lorsque l'Asymptote, comme  $CG$ , est perpendiculaire à  $AP$ , l'angle  $RS M$  sera le complément à un droit de l'angle  $AEM$  à cause du triangle rectangle  $SLE$ , & de même l'angle  $SR M$  ou son opposé au sommet  $ARL$  est le complément à un droit de l'angle  $EAM$  à cause du triangle rectangle  $RAL$ . Donc puisque les angles  $EAM$ ,  $AEM$ , sont égaux, il s'ensuit que le triangle  $RMS$  sera isoscèle, & qu'ainsi les côtés  $MR$ ,  $MS$ , seront égaux entr'eux.

entr'eux. Ce Corollaire nous fournit le Theorème suivant.

Si l'on mene d'un point quelconque  $M$  d'une Hyperbole équilatere, deux droites  $MD$ ,  $MA$ , aux extremi-  
rés d'un de ses premiers diametres  $AD$ , lesquelles ren-  
contrent l'une ou l'autre Asymptote aux points,  $R$ ,  $S$ : je  
dis que les parties  $MR$ ,  $MS$ , de ces deux droites se-  
ront égales entr'elles.

## EXEMPLE IX.

362. DEUX cercles  $EGF$ ,  $BNO$ , dont les centres Fig. 199.  
sont  $C$ ,  $A$ , étant donnés, & ayant mené par un point quel-  
conque  $G$  du cercle  $EGF$  une tangente indéfinie  $GNO$   
qui coupe l'autre cercle  $BNO$  en deux points  $N$ ,  $O$ , par  
lesquels soient tirées les tangentes  $NM$ ,  $OM$ ; on de-  
mande le lieu de tous les points de concours  $M$ .

Ayant tiré  $MP$  perpendiculaire sur  $CA$ , qui passe  
par les centres  $C$ ,  $A$ , des cercles donnés; on menera les  
droites  $CG$ ,  $AM$ , qui seront parallèles, puisque l'une  
& l'autre est perpendiculaire sur la même droite  $GO$   
qu'elles rencontrent aux points  $G$ ,  $Q$ ; & on nommera  
les données  $AB$  ou  $AO$ ,  $a$ ;  $CE$  ou  $CF$  ou  $CG$ ,  $b$ ;  
 $CA$ ,  $c$ ; & les inconnues & indéterminées  $AP$ ,  $x$ ;  
 $PM$ ,  $y$ . Cela fait, les triangles rectangles semblables  
 $AOM$ ,  $AQO$ , donneront  $AM(\sqrt{xx+yy})$ .  $AO(a)::$   
 $AO(a)$ .  $AQ = \frac{a^2}{\sqrt{xx+yy}}$ . Et menant  $CH$  parallèle à

$GO$ , qui rencontre en  $H$ ,  $MA$  prolongée, s'il est necessai-  
re, on aura à cause des triangles rectangles sembla-  
bles  $MAP$ ,  $CAH$ , cette proportion:  $PA(x)$ .  $AM$   
 $(\sqrt{xx+yy})::AH$  ou  $CG-AQ(b - \frac{a^2}{\sqrt{xx+yy}})$ .  $AC(c)$ ;

ce qui donne  $b\sqrt{xx+yy} = aa - \frac{a^2}{\sqrt{xx+yy}}$ , c'est à dire, en

ôtant les incommensurables, l'équation  $yy + \frac{bb-cc}{bb}xx$   
 $-\frac{2aac}{bb}x - \frac{a^2}{bb} = 0$ , dont le lieu est \* une Parabole, une \* Art. 345.

Ellipse, ou une Hyperbole selon que  $CE(b)$  est égale,

plus grande, ou moindre que  $CA(c)$ . Voici la construction du dernier cas.

Soit prise sur la ligne  $AP$  la partie  $AR = \frac{aac}{a-bb}$  du côté opposé à  $PM$ ; & de part & d'autre du point  $R$  les parties  $RI$ ,  $RK$ , égales chacune à  $\frac{aab}{a-bb}$ ; & soit décrite du premier axe  $IK$  qui ait pour paramètre  $KL = \frac{aac}{b}$  une Hyperbole. Je dis que la portion indéfinie  $DM$  renfermée dans l'angle  $PAD$  fait par la ligne  $AP$  & par la droite  $AD$  menée parallèlement à  $PM$  & du même côté, sera le lieu de cette équation.

Car par la propriété de l'Hyperbole,  $\overline{RP}^2 - \overline{RI}^2 = \left(\frac{a^4 + 1.2aac}{a-bb} + xx\right) \cdot \overline{PM}^2 (yy) :: IK \left(\frac{aab}{a-bb}\right) \cdot KL \left(\frac{aac}{b}\right)$ , ce qui redonne l'équation précédente.

Si l'on suppose à présent que les points  $M$  tombent dans l'angle  $KAD$  qui est à côté de l'angle  $PAD$ , on trouvera encore (en faisant  $AP = -x$ ) la même équation; d'où il suit que la portion déterminée  $ID$  de l'Hyperbole  $IM$ , avec la moitié entière de l'Hyperbole qui lui est opposée sera le lieu de ces points, & qu'ainsi ces deux Hyperboles opposées composent le lieu complet de tous les points cherchés  $M$ : où l'on doit observer que la portion  $SIT$  renfermée dans le cercle  $BNQ$  est inutile, puisqu'aucun des points de concours  $M$  des deux tangentes  $NO$ ,  $OM$ , à ce cercle, ne peuvent tomber au dedans.

Il est à propos de remarquer que  $RA \left(\frac{aac}{a-bb}\right)$

$= \sqrt{KK^2 + \frac{1}{4} IK \times KL}$ , comme l'on voit en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques; & qu'ainsi puisque le rectangle  $IK \times KL$  vaut le carré de la moitié du second axe, le point  $A$  sera \* l'un des foyers de l'Hyperbole  $IM$ . Or puisque  $AI$  ou  $AR - RI$

\* Art. 74.

$= \frac{aac - aab}{a - bb} = \frac{aa}{c + b}$ , &  $AK = AR + RK = \frac{aac + aab}{a - bb} = \frac{aa}{c - b}$ , il s'ensuit qu'on peut abréger la construction

précédente en cette sorte.

Soient prises sur la ligne  $AC$  du côté de  $C$ , les parties  $AI$ ,  $AK$ , troisièmes proportionnelles à  $AF(c+b)$ ,  $AB(a)$ , & à  $AE(c-b)$ ,  $AB(a)$ , & soient décrites du premier axe  $IK$ , & du foyer  $A$  deux Hyperboles \* Art. 76. opposées. Il est évident qu'elles seront le lieu de tous les points cherchés,  $M$ .

Lorsque  $CE(b)$  est plus grande que  $CA(c)$ , la construction de l'Ellipse qui est le lieu des points cherchés  $M$ , se fera de la même manière que pour l'Hyperbole, en observant de prendre la partie  $AK$  de l'autre côté du point  $A$  par rapport au point  $C$ . Et enfin lorsque  $CE(b) = CA(c)$ , il n'y aura qu'à prendre sur la ligne  $AC$  du côté de  $C$ , la partie  $AI$  troisième proportionnelle à  $AF$ ,  $AB$ , & décrire ensuite une Parabole qui ait pour foyer le point  $A$ , & pour axe la ligne  $IA$  dont l'origine soit en  $I$ . FIG. 199.

#### COROLLAIRE I. POUR L'ELLIPSE & LES HYPERBOLES OPPOSEES.

363. **D**ELA il est évident que si de l'un des foyers  $A$  d'une Ellipse ou de deux Hyperboles opposées, dont le premier axe est  $IK$ , on décrit un cercle quelconque  $BNO$ ; & qu'ayant pris sur cet axe les parties  $AE$ ,  $AF$ , troisièmes proportionnelles à  $AK$ ,  $AB$ , & à  $AI$ ,  $AB$ , (sçavoir  $AE$  du côté du point  $K$ , &  $AF$  du côté du point  $I$ ), on décrive du diamètre  $EF$  un cercle  $EGF$ : il est évident, dis-je, que si l'on tire d'un point quelconque  $M$  de la Section, deux tangentes  $MN$ ,  $MO$ , au cercle  $BNO$ , la ligne  $ON$  qui joint les points touchans étant prolongée, s'il est nécessaire, touchera toujours l'autre cercle  $EGF$ . FIG. 199.

#### COROLLAIRE II. POUR LA PARABOLE.

364. **I**L suit encore de la résolution de ce Problème, que si du foyer  $A$  d'une Parabole  $IM$  dont l'axe  $IA$  a FIG. 200.  
M m ij

son origine en  $I$ , on décrit un cercle quelconque  $BNO$ ; & qu'ayant pris sur l'axe du côté de son origine, la partie  $AF$  troisième proportionnelle à  $AI$ ,  $AB$ , on décrit un cercle  $AGF$  du diamètre  $AF$ ; & qu'enfin l'on tire d'un point quelconque  $M$  de la Parabole deux tangentes  $MN$ ,  $MO$ , au cercle  $BNO$ : la ligne  $NO$  qui joint les points touchans, étant prolongée, s'il est nécessaire, touchera toujours le cercle  $AGF$  en un point  $G$ .

## EXEMPLE X.

FIG. 202.  
202. 203.

365. UNE ligne droite indéfinie  $AP$  étant donnée sur un plan, avec un point fixe  $F$  hors d'elle; trouver le lieu de tous les points  $M$ , dont la propriété soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points une perpendiculaire  $MP$  sur  $AP$ , & au point  $F$  une ligne droite  $MF$ ; la raison de  $MP$  à  $MF$  soit toujours la même, que celle de la donnée  $a$  à la donnée  $b$ .

Ayant mené du point donné  $F$  sur la ligne  $AP$  la perpendiculaire  $FA$ , & du point  $M$  que l'on suppose être l'un des cherchés, une parallèle  $MQ$  à  $AP$ , on nommera la donnée  $AF$ ,  $c$ ; & les inconnues & indéterminées  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; qui font entr'elles un angle droit  $APM$ . Cela posé, le triangle rectangle  $MQF$  donne  $\overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2 (cc - 2cy + yy) + \overline{MQ}^2 (xx)$ , & à cause de la condition marquée dans le Problème on aura  $\overline{MP}^2 (yy) : \overline{MF}^2 (cc - 2cy + yy + xx) :: a a . b b$ ; d'où (en multipliant les moyens & les extrêmes) on tire cette équation  $a a y y - b b y y - 2 a a c y + a a x x + a a c c = 0$ , dont il s'agit maintenant de construire le lieu. Pour en venir à bout, il faut distinguer trois différens cas selon que  $a$  est plus grand, moindre, ou égal à  $b$ .

Premier cas. En divisant par  $a a - b b$ , on trouve cette équation  $y y - \frac{2 a a c}{a a - b b} y + \frac{a a}{a a - b b} x x + \frac{a a c c}{a a - b b} = 0$ , dont le lieu est une Ellipse \* que l'on construit en cette sorte.

\* Art. 324.



Soit prise sur  $AF$  du côté de  $F$ , la partie  $AC = \frac{acc}{aa-bb}$ ; FIG. 201.  
 & ayant mené par le point  $C$  une parallèle  $KH$  à  $AP$ ,  
 soient prises sur cette ligne de part & d'autre du point  
 $C$ , les parties  $CH$ ,  $CK$ , égales chacune à  $\sqrt{\frac{bbcc}{aa-bb}}$ . En-  
 suite de l'axe  $KH$  qui soit à son parametre  $KL$  comme  
 $aa-bb$  est à  $aa$ , soit décrite une Ellipse. Je dis qu'elle  
 sera le lieu de l'équation précédente, & par conséquent  
 de tous les points cherchés  $M$ .

Car par la propriété de l'Ellipse,  $KE \times EH$  ou  $\overline{CH}^2$   
 $= \overline{CE}^2 \left( \frac{bbcc}{aa-bb} - xx \right) \cdot \overline{EM}^2 \left( \frac{a^4cc}{aa-bb^2} - \frac{2accy}{aa-bb} + yy \right) : :$   
 $KH. KL :: aa-bb. aa$ ; ce qui, en multipliant les ex-  
 trêmes & les moyens, rend la même équation que ci-  
 dessus.

Puisque  $\overline{CH}^2. \overline{CB}^2 :: KH. KL :: aa-bb. aa$ , il  
 s'ensuit que le demi-axe  $CB$  ou  $CD = \frac{abc}{aa-bb}$ ; & qu'ainsi  
 $DF$  ou  $DC + CF = \frac{abc+bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a-b}$ , &  $FB$  ou  $CB - CF$   
 $= \frac{abc-bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a+b}$ . Donc  $DF \times FB = \frac{bbcc}{aa-bb} = \overline{CH}^2$ ; &  
 partant le point  $F$  est \* l'un des foyers de cette Ellipse \* Art. 35.  
 qui a pour grand axe la ligne  $BD$ . Ces remarques nous  
 fournissent une construction beaucoup plus simple que  
 la précédente : La voici.

Soient prises sur  $FA$  du côté de  $A$  la partie  $FB$   
 $= \frac{bc}{a+b}$ , & du côté opposé la partie  $FD = \frac{bc}{a-b}$ . Ayant  
 pris  $DG$  égal à  $BF$  du côté de  $F$ ; soit décrite des foyers  
 $F, G$ , & de l'axe  $BD$  \* une Ellipse; il est évident qu'elle \* Art. 36.  
 satisfera à la question.

*Second cas.* On aura dans ce cas  $yy + \frac{2acc}{bb-aa}y - \frac{aa}{bb-aa}xx$   
 $= \frac{acc}{bb-aa} = 0$ , parce que  $a$  est moindre que  $b$ . Le lieu  
 de cette équation sera deux Hyperboles opposées, que  
 l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.) Après

FIG. 201. avoir fait les mêmes remarques, que dans le cas précédent, on trouvera cette construction.

FIG. 202. Soient prises sur  $FA$  du côté du point  $A$  les parties  $FB = \frac{bc}{b+a}$ ,  $FD = \frac{bc}{b-a}$ . Ayant pris  $DG$  égal à  $BF$

\* Art. 76. du côté opposé au point  $F$ , soient \* décrites des foyers  $F, G$ , & du premier axe  $BD$ , deux Hyperboles opposées  $BM, DM$ . Elles seront le lieu de tous les points cherchés  $M$ .

FIG. 203. Troisième cas. L'équation generale  $aayy - bbyy - 2aaxy + aaxx + 2acx = 0$  se changeant en cette autre  $xx - 2cy + cc = 0$ , parce que  $a = b$ , son lieu est une Parabole qu'il est facile de construire selon l'article 310. (Liv. 7.) mais on voit tout d'un coup & sans avoir besoin d'aucun calcul, que si l'on décrit une Parabole qui ait pour directrice la ligne  $AP$ , & pour foyer le point  $F$ , selon qu'il est enseigné dans la définition première du premier Livre, elle sera le lieu requis.

COROLLAIRE. I.

366. IL est clair dans le premier cas, que  $CF \left( \frac{bbc}{aa-bb} \right) : CB \left( \frac{abc}{aa-bb} \right) :: CB \left( \frac{abc}{aa-bb} \right) : CA \left( \frac{aac}{aa-bb} \right) :: a. b$ ; & l'on trouve la même chose dans le second cas: ce qui donne lieu à ce Theorème.

FIG. 201. 202. Si dans une Ellipse ou deux Hyperboles opposées qui ont pour centre le point  $C$ , pour foyers les deux points  $F, G$ , & pour premier axe la ligne  $BD$ , on prend  $CA$  troisième proportionnelle à  $CF, CB$ , du côté du foyer  $F$ ; & qu'on mene la droite indéfinie  $AP$  perpendiculaire sur  $BD$ : je dis que si d'un point quelconque  $M$  de la Section, l'on tire sur  $AP$  la perpendiculaire  $MP$ , & au foyer  $F$  la droite  $MF$ ; la raison de  $MP$  à  $MF$ , sera toujours la même que du premier axe  $BD$  à la distance  $FG$  des foyers.

Dans les Corollaires suivans cette ligne droite indéfinie  $AP$  s'appellera *Directrice* à l'égard de ces deux

Sections; aussi-bien qu'à l'égard de la Parabole. D'où l'on voit qu'il est facile de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné  $F$ , pour directrice une ligne donnée de position  $AP$ , & qui passe par un point donné  $M$ ; car tirant au foyer  $F$  la ligne  $MF$ , & sur la directrice  $AP$  la perpendiculaire  $MP$ , & nommant les données  $MP$ ,  $a$ ;  $MF$ ,  $b$ ; il n'y aura qu'à décrire le lieu des points  $M$  tels que  $MP$  soit toujours à  $MF$  comme  $a$  est à  $b$ .

## COROLLAIRE II.

367. Si l'on joint deux points quelconques  $M$ ,  $N$ , d'une Section conique, par une ligne droite qui rencontre la directrice en  $C$ ; & que du foyer  $F$ , on tire les droites  $FM$ ,  $FN$ ,  $FC$ : je dis que la ligne  $FC$  coupe en deux parties égales l'angle  $NFH$  complément à deux droits de l'angle  $NFM$ , lorsque les points  $M$ ,  $N$ , tombent sur une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole; & l'angle  $NFM$ , lorsqu'ils tombent sur deux Hyperboles opposées. Fig. 204.  
205.

Car tirant les perpendiculaires  $MP$ ,  $NQ$ , sur la directrice, & la ligne  $ND$  parallèle à  $MF$ ; les triangles semblables  $MPC$ ,  $NQC$ , &  $MFC$ ,  $NDC$ , donnent  $MP. NQ :: MC. NC :: MF. ND$ . Et partant  $MP. MF :: NQ. ND$ . Or par la propriété de la Section conique qui a pour directrice la ligne  $PQ$ , & pour foyer le point  $F$ , on aura  $MP. MF :: NQ. NF$ . Les lignes  $ND$ ,  $NF$ , seront donc égales entr'elles; c'est pourquoi dans le premier cas l'angle  $NDF$  ou  $CFH$  sera égal à l'angle  $CFN$ , & dans le second l'angle  $FDN$  ou  $CFM$  sera égal à l'angle  $CFN$ . Ce qu'il falloit prouver.

## COROLLAIRE III.

368. DE LA on voit comment on peut décrire une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole qui passe par trois Fig. 204.

points donnés  $M, N, O$ , & qui ait pour foyer le point donné  $F$ .

Soient menées par le foyer  $F$ , les droites  $FC, FE$ , qui divisent par le milieu les angles  $NFH, NFK$ , compléments à deux droits des angles donnés  $MFN, OFN$ ; & par les points  $C, E$ , où elles rencontrent les lignes  $MN, ON$ , qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie  $CE$ . Soit décrite une Section conique qui ait pour directrice la ligne  $CE$ , pour foyer le point  $F$ , & qui passe par le point  $M$ : il est clair selon le Corollaire précédent qu'elle passera aussi par les deux autres points  $N, O$ .

#### COROLLAIRE IV.

**FIG. 205.** 369. ON tire encore du Corollaire second une manière de décrire deux Hyperboles opposées qui aient pour foyer le point  $F$ ; & dont l'une d'elles passe par deux points donnés  $M, O$ , & l'autre par un point donné  $N$ .

Soit menée par le point  $F$  la ligne  $FE$  qui divise par le milieu l'angle  $HFO$  complément à deux droits de l'angle  $MFO$  formé par les droites  $FM, FO$ , tirées du point  $F$  aux deux points  $M, O$ , qui doivent se trouver dans la même Hyperbole; & soit encore menée par le même point  $F$  la ligne  $FC$ , qui divise en deux parties égales l'angle  $MFN$  formé par les droites  $FM, FN$ , tirées du point  $F$  aux deux points  $M, N$ , qui doivent tomber sur les deux Hyperboles opposées. Par les points  $E, C$ , où les lignes  $FE, FC$ , rencontrent les droites  $MO, MN$ , qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie  $EC$ . Soient enfin décrites deux Hyperboles opposées, qui aient pour foyer le point  $F$ , pour directrice la ligne  $EC$ , & dont l'une d'elles passe par le point  $M$ : il est évident qu'elles satisfont à la question.

#### COROL. V.

## COROLLAIRE V.

370. **L**ES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire second ; il est visible que l'angle  $MFN$  différence de l'angle  $CFM$  & de son complément à deux droits  $CFH$  ou  $CFN$ , diminué à mesure que le point  $N$  approche du point  $M$  ; de sorte qu'il s'évanouit tout-à-fait, lorsque le point  $N$  tombe sur le point  $M$ . L'angle  $CFM$  sera donc égal alors à son complément à deux droits, & par conséquent il sera droit. Or comme la ligne  $MN$  devient alors la tangente  $MT$ , puisqu'elle passe \* par deux points infiniment proches de la courbe ; on voit naître une manière générale & toute nouvelle de mener d'un point donné  $M$  sur une Section conique, une tangente  $MT$ , un foyer  $F$  avec l'axe qui passe par ce foyer étant donnés. Fig. 204. \* Art. 182.

Car ayant trouvé la directrice comme il est enseigné dans le Corollaire second, on menera du point donné  $M$  au foyer  $F$  la droite  $MF$ , sur laquelle on tirera la perpendiculaire  $FT$  qui rencontre la directrice en  $T$ , par où & par le point donné  $M$  on tirera la tangente cherchée  $MT$ .

## EXEMPLE XI.

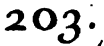
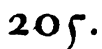
371. **D**eux angles  $KAM$ ,  $KBM$ , mobiles autour des points fixes  $A$ ,  $B$ , étant donnés sur un plan, avec une ligne droite indéfinie  $FK$  qui ne passe par aucun de ces points ; soit imaginé le point de concours  $K$  des deux côtés  $AK$ ,  $BK$ , se mouvoir le long de la droite  $FK$ , & soit proposé de trouver la nature de la ligne courbe que décrit dans ce mouvement le concours  $M$  des deux autres côtés  $AM$ ,  $BM$ , prolongés lorsqu'il est nécessaire de l'autre côté des points  $A$ ,  $B$ . Fig. 206.

Sur  $AB$  comme corde, je décris de l'autre côté du point  $M$ , un arc de cercle capable d'un angle  $BDA$  qui vaille quatre droits moins les deux angles donnés  $KAM$ ,  $KBM$  ; & ayant achevé le cercle entier dont

cet arc fait partie, il peut arriver que la droite indéfinie  $FK$  tombe toute entière au dehors de ce cercle, ou qu'elle passe au dedans, ou enfin qu'elle le touche; ce qui fait trois différens cas que j'explique en particulier.

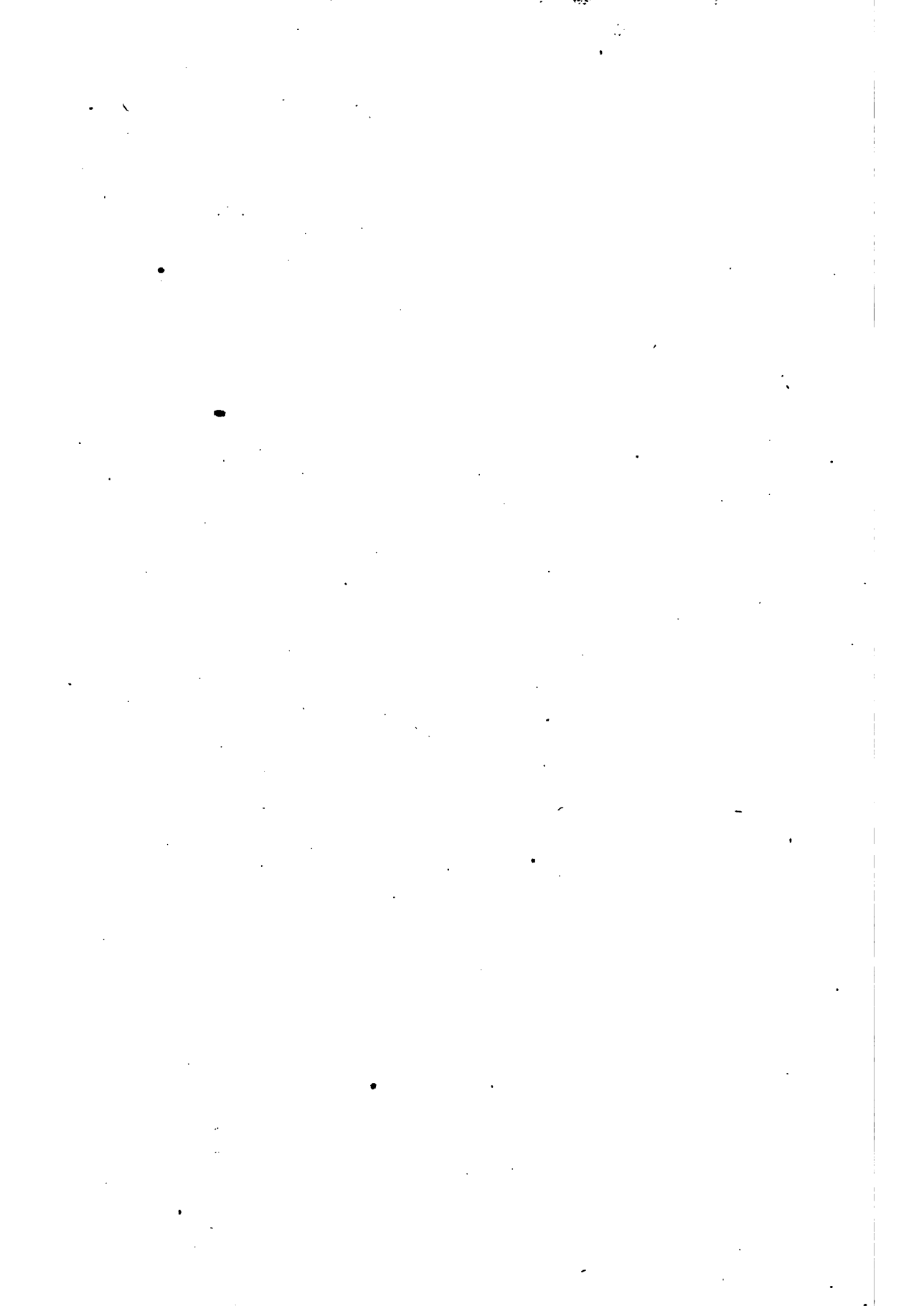
*Premier cas.* Du centre  $C$  du cercle  $BDAE$  je mene sur  $FK$ , la perpendiculaire  $CF$  qui le rencontre aux points  $D, E$ ; & je fais passer par le point  $D$  (plus proche de la ligne  $FK$  que l'autre point  $E$ ) les deux côtés  $DA, DB$ , des deux angles  $DAP, DBQ$ , égaux aux angles  $KAM, KBM$ , lesquels côtés étant prolongés vers  $D$  rencontrent la ligne  $FK$  aux points  $G, H$ . Or par la construction l'angle  $BDA$  plus les deux angles  $DAP, DBQ$ , vaut quatre droits; & comme le même angle  $BDA$  plus les deux angles  $DAB, DBA$ , vaut deux droits; il s'ensuit que les angles  $BAP, ABQ$ , valent deux droits, & qu'ainsi les lignes  $AP, BQ$ , sont paralleles entr'elles. Cela posé.

Soit mené du point  $K$  sur les deux côtés  $AD, BD$ , les perpendiculaires  $KR, KS$ ; & des points  $A, M$ , sur les deux autres côtés  $BQ, AP$ , les perpendiculaires  $AI, MP$ , qui rencontrent  $BQ$ , aux points  $I, Q$ . Soient les données  $FE=a, FD=b, BI=c, AI=d, FG=g, FH=h, DG=m, DH=n$ ; & les inconnues  $FK=z, AP=x, PM=y$ ; & à cause des triangles rectangles semblables,  $GDF, GKR$ , on aura ces deux proportions:  $GD(m).GF(g)::GK(z-g).GR=\frac{z-g}{m}$ . Et  $GD(m).DF(b)::GK(z-g).KR=\frac{bz-bg}{m}$ . Or les triangles rectangles semblables  $GDF, EDA$ , donnent aussi  $GD(m).DF(b)::ED(a-b).AD=\frac{ab-bb}{m}$ , & partant  $AD+DG$  ou  $AG=\frac{ab-bb+mm}{m}$ , &  $AG+GR$  ou  $AR=\frac{ab-bb+mm+gz-gg}{m}=\frac{ab+gz}{m}$ ; parce  $mm=bb+gg$  à cause du triangle rectangle  $DFG$ . Mais les triangles rectangles  $ARK, APM$  sont semblables,



*Planche 21. pag. 282.*







car retranchant des angles égaux  $KAM$ ,  $DAP$  le même angle  $KAP$ , les restes  $KAR$ ,  $PAM$ , seront égaux ; & par conséquent  $AR \left( \frac{ab+gz}{m} \right) . RK \left( \frac{bx-bz}{m} \right) :: AP(x) . PM(y)$ , d'où l'on tire  $x = \frac{aby+bzn}{bx-zy}$ .

Maintenant les triangles rectangles semblables  $HDF$ ,  $HKS$  donnent  $HS = \frac{bx+bb}{n}$ ,  $KS = \frac{bx+bb}{n}$  ; & les triangles rectangles semblables  $HFD$ ,  $EBD$ , donnent  $DH(n) . DF(b) :: DE(a-b) . DB = \frac{ab-bb}{n}$ . Et partant  $BD + DH$  ou  $BH = \frac{ab-bb+nn}{n}$ , &  $BH-HS$  ou  $BS = \frac{ab-bb+nn-bx-bb}{n} = \frac{ab-bx}{n}$ , parce que  $nn = bb + bb$  à cause du triangle rectangle  $DFH$ . Or les triangles rectangles  $BSK$ ,  $BQM$ , sont semblables ; car retranchant des angles égaux  $DBQ$ ,  $KBM$ , le même angle  $DBM$ , les restes  $KBS$ ,  $MBQ$ , seront égaux ; & par conséquent  $BS \left( \frac{ab-bx}{n} \right) . SK \left( \frac{bx+bb}{n} \right) :: BQ(x-c) . QM(y+d)$ . D'où l'on tire  $x = \frac{aby-bbx+bbx+abd}{bx+by-bc+bd}$ .

Comparant cette dernière valeur de  $x$  avec la précédente, multipliant en croix, & faisant pour abréger  $GH(g+b)=f$ , on arrive enfin en divisant par  $abf$  à cette équation.

$$yy + dy + \frac{b}{a}xx - \frac{be}{a}x = 0$$

$$\begin{array}{cc} -\frac{be}{f} & -\frac{bd}{f} \\ +\frac{gb}{af} & +\frac{gd}{af} \end{array}$$

dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 324. (Liv. 7.) sera une Ellipse, parce que le terme  $\frac{b}{a}xx$  sera toujours précédé dans ce premier cas du signe  $+$ , en quelque situation que se puissent trouver les points  $A$ ,  $B$ ,  $K$ .

Second cas. Après avoir nommé les lignes par les Fac. 207.  
N n ij

mêmes lettres que dans le premier cas, & fait les mêmes raisonnemens; on arrivera à cette équation.

$$yy + dy - \frac{b}{a}xx + \frac{bc}{a}x = 0$$

$$-\frac{bc}{f} \qquad -\frac{bd}{f}$$

$$-\frac{cgb}{af} \qquad -\frac{dgb}{af}$$

qui ne diffère de la précédente que dans quelques signes, & dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.) sera toujours deux Hyperboles opposées, parce le terme  $\frac{b}{a}xx$  sera toujours précédé du signe — dans ce second cas.

Comme le plan  $xy$  ne se rencontre point dans les deux équations précédentes, & que l'angle  $APM$  est droit, on connoît d'abord que l'un des axes de l'Ellipse dans le premier cas, & des Hyperboles opposées dans le second doit être parallèle aux lignes  $AP$ ,  $BQ$ ; & qu'il a avec son parametre la même raison que  $EF(a)$  à  $FD(b)$ , parce que la fraction  $\frac{b}{a}$  qui multiplie le carré  $xx$  exprime ce rapport.

Lorsque le point  $K$  en parcourant la ligne indéfinie  $KF$  arrive au point  $O$  où cette ligne rencontre la circonférence, il est clair que les côtés  $AM$ ,  $BM$ , qui décrivent par leur point de concours  $M$  l'Hyperbole  $BAM$  deviennent parallèles entr'eux, qu'ils se coupent vers le côté opposé, pendant que le point  $K$  parcourt la partie  $OL$  de la ligne  $KF$  renfermée dans la circonférence; qu'ils deviennent encore parallèles, lorsque le point  $K$  tombe en  $Z$ , après quoi ils se rencontrent de nouveau vers le même côté. D'où l'on voit que le point  $M$  décrit l'Hyperbole  $BAM$ , pendant que le point  $K$  parcourt les deux parties indéfinies de la droite  $KF$  qui tombent de part & d'autre de la circonférence; & qu'il décrit son opposée, pendant que le point  $K$  parcourt la partie  $OL$  renfermée dans la circonférence.

FIG. 268. *Troisième cas.* Comme dans ce troisième cas la droite

indéfinie  $FK$  touche la circonférence du cercle  $BD\Delta E$  en quelque point  $F$ , il est clair que le point  $D$  des deux autres cas se confond ici avec le point  $F$ , & qu'ainsi les triangles  $DFG$ ,  $DFH$ , s'évanouissent : c'est pourquoi on se servira en leur place des triangles  $\Delta AE$ ,  $\Delta BE$ , de la manière qui suit.

Soient les données  $AE=a$ ,  $EB=b$ ,  $EF=m$ ,  $AF=g$ ,  $BF=h$ ,  $BI=c$ ,  $AI=d$ ; & les inconnues  $FK=z$ ,  $AP=x$ ,  $PM=y$ . Les triangles rectangles  $FKR$ ,  $EFA$  sont semblables; car l'angle  $KFR$  ou son opposé au sommet  $TEA$  fait par la tangente  $FT$  & la corde  $FA$ , a pour mesure la moitié de l'arc  $AF$ ; de même que l'angle  $FEA$ : & partant  $FE(m) \cdot EA(a) :: FK(z) \cdot FR = \frac{az}{m}$ . Et  $EF(m) \cdot FA(g) :: FK(z) \cdot KR = \frac{gz}{m}$ . Or les triangles rectangles semblables  $ARK$ ,  $APM$ , donnent  $AR$  ou  $AF + FR = \left(\frac{az+gm}{m}\right) \cdot RK\left(\frac{gz}{m}\right) :: AP(x) \cdot PM(y)$ ; d'où l'on tire  $z = \frac{gmy}{gx+ay}$ . On trouvera de même, à cause des triangles rectangles semblables  $EFB$ ,  $FKS$ , que  $FS = \frac{bz}{m}$ , &  $KS = \frac{hz}{m}$ ; & à cause des triangles rectangles semblables  $BSK$ ,  $BQM$ , que  $BS$  ou  $BF - FS = \left(\frac{bm-bz}{m}\right) \cdot SK\left(\frac{hz}{m}\right) :: BQ(x-c) \cdot QM(y+d)$ ; ce qui donne  $z = \frac{bmy+hd}{bx-ch+bd+by}$ .

Comparant ces deux valeurs de  $z$ , multipliant en croix, & mettant par ordre les termes, on trouve cette équation  $yy+dy - \frac{cgb}{ab+bg}y - \frac{dgb}{ab+bg}x = 0$ , dont le lieu sera toujours une Parabole que l'on peut construire selon l'article 310. (Liv. 7.) & qui aura son axe parallèle aux droites  $AP$ ,  $BQ$ .

Il est donc évident 1°. Que le lieu de tous les points cherchés  $M$  sera toujours une Section conique, dont l'axe ou l'un des axes sera parallèle aux lignes  $AP$ ,  $BQ$ ; & en particulier qu'il sera une Ellipse dans le premier

cas, deux Hyperboles opposées dans le second, & une Parabole dans le troisième; & que dans le premier & le second cas, l'axe qui est parallèle à  $AP$ , aura avec son parametre, la même raison que  $EF$  à  $FD$ . 1°. Que dans le premier & le troisième cas les deux points fixes  $A, B$ , autour desquels tournent les angles mobiles  $KAM, KBM$  tomberont toujours du même côté de la ligne  $FK$ , au lieu que dans le second ils peuvent tomber non-seulement du même côté de cette ligne, mais encore de part & d'autre; parce que la circonférence du cercle  $ADBE$  sur laquelle ils sont situés, est coupée alors en deux portions par la ligne  $FK$ .

## REMARQUE L.

FIG. 206.  
207. 208.

372. 1°. UNE ligne quelconque qui passe par l'un des points fixes  $A$  ou  $B$ , comme  $AM$ , étant donnée, on pourra toujours trouver sur cette ligne le point  $M$  où elle rencontre la Section qui est le lieu requis, en cette sorte. Ayant mené la droite  $AK$  qui fasse avec  $AM$  l'angle  $MAK$  égal à l'angle donné qui doit tourner autour du point fixe  $A$ , on menera du point  $K$  où elle rencontre la droite  $FK$ , par le point fixe  $B$ , l'angle  $KBM$  égal à l'autre angle donné, qui doit tourner autour de l'autre point fixe  $B$ ; & le point  $M$  où le côté  $BM$  de cet angle rencontre la ligne  $AM$ , sera celui qu'on cherche. 2°. Lorsque le point  $K$  en parcourant la ligne  $FK$ , se trouve tellement situé que le côté  $AM$  de l'angle  $KAM$  tombe sur la ligne  $AB$ ; il est visible que le point de concours  $M$  des deux côtés  $AM, BM$ , tombe alors sur le point  $B$ , & qu'ainsi le lieu des points  $M$  passe par le point fixe  $B$ ; on prouvera de même qu'il passe par le point  $A$ .

FIG. 206.

Delà on voit que pour décrire la Section conique qui est le lieu des points cherchés  $M$ , sans avoir besoin des équations précédentes, il n'y a qu'à mener comme dans l'exemple les droites  $AP, AI$ ; sur lesquelles ayant

trouvé, selon cette remarque, les points où elles rencontrent la Section, & achevé le rectangle qui a pour côtés ces deux lignes, il n'y aura qu'à décrire \* autour de ce rectangle, l'Ellipse ou les deux Hyperboles opposées (selon que  $FK$  tombe au dehors ou au dedans du cercle), dont l'axe qui est parallèle à  $AP$  soit à son conjugué, comme le quarré de  $EF$  est au quarré de  $DF$ . Si la Section est une Parabole (ce qui arrive lorsque la ligne  $KE$  touche le cercle  $BD A$ ); on trouvera sur la ligne  $AI$  le point où elle rencontre la Section, & on décrira selon l'article 170. (Liv. 4.) une Parabole qui passe par ce point, & par les deux autres donnés  $A, B$ ; & dont les diametres soient parallèles aux lignes  $AP, BQ$ .

\* Art. 176.

\* 178.

FIG. 108.

## REMARQUE II.

373. LORSQUE le point  $K$  en parcourant la ligne  $FK$ , est tellement situé que le côté  $AM$  de l'angle  $KAM$  tombe sur  $AB$ , il est clair non seulement que le point  $M$  tombe en  $B$ ; mais aussi que le côté  $BM$  de l'angle  $KBM$  devient tangente \* en  $B$  de la ligne courbe qui est le lieu du point  $M$ , puisque le point  $M$  peut être regardé alors comme étant infiniment près du point  $B$ . D'où il suit que pour mener une tangente de ce lieu en  $B$ , il n'y a qu'à mener par le point  $A$  une ligne droite  $AC$  qui fasse avec  $BA$  un angle  $BAC$  égal à l'angle donné  $KAM$ , & tirer ensuite une ligne  $BD$ , qui fasse avec  $BC$  l'angle  $CBD$  égal à l'autre angle donné  $KBM$ ; car le côté  $BM$  de cet angle, qui devient  $BD$ , touchera la Section en  $B$ . Il en est de même de l'autre point fixe  $A$ .

FIG. 109.

\* Art. 182.

Delà on tire encore une manière très-facile de décrire la Section conique qui est le lieu de tous les points  $M$  sans avoir besoin des équations précédentes, ni même d'aucun calcul. Ayant mené par le point fixe  $B$  une tangente  $BD$ , & par l'autre point fixe  $A$  une parallèle  $AE$  à cette tangente, on trouvera \* sur cette ligne le point  $E$  où elle rencontre la Section; & l'ayant divisée par le milieu en  $H$  on tirera  $BH$ , sur laquelle on cherchera \*

FIG. 209.

\* Art. 372.

\* Art. 372.

aussi le point  $G$  où elle rencontre la Section. Cela fait, \* Art. 162. on décrira \* du diametre  $BG$  & de l'ordonnée  $HA$  ou 161.  $HE$ , une Section conique qui sera celle qu'on demande. Car il est visible que la ligne  $BG$  qui divise par le milieu en  $H$  la ligne  $AE$  terminée par la Section & parallèle à la tangente en  $B$ , en sera un diametre qui aura pour ordonnée la ligne  $AH$ . Où l'on doit remarquer que lorsque le point  $H$  tombe entre les points  $B, G$ , la Section est une Ellipse; que lorsqu'il tombe de part ou d'autre de ces deux points, ce sont deux Hyperboles opposées; & qu'enfin lorsque la ligne  $BG$  est infinie, la Section est une Parabole.

## COROLLAIRE I.

FIG. 210. 374. CET exemple nous fournit le moyen de faire passer par quatre points donnés  $A, B, H, M$ , une Section conique d'une espece déterminée.

Car 1°. Soit la Section conique une Ellipse, dont le grand axe soit à son parametre, en la raison donnée de  $a$  à  $b$ . Je forme le triangle  $ABH$ , en joignant trois des points donnés par des lignes droites; & du quatrième point  $M$ , je fais passer par les points  $A, B$ , les angles  $MAK, MBK$ , égaux aux angles  $GAH, RBA$ , compléments à deux droits des angles  $HAB, HBA$ . Je décris sur  $AB$  comme corde de l'autre côté du point  $M$  un arc de cercle  $BDA$  capable d'un angle qui vaille quatre droits moins les deux angles  $KAM, KBM$ ; & du centre  $C$  de cet arc, je décris un autre cercle dont le rayon  $CF$  soit au rayon  $CD$  du premier, comme  $a+b$  est à  $a-b$ ; & du point de concours  $K$  des deux côtés  $AK, BK$ , des angles  $MAK, MBK$ , je tire une tangente  $KF$  à ce dernier cercle. Maintenant je dis que si l'on fait mouvoir le point  $K$  le long de la droite indéfinie  $FK$ ; le point de concours  $M$  des deux autres côtés  $AM, BM$ , prolongés lorsqu'il sera nécessaire de l'autre côté des points  $A, B$ , décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on demande. Car il est évident selon ce







ce qu'on a dit dans le premier cas de l'exemple, que le lieu des points  $M$  sera une Ellipse, dont le grand axe sera à son parametre comme  $BF(a)$  à  $DF(b)$ ; & de plus qu'elle passera par les points  $A, M, B, H$ , puis- que le point  $K$  étant en  $G$ , le côté  $AM$  tombera sur  $AH$ , & le côté  $BM$  sur  $BR$ .

2°. Lorsque c'est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées qu'il est question de décrire par quatre points donnés  $A, B, H, M$ , & dont le grand axe soit à son parametre en la raison donnée de  $a$  à  $b$ ; la construction demeure la même, excepté que le rayon  $CF$  du cercle concentrique au cercle  $BDAE$ , doit être au rayon  $CD$ , comme  $a - b$  est à  $a + b$ .

3°. Lorsqu'il s'agit de décrire une Parabole par quatre points donnés  $A, B, H, M$ . Ayant décrit comme dans le premier cas le cercle  $BDAE$ , on menera du point de concours  $K$  une tangente à ce cercle, qui sera la droite indéfinie sur laquelle faisant mouvoir le point  $K$ , l'autre point de concours  $M$  décrira la Parabole qu'on demande.

Comme l'on peut mener d'un même point deux tangentes à un cercle, il s'ensuit qu'on peut décrire deux différentes Sections coniques qui satisfont également lorsque le Problème est possible; car lorsque le point  $K$  tombe au dedans du cercle qui a pour rayon  $CF$ , il est visible que le Problème est impossible.

On pourra décrire la Section conique par le moyen de ses axes en se servant de l'article 372, ou par le moyen d'un de ses diametres & d'une ordonnée à ce diametre, en se servant de l'article 373.

## COROLLAIRE II.

375. ON tire encore de cet exemple, une nouvel. FIG. XII.  
le maniere de décrire une Section conique qui passe par cinq points donnés  $A, B, H, M, N$ . Car ayant joint trois quelconques de ces points  $A, B, H$ , par des

O o

lignes droites, on fera passer par les autres points  $M, N$ , & par les deux points fixes  $A, B$ , les angles  $MAK$ ,  $NAS$ , égaux chacun à l'angle  $HAG$  complément à deux droits de l'angle  $HAB$ , & les angles  $MBK$ ,  $NBS$  égaux chacun à l'angle  $ABR$  complément à deux droits de l'angle  $ABH$ ; & on tirera par les points de concours  $K, S$ , une ligne droite indéfinie  $SK$ , sur laquelle faisant mouvoir le point  $K$ , il est clair que le point de concours  $M$  décrira dans ce mouvement la Section conique qu'on demande; puisqu'elle passera par les cinq points donnés  $A, B, H, M, N$ .

# LIVRE NEUVIEME.

## De la construction des Egalités.

### PROPOSITION I.

#### Problème.

376. **CONSTRUIRE** toute égalité donnée, dans laquelle l'inconnue ne se trouve qu'au premier degré.

Soit en premier lieu l'inconnue  $x$  égale à une ou à plusieurs fractions simples, telles que  $\frac{ab}{c}$ , ou  $\frac{abc}{ef}$ , ou  $\frac{abcd}{gh}$  &c. Ayant fait  $c. b :: a. l$ , il est clair que cette quatrième proportionnelle  $l = \frac{ab}{c}$ ; & si l'on fait  $f. l :: e. m$ , l'on aura  $m = \frac{el}{f} = \frac{abc}{ef}$ ; & faisant enfin  $g. m :: h. n$ , il vient  $n = \frac{mh}{g} = \frac{abeh}{efg}$  en mettant pour  $m$  sa valeur  $\frac{abc}{ef}$ . De sorte qu'on aura l'inconnue  $x$  égale à  $l$ , ou à  $m$ , ou à  $n$ , &c. selon que  $x$  sera égale à  $\frac{ab}{c}$  ou à  $\frac{abc}{ef}$ , ou à  $\frac{abeh}{efg}$ , &c. Or il est visible qu'en augmentant le nombre des proportions, autant qu'il sera nécessaire, on trouvera toujours une ligne droite égale à une fraction simple donnée, tel que puisse être le nombre des dimensions de son numérateur. D'où l'on voit que l'on pourra toujours trouver une ligne  $x$  égale à une quantité composée de plusieurs fractions simples, car ayant trouvé en particulier des lignes droites égales à chacune de ces fractions, il n'y aura qu'à les ajouter, ou retrancher selon qu'il sera marqué par les signes  $+$  &  $-$ . Qu'il faille, par exemple, trouver une ligne  $x = a + \frac{ab}{c} + \frac{aab}{ef} - \frac{aacc}{b}$ , on ajoutera les deux lignes  $b = \frac{ab}{c}$  &  $l = \frac{aab}{ef}$  à la ligne  $a$  pour en composer une seule, de laquelle ayant retran-

ché la ligne  $m = \frac{abc}{b}$ , le reste sera la valeur cherchée de l'inconnue  $x$ , c'est à dire qu'on aura  $x = a + b + l - m$ .

Soit en second lieu l'inconnue  $x$  égale à une ou à plusieurs fractions composées, c'est à dire, dont les dénominateurs ayent plusieurs termes. On cherchera d'abord, comme l'on vient d'enseigner ci-dessus, une ligne égale au dénominateur divisé par une ligne arbitraire lorsque chacun de ses termes, n'a que deux dimensions, par un plan lorsqu'ils en ont trois, par un solide lorsqu'ils en ont quatre, &c, ce qui réunira tous les termes du dénominateur en un seul, lequel étant substitué en leur place, changera la fraction composée en une ou en plusieurs simples selon que le numérateur est composé d'un ou de plusieurs termes, & ayant trouvé comme ci-dessus une ligne qui leur soit égale, elle sera celle qu'on cherche. Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

On demande une ligne  $x = \frac{agc-bce}{bb+af}$ , je cherche d'abord une ligne  $m = f + \frac{bb}{a}$  c'est à dire égale au dénominateur  $af + bb$  divisé par la ligne  $a$ ; ce qui donne  $bb + af = am$ , & ayant trouvé ensuite une ligne  $n = \frac{agc-bce}{am} = \frac{gc}{m} - \frac{bc}{a}$ ; il est clair que la ligne cherchée  $x = n$ . De même si l'on demandoit une ligne  $x = \frac{a^3b+aac-abcf}{aaf+acf+bff}$ , on trouveroit une ligne  $m = a + \frac{ac}{a} + \frac{bf}{a}$  c'est à dire égale au dénominateur  $aaf + acf + bff$  divisé par le plan  $af$ ; ce qui donne  $afm = aaf + acf + bff$ , & ensuite une autre ligne  $= \frac{a^3b+aac-abcf}{afm} = \frac{aab}{fm} + \frac{acc}{fm} - \frac{bc}{m} = x$ . Il en est ainsi de tous les autres exemples que chacun se peut former à plaisir.

Il est inutile d'avertir que si l'on demandoit une ligne  $x$  égale à une ou à plusieurs fractions tant simples que

composées ; il faudroit chercher en particulier des lignes égales à chacune de ces fractions, pour les ajoûter ensuite ou les retrancher les unes des autres, selon que les signes  $+$  ou  $-$  le feroient connoître.

COROLLAIRE I.

377. IL est facile par le moyen de cette Proposition de trouver 1°. Une fraction simple  $\frac{a}{b}$  ou  $\frac{a}{c}$ , dont le dénominateur où le numérateur  $a$  soit donné, égale à une ou à plusieurs fractions simples ou composées ; car il n'y aura qu'à trouver une ligne  $x$  égale à la ligne  $a$  multipliée ou divisée par ces fractions. Qu'il faille trouver par exemple, une fraction  $\frac{a}{b} = \frac{a+f}{d+f} + \frac{a}{e}$ , il est visible qu'il n'y aura qu'à trouver une ligne  $x = \frac{a+f}{d+f} + \frac{a}{e}$ . 2°. Un plan  $ax$ , dont l'un des côtés  $a$  est donné, égal à un ou à plusieurs plans si composés qu'ils puissent être ; car il ne faut pour cela que trouver une ligne  $x$  égale à tous ces plans divisés par  $a$ . 3°. Un solide  $axx$  ou  $abx$ , dont deux des côtés  $a, a$ , ou  $a, b$ , sont donnés, égal à plusieurs solides ; puisqu'il ne faut pour cela que trouver une ligne  $x$  égale à tous ces solides divisés par le carré  $ax$  ou par le plan  $ab$ . 4°. Un sursolide  $a^3x$  ou  $abxx$  dont trois côtés  $a, a, a$ , ou  $a, b, c$ , sont donnés, égal à plusieurs sursolides ; puisqu'il ne faut encore pour cela que trouver une ligne  $x$  égale à tous ces sursolides divisés par le cube  $a^3$  ou par le solide  $abc$ . Et il en est de même de plusieurs produits de cinq dimensions, de six &c. que l'on peut toujours reduire en un seul dont tous les côtés, excepté un, soient donnés.

COROLLAIRE.

378. DE LA on voit que pour trouver un carré égal à plusieurs plans donnés, il les faut réunir

O o ij

duire à l'une de ces deux formes,  $xx + ax - bb = 0$ , ou

\* Art. 376.  $xx + ax - bb = 0$ ; en trouvant une ligne  $a^*$  égale à toutes les quantités connues qui multiplient l'inconnue

\* Art. 378.  $x$ , & un carré  $bb^*$  égal à tous les plans entièrement connus. Cela posé,

FIG. 212.

1°. Soit  $xx + ax - bb = 0$ . Je forme un angle droit  $CAB$  dont l'un des côtés  $CA = \frac{1}{2}a$ , & l'autre côté  $AB = b$ ; & ayant mené l'hypothénuse  $BC$  prolongée au delà de  $C$ , je décris du centre  $C$  & du rayon  $CA$ , un cercle qui coupe  $BC$  en deux points  $E, D$ . Je dis que les droites  $BD, BE$ , sont les deux racines de l'égalité proposée  $xx + ax - bb$ : sçavoir  $BE$  la racine vraie, &  $BD$  la fautive de l'égalité  $xx + ax - bb = 0$ , & au contraire  $BD$  la vraie &  $BE$  la fautive de l'égalité  $xx - ax - bb = 0$ .

Car faisant  $BE = x$ , on aura  $BD$  ou  $BE + ED = a + x$ ; & si l'on fait  $BD = -x$ , on trouvera  $BE$  ou  $BD - ED = -x - a$ . Donc en l'un & l'autre cas  $DB \times BE = xx + ax = \overline{AB}^2 (bb)$  par la propriété du cercle, c'est à dire  $xx + ax - bb = 0$ . Au contraire si l'on fait  $BD = x$  ou  $BE = -x$ , on trouvera  $DB \times BE = xx - ax = bb$  ou  $xx - ax - bb = 0$ .

FIG. 213.

2°. Soit  $xx - ax - bb = 0$ . Je forme comme dans le premier cas, un angle droit  $CAB$  dont l'un des côtés  $CA = \frac{1}{2}a$ , & l'autre  $AB = b$ ; & ayant mené une droite indéfinie  $BD$  parallèle à  $AC$ , je décris du centre  $C$  & du rayon  $CA$  un arc de cercle qui coupe la ligne  $BD$  aux points  $E, D$ . Je dis que les droites  $BE, BD$ , sont les racines de l'égalité proposée  $xx - ax - bb = 0$ ; sçavoir les deux vraies de l'égalité  $xx - ax - bb = 0$ , & les deux fautes de l'égalité  $xx + ax - bb = 0$ .

Car achevant la demi-circonférence  $AEDH$ , & menant les parallèles  $EF, DG$  à  $AB$ ; on aura en faisant  $BE$  ou  $AF = x$ , le rectangle  $AF \times FH = ax - xx = \overline{FE}^2 (bb)$  par la propriété du cercle. De même si l'on fait  $BD$  ou  $AG = x$ , on aura  $AG \times GH = ax - xx = \overline{GD}^2 (bb)$ . C'est à dire en l'un & l'autre cas

cas  $xx - ax + bb = 0$ . Si l'on veut que  $BE$  ou  $AF = -x$ , &  $BD$  ou  $AG = -x$ , on trouvera  $AF \times FH$  &  $AG \times GH = -xx - ax = \overline{FE}$  ou  $\overline{GD}$  ( $bb$ ) c'est à dire  $xx - ax + bb = 0$ .

Si le cercle qui a pour centre le point  $C$ , & pour rayon la droite  $CA$ , ne coupe ni ne touche la parallèle  $BD$ , (ce qui arrive toujours lorsque  $AB$  surpasse  $CA$ ); les racines de l'égalité seront toutes deux imaginaires: mais s'il la touche en un point, les deux racines  $BE$ ,  $BD$ , deviennent égales chacune au rayon  $CA$ .

### REMARQUE.

381. **LORSQUE** dans une égalité l'inconnuë ne se rencontre qu'au quatrième & au second degré, on peut toujours réduire cette égalité en une autre où l'inconnuë ne monte qu'au second degré: de maniere que ces sortes d'égalités ne passent que pour être du second degré.

Soit par exemple  $x^4 - aaxx - aabb = 0$ . Je suppose une inconnuë  $x$  qui soit telle que son rectangle par la donnée  $a$  soit égal au quarré  $xx$ ; ce qui donne  $ax = xx$ . Et mettant à la place de  $xx$  cette valeur  $ax$ , & à la place de  $x^4$  son quarré  $aaxx$ , je change l'égalité donnée  $x^4 - aaxx - aabb = 0$  en cette autre  $xx - ax - bb = 0$ , où l'inconnuë  $x$  ne monte qu'au second degré. J'en cherche les racines  $x$ , comme l'on vient d'enseigner, & prenant des moyennes proportionnelles entre la donnée  $a$  & les valeurs de ses racines, je dis qu'elles exprimeront les valeurs cherchées de l'inconnuë  $x$ : ce qui est évident, puisque  $xx = ax$ .

FIG. 214

### PROPOSITION III.

#### Problème.

382. **TROUVER** par une autre voye les racines des égalités du second degré, sans qu'il soit nécessaire de changer leur dernier terme en un quarré,

Pp

FIG. 215.

1°. Soit  $xx \mp ax - bc = 0$ . Ayant décrit un cercle quelconque  $ABD$ , dont le diamètre ne soit pas moindre que les données  $a$  &  $b - c$  ( je suppose ici que  $b$  surpasse  $c$  ); on inscrira dans ce cercle, à commencer par un de ses points quelconques  $A$ , deux cordes  $AB = a$ ,  $AD = b - c$ : & ayant prolongé  $AD$  en  $F$  en sorte que  $DF = c$ , on décrira de son centre  $C$ , & du rayon  $CF$ , un autre cercle concentrique qui coupe aux points  $F, E, G, H$ , les cordes  $AD, AB$  prolongées. Je dis que  $AG$  est la vraie racine, &  $AH$  la fausse de l'égalité  $xx \mp ax - bc = 0$ ; & qu'au contraire  $AG$  est la fausse, &  $AH$  est la vraie racine de  $xx - ax - bc = 0$ .

Car  $AF$  ou  $AD + DF = b$ ,  $DF$  ou  $AE = c$ , & faisant  $AG$  ou  $BH = x$ , on aura  $AH = a + x$ . Or par la propriété du cercle  $EGFH$ , le rectangle  $BA \times AF$  ( $bc$ ) =  $GA \times AH$  ( $xx \mp ax$ ). Si l'on fait à présent  $AH = -x$ , on aura  $AG$  ou  $BH$  ou  $AH - AB = -x - a$ , & par conséquent  $GA \times AH = xx \mp ax$  comme auparavant. Donc soit que l'on fasse  $AG = x$  ou  $AH = -x$ , on trouvera toujours  $xx \mp ax - bc = 0$ . On prouvera de même que  $AG$  est la racine fausse, &  $AH$  la vraie de l'égalité  $xx - ax - bc = 0$ .

FIG. 216.

2°. Soit  $xx \mp ax + bc = 0$ . Ayant décrit un cercle quelconque  $ABD$ , dont le diamètre ne soit pas moindre que les données  $a$  &  $b + c$ , on inscrira dans ce cercle, à commencer par un de ses points quelconques  $A$ , deux cordes  $AB = a$ ,  $AD = b + c$ : & ayant pris sur  $AD$  la partie  $DE = c$ , on décrira de son centre  $C$  & du rayon  $CF$  un autre cercle concentrique qui coupera les cordes  $AD, AB$ , aux points  $F, E, G, H$ . Je dis que  $AG$  &  $AH$  sont les deux racines vraies de l'égalité  $xx \mp ax + bc = 0$ , & les deux fausses de  $xx \mp ax - bc = 0$ . Cela se démontre de même que dans le premier cas.

Si le cercle qui a pour rayon  $CF$  ne touchoit ni ne rencontroit la ligne  $AB$  en aucun point, il s'ensuivroit que les deux racines de l'égalité seroient imaginaires.



## A V E R T I S S E M E N T.

Tout l'artifice dont je me sers pour construire les égalités qui n'ont qu'une inconnue, ou pour en trouver les racines, consiste à introduire dans cette égalité une nouvelle inconnue; en sorte qu'on en puisse tirer plusieurs équations qui renferment chacune les deux inconnues & qui soient telles que deux quelconques de ces équations renferment ensemble toutes les quantités connues de la proposée; car autrement en faisant évanouir l'inconnue nouvellement introduite, on ne retrouveroit pas l'égalité proposée. Je choisis ensuite entre ces équations deux des plus simples, & en ayant construit séparément les lieux, leurs points d'intersections me donnent les racines que je cherche. Il y a de l'art à introduire l'inconnue; car il faut que les lieux que l'on tire de la proposée, soient les plus simples qu'il se puisse: par exemple, si l'égalité est du quatrième degré, il faut que les lieux des équations qu'on tire ne passe point le second degré; que parmi ces lieux il y ait toujours un cercle comme étant le plus simple, & aussi une Parabole, une Hyperbole équilatère &c. Or c'est ce que j'ai tâché d'exécuter dans les Lemmes & les Propositions qui suivent.

## L E M M E F O N D A M E N T A L.

*Pour la construction des Egalités du troisième & du quatrième degré, par le moyen d'un cercle, & d'une Parabole donnée.*

383. Soit proposée l'égalité  $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^2f = 0$ , dans laquelle  $x$  est l'inconnue, &  $a, b, c, d, f$ , sont les données; & soit supposée une autre inconnue  $y$  telle que son rectangle par la connue  $a$ , soit égal au rectangle de  $x + b$  par  $x$ . Ce qui donne les équations suivantes.

1<sup>e</sup>.  $ay = xx + bx$ , de laquelle quarrant chaque membre, on trouve  $x^4 + 2bx^3 + b^2xx = a^2yy$ ; &

Pp ij

mettant à la place de  $x^4 + 2bx^3$ , sa valeur  $axy - b^2xx$  dans l'égalité proposée  $x^4$  &c. on la changera en cette seconde équation.

2°.  $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$ , dans laquelle mettant à la place de  $xx$  sa valeur  $ay - bx$  trouvée par le moyen de la première équation, 1°. Dans  $-\frac{bb}{aa}xx$ .

2°. Dans  $\frac{c}{a}xx$ . 3°. Dans  $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$ , on arrive à ces trois différentes équations.

$$3°. yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^2x}{aa} + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0.$$

$$4°. yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0.$$

5°.  $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^2}{aa}x - dx - af = 0$ . Si l'on retranche de cette cinquième équation, la première  $xx + bx - ay = 0$ , & qu'ensuite on la lui ajoute, on aura ces deux autres.

$$6°. yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^2}{aa}x - dx - af = 0.$$

$$7°. yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^2}{aa}x - dx - af = 0.$$

Maintenant si l'on prend pour les inconnues  $x$  &  $y$  deux lignes droites  $AP$ ,  $PM$ , qui fassent entr'elles un angle quelconque  $APM$ ; il est évident que le lieu de la première équation est \* une Parabole: que celui de la seconde peut-être une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole selon que  $bb$  est égal, moindre, ou plus grand que  $ac$ ; que celui de la troisième est une Ellipse, qui devient un cercle \* lorsque  $c = a$  & que l'angle  $APM$  est droit: que celui de la quatrième est une Hyperbole, qui devient équilatère \* lorsque  $b = a$ : que celui de la cinquième est encore une Parabole: que celui de la sixième est une Hyperbole équilatère: & enfin que le lieu de la septième est un cercle, lorsque l'angle  $APM$  est droit.

\* Art. 310.

\* Art. 328.

♣ 329.

\* Art. 335.

♣ 336.

## REMARQUE I.

384. S'IL y avoit  $-2bx^3$  dans l'égalité proposée au lieu de  $+2bx^3$ , il faudroit changer dans toutes les équations les signes des termes où  $b$  se rencontre avec une dimension impaire; & si le second terme manquoit, il faudroit effacer tous les termes où  $b$  se trouve. Il en est de même à l'égard des autres termes de l'égalité proposée par rapport aux lettres  $c, d, f$ , qu'ils renferment. Mais l'on doit remarquer que dans tous les differens changemens qui peuvent arriver, le lieu de la première équation sera une Parabole, celui de la sixième une Hyperbole équilatère, & enfin celui de la dernière toujours un cercle lorsque l'angle  $APM$  est droit.

## REMARQUE II.

385. ON a choisi pour première équation  $xx + bx = ay$ , plutôt que  $xx - bx = ay$  ou simplement  $xx = ay$ ; parce qu'en quarrant chaque membre de cette équation, les deux premiers termes du premier membre sont les mêmes que les deux premiers termes de l'égalité proposée  $xx + 2bx^3$  &c, & qu'ainsi on peut les faire évanouir tout d'un coup. Ce qui donne une nouvelle équation dont le lieu n'est que du second degré, & qui étant combinée en différentes façons avec la première, sert à en trouver (comme l'on vient de voir) plusieurs autres, dont les lieux n'étant que du second degré, se construisent aisément, parce qu'elles ne renferment point le plan  $xy$ ; & entre lesquels le lieu de la dernière équation, est toujours un cercle, en supposant que les inconnues  $x$  &  $y$  fassent entr'elles un angle droit.

## PROPOSITION IV.

## Problème.

386. TROUVER les racines de l'égalité proposée  $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - af = 0$ , par le moyen d'une Parabole & d'un cercle.

FIG. 217. Ayant pris pour les inconnues & indéterminées  $x$  &  $y$ , les deux lignes droites  $AP$ ,  $PM$ , qui fassent entr'elles

\*Art. 310. un angle droit  $APM$ ; je construis \* d'abord la Parabole qui est le lieu de la première équation du Lemme, & ensuite le cercle qui est le lieu de la septième; & leurs intersections me servent à découvrir les différentes valeurs de l'inconnue  $x$  qui seront les racines de l'égalité proposée. Cela se fait en cette sorte.

Ayant pris sur la ligne  $AP$  prolongée de l'autre côté de  $A$  la partie  $AD = \frac{1}{2}b$ , on menera par le point  $D$  une parallèle à  $PM$ , sur laquelle on prendra la partie  $DC = \frac{bb}{4a}$  du côté opposé à  $PM$ ; & on décrira de l'axe  $CD$  qui ait son origine en  $C$ , & dont le paramètre soit égal à la donnée  $a$ , une Parabole  $MC M$ . Cela fait on menera par le point fixe  $A$  une parallèle  $AQ$  à  $PM$ , sur laquelle ayant pris la partie  $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}c = -g$  pour abréger, on tirera parallèlement à  $AP$  la droite  $BE = \frac{1}{2}d + \frac{bx}{a}$  sçavoir  $-\frac{bx}{a}$  lorsque  $AB = -g$  c'est à dire lorsque la valeur de  $AB$  est positive, &  $+\frac{bx}{a}$  lorsque  $AB = -g$ ; en observant de prendre ou mener ces deux lignes  $AB$ ,  $BE$ , du côté de  $PM$  lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. Nommant enfin  $EA$ ,  $m$ ; on décrira du centre  $E$ , & du rayon  $EM = \sqrt{mm + af}$  un cercle; & menant des points  $M$  où il coupe la Parabole des perpendiculaires  $MP$  sur la ligne  $AP$ : les par-

ties  $AP$  de cette ligne marqueront les racines de l'égalité, ſçavoir les vraies lorsque les points  $P$  tombent du côté où l'on a ſuppoſé  $PM$  en faiſant la conſtruction, & les fauſſes lorsqu'ils tombent du côté oppoſé.

Car prolongeant  $MQ$  parallele à  $AP$ , & qui rencontre l'axe  $CG$  au point  $L$ , on aura  $ML$  ou  $AP + AD = x + \frac{1}{2}b$ ,  $CL$  ou  $MP + DC = y + \frac{bb}{4a}$ ; & par la propriété de la Parabole  $\overline{ML} = CL \times a$ , c'eſt à dire  $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + ay$ , ou  $xx + bx = ay$  qui eſt la premiere équation du Lemme. Maintenant ſi l'on prolonge  $EB$  juſqu'à ce qu'elle rencontre  $PM$  en  $R$ , & qu'on tire le rayon  $EM$ , on aura à cauſe du triangle rectangle  $ERM$  le quarré  $\overline{EM} = \overline{ER} + \overline{RM} = \overline{EB} + 2EB \times BR + \overline{BR} + \overline{PM} - 2AB \times PM + \overline{AB} = \overline{EB} + \overline{BA} + af$  par la conſtruction; c'eſt à dire en effaçant de part & d'autre les quarrés  $\overline{EB}$ ,  $\overline{BA}$ , & mettant pour  $2AB$  ſa valeur  $a + \frac{bb}{a} - c$ , & pour  $2BE$  ſa valeur  $\frac{2bx}{a} - d$  ou  $b + \frac{b^2}{2a} - \frac{bc}{a} - d$ , & pour  $BR$  ou  $AP$  &  $PM$  leurs valeurs  $x$  &  $y$ , la ſeptieme équation  $yy + cy - ay - \frac{bb}{a}y + xx + bx + \frac{b^2}{2a}x - \frac{bc}{a}x - dx = af$ , dans laquelle ſi l'on met à la place de  $y$  ſa valeur  $\frac{ax + bx}{a}$  trouvée par la premiere équation, & à la place de  $yy$  le quarré de cette valeur, on retrouve l'équation même propoſée  $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^2f = 0$ . D'où l'on voit que la ligne  $AP$  exprime une racine vraie de cette égalité.

Si l'on obſerve de prendre  $-x$  pour  $AP$  &  $-y$  pour  $PM$ , lorsque ces lignes tombent du côté oppoſé où on les a ſuppoſées en faiſant la conſtruction; on trouvera toujours par la propriété de la Parabole la premiere équation, & par la propriété du cercle la ſeptieme. Donc &c.

## COROLLAIRE I.

387. IL est visible qu'on rendra la construction précédente generale pour toutes les égalités du troisieme & du quatrieme degré, & qu'on y emploiera toujours une Parabole qui ait pour le parametre de son axe une ligne donnée  $a$ ; si l'on observe 1°. De multiplier par la racine  $x$  l'égalité lorsqu'elle n'est que du troisieme degré; & de prendre une ligne  $* 2b$  égale à toutes celles qui multiplient  $x$ , un plan  $* ac$  égal à ceux qui multiplient  $xx$ , un solide  $aad$  égal aux solides qui multiplient  $x$ , & enfin un sursolide  $a'f$  égal aux termes entierement connus de l'égalité donnée. 2°. De changer dans les valeurs des lignes  $AD$ ,  $DC$ ,  $AB$ ,  $BE$ ,  $EM$ , qui déterminent la construction de la Parabole & du cercle, les signes des termes où  $b$  se rencontre avec une dimension impaire s'il y a  $-2bx$  dans l'égalité donnée, parce qu'il y avoit  $+2bx$  dans celle du Problème; & d'effacer tous les termes où  $b$  se trouve si le terme  $2bx$  manque, parce qu'alors  $b=0$ : comme aussi de faire la même chose à l'égard des termes où  $c$ ,  $d$ ,  $f$ , se rencontrent. 3°. De prendre ou mener ces lignes du côté de  $PM$  lorsqu'elles sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. On aura donc  $AD = \pm \frac{1}{2}b$ , sçavoir  $-\frac{1}{2}b$  lorsqu'il y a  $+2bx$ , &  $+\frac{1}{2}b$  lorsqu'il y a  $-2bx$ ;  $AB = \frac{1}{2}a + \frac{b^2}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$ , sçavoir  $-\frac{1}{2}c$  lorsqu'il y a  $+acxx$ , &  $+\frac{1}{2}c$  lorsque c'est  $-acxx$ ;  $BE = \pm \frac{b^2}{2a} \mp \frac{1}{2}d$ , sçavoir  $-\frac{b^2}{2a}$  lorsque  $AB = +g$ , & qu'il y a  $+2bx$ , ou bien lorsque  $AB = -g$ , & qu'il y a  $-2bx$ ; & au contraire  $+\frac{b^2}{2a}$  lorsque  $AB = +g$  & qu'il y a  $-2bx$ , ou bien lorsque  $AB = -g$  & qu'il y a  $+2bx$  ( c'est à dire  $-\frac{b^2}{2a}$  lorsque les valeurs de  $AB$  &  $AD$  sont l'une positive & l'autre negative, &  $+\frac{b^2}{2a}$  lorsque ces valeurs sont toutes deux ou positi-

ves

ves ou negatives) ; comme aussi  $+\frac{1}{2}d$  lorsqu'il y a  $-aax$ , &  $-\frac{1}{2}d$  lorsque c'est  $+aax$  : & enfin  $EM = \sqrt{mm + af}$ , sçavoir  $+af$  lorsqu'il y a  $-a^3f$ , &  $-af$  lorsque c'est  $+a^3f$ . D'où l'on tire cette construction geometrique qui est generale pour tous les cas.

Une Parabole  $MC M$  qui a pour axe la ligne  $CG$  Fig. 217. dont le parametre est égal à la ligne  $a$ , étant donnée, & ayant réduit l'égalité proposée sous cette forme  $x^4 + 2bx^3 + acxx + aax + a^3f = 0$  ; on menera une ligne  $AB$  parallele à l'axe  $CG$  qui en soit distante de  $\frac{1}{2}b$ , du côté droit de cet axe lorsqu'il y a  $+2bx^3$  dans l'égalité donnée, & du côté gauche lorsqu'il y a  $-2bx^3$ . On tirera par le point  $A$  où la ligne  $AB$  rencontre la Parabole, une perpendiculaire  $AD$  sur l'axe  $CG$  ; & on prendra sur cet axe les parties  $DF = \frac{1}{2}a$ ,  $FG = 2CD$  toujours du côté opposé à son origine  $C$ , & la partie  $GK = \frac{1}{2}C$  vers son origine  $C$  lorsqu'il y a  $+acxx$ , & du côté opposé lorsqu'il y a  $-acxx$ . On menera ensuite par les points déterminés  $A, F$ , une ligne droite indéfinie  $AF$ , & par le point  $K$  une perpendiculaire à l'axe qui rencontre  $AF$  en  $H$  ; & on prendra sur cette perpendiculaire la partie  $HE = \frac{1}{2}d$  du côté droit lorsqu'il y a  $-aax$ , & du côté gauche lorsqu'il y a  $+aax$ . Cela fait, on décrira un cercle du centre  $E$ , & du rayon  $EM = AE$ , lorsque le terme  $a^3f$  manque dans l'égalité donnée, c'est à dire, lorsqu'elle n'est que du troisième degré : mais lorsqu'elle est du quatrième, on prendra (après avoir nommé  $AE, m$  ; ) le rayon  $EM = \sqrt{mm + af}$ , sçavoir  $+af$  s'il y a  $-a^3f$ , &  $-af$  s'il y a  $+a^3f$ . Enfin des points  $M$  où ce cercle rencontre la Parabole donnée, menant des perpendiculaires  $MQ$  sur la ligne  $AB$  ; elles seront les racines de l'égalité donnée, sçavoir celles qui tombent du côté droit de cette ligne, les vraies ; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses.

Car prolongeant  $HK$  jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne  $AB$  au point  $B$ , on a par la construction  $BK$  ou

$AD = \pm \frac{1}{2}b$ , ſçavoir  $-\frac{1}{2}b$  lorsqu'il y a  $+\frac{1}{2}bx^2$ , &  $+\frac{1}{2}b$  lorsque c'est  $-\frac{1}{2}bx^2$ , & par la propriété de la Parabole,  $CD = \frac{bb}{4a}$ . Donc  $DG$  ou  $DF + FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{4a}$ , &  $DK$  ou  $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{4a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$ , ſçavoir  $-\frac{1}{2}c$  lorsqu'il y a  $+\frac{1}{2}acxx$ , &  $+\frac{1}{2}c$  lorsqu'il y a  $-\frac{1}{2}acxx$ ; & l'on doit observer que le point  $B$  tombe du côté de  $PM$  lorsque  $AB = \mp g$ , c'est à dire lorsque la valeur est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. Or à cause des triangles ſemblables  $ADF$ ,  $ABH$ , on aura  $DF (\frac{1}{2}a) : DA (\pm \frac{1}{2}b) :: AB (\mp g) : BH = \pm \frac{bg}{a}$ , ſçavoir  $+\frac{bg}{a}$  lorsque les valeurs de  $AD$  & de  $AB$  ſont toutes deux positives ou negatives, &  $-\frac{bg}{a}$  lorsque l'une d'elles est positive & l'autre negative. Et partant  $BE = \pm \frac{bg}{a} \pm \frac{1}{2}d$ , ſçavoir  $-\frac{1}{2}d$  lorsqu'il y a  $+\frac{1}{2}aadx$ , &  $+\frac{1}{2}d$  lorsqu'il y a  $-\frac{1}{2}aadx$ ; & l'on doit encore observer que le point  $E$  tombera du côté de  $PM$  lorsque la valeur de  $BE$  est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. D'où il est évident que par le moyen de cette construction on déterminera dans tous les cas poſſibles toujours comme il eſt requis, le centre  $E$  du cercle.

Si le ſecond terme  $\frac{1}{2}bx^2$  manquoit dans l'égalité donnée, il eſt clair que les lignes  $AB$ ,  $AF$ , tomberoient ſur l'axe  $CG$ , en ſorte que les points  $A$ ,  $D$ , ſe confondroient avec l'origine  $C$ ; puſque  $b = 0$ . Et par conſequent le point  $G$  tomberoit ſur le point  $F$ , & les points  $H$ ,  $B$ , ſur le point  $K$ : ce qui rend la construction generale beaucoup plus ſimple. Car il ne faudroit alors que prendre ſur l'axe la partie  $CF = \frac{1}{2}a$  toujours vers le dedans de la Parabole, & la partie  $FK = \frac{1}{2}c$  vers l'origine  $C$  lorsqu'il y a  $+\frac{1}{2}acxx$ , & du côté opposé lorsqu'il y a  $-\frac{1}{2}acxx$ ; mener  $KE = \frac{1}{2}d$  perpendiculaire à l'axe, du côté gauche lorsqu'il y a  $+\frac{1}{2}aadx$ , & du côté droit lorsqu'il y a  $-\frac{1}{2}aadx$ ; & achever le reſte comme dans la construction generale, en obſervant qu'ici  $EC = m$ .



De même si le terme  $acxx$  manque, le point  $K$  tombera sur le point  $G$ ; & si c'est le terme  $adxx$ , le centre  $E$  du cercle tombera en  $H$ . FIG. 217.

## COROLLAIRE II.

388. ON peut encore trouver une construction plus simple pour les égalités du troisième degré qui ont un second terme; en les multipliant par l'inconnue plus ou moins la quantité connue du second terme, sçavoir plus cette quantité quand le second terme est affecté du signe  $-$ ; & moins cette quantité lorsqu'il y a le signe  $+$ ; ce qui donne une équation du quatrième degré où le second terme est évanoui. Qu'il faille, par exemple, trouver les racines de l'égalité du troisième degré,  $x^3 - bxx - + apx - + aaq = 0$ : je la multiplie par  $x - + b$  pour avoir l'égalité du quatrième degré,  $x^4 - + apxx - + aaqx - + aabq = 0$ ,  $+ bbxx - + abpx$  dans laquelle le second terme est évanoui; je me sers à présent de la construction que l'on vient de donner pour ces sortes d'égalités où le second terme manque, & j'ai  $CK (\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}a - + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$ ,  $KE (\frac{1}{2}d) = \frac{1}{2}q - + \frac{b^2}{2a}$ , & le rayon du cercle  $EM = \sqrt{mm - bq}$ : ce qui donne cette construction.

Ayant mené une parallèle à l'axe  $CD$  qui en soit distante vers le côté gauche d'une ligne égale à  $b$ , & qui rencontre la Parabole au point  $A$ , je tire par l'origine  $C$  de l'axe la droite  $CA$ , sur laquelle j'éleve par son point de milieu  $O$  une perpendiculaire indéfinie  $OG$  qui rencontre l'axe au point  $G$ . Je prends sur l'axe vers son origine  $C$  la partie  $GK = \frac{1}{2}p$ , & ayant tiré par le point  $K$  une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la ligne  $OG$  au point  $H$ , je prends sur cette perpendiculaire prolongée du côté de  $H$  la partie  $HE = \frac{1}{2}q$ , & je décris du centre  $E$  & du rayon  $EA$  un cercle. Je dis qu'il coupera la Parabole en des points  $M$ , d'où ayant abaissé sur l'axe des perpendiculaires  $MQ$ ; celles qui seront  $Qq$  ij

FIG. 219.

à droit, marqueront les vraies racines, & celles qui seront à gauche, les fausses de l'égalité proposée  $x^4 - bxx - \frac{1}{2}apx + aaq = 0$ .

Car ayant mené les perpendiculaires  $AD$ ,  $OL$ , sur l'axe; on aura par la construction  $AD = b$ , & par la propriété de la Parabole  $CD = \frac{bb}{a}$ . Donc puisque  $CA$  est divisée par le milieu en  $O$ , les triangles semblables  $CAD$ ,  $COL$ , donneront  $OL = \frac{1}{2}b$ ,  $CL = \frac{bb}{2a}$ ; & à cause des triangles rectangles semblables  $CLO$ ,  $OLG$ , on aura  $CL \left(\frac{bb}{2a}\right) : LO \left(\frac{1}{2}b\right) :: LO \left(\frac{1}{2}b\right) : LG = \frac{1}{2}a$ , & par conséquent  $CK$  ou  $CL - LG - GK = \frac{1}{2}a - \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$ . De plus à cause des triangles semblables  $GLO$ ,  $GKH$ , on trouve  $KH = \frac{bp}{2a}$ , &  $KH - HE$  ou  $KE = \frac{1}{2}q - \frac{bp}{2a}$  qui tend du côté gauche de l'axe, comme il est prescrit dans la construction lorsqu'il y a  $-\frac{1}{2}apx$ . Le point  $E$  est donc le centre du cercle lequel doit déterminer par ses intersections avec la Parabole donnée toutes les racines de l'égalité du quatrième degré  $x^4 - bxx - \frac{1}{2}apx + aaq = 0$ , avec une fausse  $AD(b)$ ; il s'ensuit que ce cercle doit passer par le point  $A$ . Donc &c.

On peut encore s'assurer par le calcul, que  $EA$  est le rayon du cercle cherché. Car menant  $EB$  parallèle à l'axe, on aura (à cause des triangles rectangles  $EBA$ ,  $EKC$ ) les quarrés des hypothenuses  $EA^2 = EB^2 + BA^2$ , &  $EC^2 = EK^2 + KE^2$  & par conséquent il s'agit de prouver que  $EB^2 + BA^2 = EK^2 + KE^2 - bq$ ; puisqu'on doit prendre  $EM = \sqrt{mm - bq}$ . Or en mettant à la place de ces lignes de part & d'autre leurs valeurs analytiques, on trouvera les mêmes quantités. Et c'est ce qui doit arriver, si le rayon cherché  $EM = EA$ .

Pour rendre cette construction generale, il faut ob-

server, 1°. De mener du côté gauche de l'axe la parallèle qui en est distante d'une ligne égale à  $b$ , lorsqu'il y a  $-bxx$  dans l'égalité proposée, & du côté droit lorsqu'il y a  $+bxx$ . 2°. De prendre sur l'axe  $GK = \frac{1}{2}p$  du côté de son origine  $C$  lorsqu'il y a  $+apx$ , & du côté opposé lorsqu'il y a  $-apx$ . 3°. De prendre  $HE = \frac{1}{2}q$  du côté gauche lorsqu'il y a  $+aaq$ , & du côté droit lorsqu'il y a  $-aaq$ . Tout cela est trop évident pour m'arrêter à le démontrer en détail.

## REMARQUE I.

389. IL est à propos de remarquer, 1°. Que si le cercle ne coupe la Parabole donnée qu'en deux points, il s'ensuivra que l'égalité proposée n'aura que deux racines réelles lorsqu'elle est du quatrième degré, & qu'une seule lorsqu'elle est du troisième, & les deux autres imaginaires: comme dans la figure 219. où le cercle ne coupe la Parabole qu'en deux points  $A, M$ ; l'égalité  $x^4 + apxx - b bxx$  &c. n'a que deux racines réelles  $AD, MQ$ , qui sont toutes deux fausses, parce qu'elles tombent du côté gauche de l'axe. 2°. Que si le cercle ne coupoit ni ne rencontroit la Parabole en aucun point (ce qui ne peut arriver lorsque l'égalité est du troisième degré comme l'on voit par les constructions précédentes) les quatre racines seroient imaginaires. 3°. Que s'il la touchoit en un point l'égalité proposée auroit deux racines égales chacune à la perpendiculaire menée de ce point; ce qui vient de ce qu'on peut considérer un cercle qui touche une Parabole, comme s'il la coupoit en deux points infiniment proches l'un de l'autre, qui sont regardés comme réunis dans le point touchant: mais alors l'égalité proposée se pourroit abaisser à une du second degré par les règles de l'Algebre ordinaire, de sorte qu'on n'auroit point besoin d'une Parabole pour en trouver les racines.

## REMARQUE II.

390. Si l'on fait attention à ce qu'on démontre en Algebre qu'en toute égalité où le second terme manque, & qui a toutes ses racines réelles, la somme des vraies est égale à la somme des fausses; on verra naître ce Theorème.

Fig. 218. S'il y a un cercle qui coupe une Parabole en quatre points  $M$  d'où l'on abaisse des perpendiculaires  $MQ$  sur l'axe  $CF$ : je dis que la somme des perpendiculaires qui tombent du côté droit de l'axe, sera égale à la somme de celles qui tombent du côté gauche.

Car si l'on prend vers le dedans de la Parabole sur l'axe depuis son origine  $C$  la partie  $CF$  égale la moitié de son parametre que j'appelle  $a$ , & qu'ayant tiré du centre  $E$  du cercle la perpendiculaire  $EK$  sur l'axe, on fasse  $FK = \frac{1}{2}c$ ,  $KE = \frac{1}{2}d$ ,  $EC - EM = af$ ; il est clair par la construction qui est à la fin \* du Corollaire premier, que les perpendiculaires  $MQ$  seront les racines de cette égalité  $x^4 - acxx + aadx - a^3f = 0$  dans laquelle le second terme manque; sçavoir celles qui tombent du côté droit de l'axe, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. Donc &c.

Si le cercle passoit par l'origine  $C$  de l'axe, il est visible que l'une des perpendiculaires  $MQ$  deviendrait nulle ou zero; & qu'ainsi il y auroit alors une perpendiculaire d'une part de l'axe égale aux deux autres de l'autre part.

Si le cercle touchoit la Parabole en un point & la coupoit en deux autres, il faudroit prendre le double de la perpendiculaire menée du point touchant; puisque (comme l'on vient \* de dire) on peut regarder ce cercle comme s'il coupoit la Parabole en deux points infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se réunissent au point touchant.





## REMARQUE III.

391. COMME l'on ne peut imaginer en Geometrie des produits qui aient plus de trois dimensions; puisque le solide, qui est la quantité la plus composée, n'en a que trois; on pourra diviser, si l'on veut, tous les termes d'une égalité proposée qui passe le troisième degré, par telle ligne donnée qu'on voudra, élevée à une puissance moindre d'une unité que chacun de ses termes n'a de dimensions: ce qui ne troublera point l'égalité, & fera que chacun de ses termes, n'exprimera plus que des lignes droites. Soit, par exemple, l'égalité du quatrième degré  $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - af = 0$ ; je la divise par  $a^3$ , ce qui donne  $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cax}{a^2} - \frac{dx}{a} - f = 0$ , dont chaque terme n'a qu'une dimension, & n'exprime par conséquent que des lignes droites. On choisit ordinairement la ligne qui se trouve répétée le plus souvent dans tous les termes de l'équation proposée, comme est ici la ligne  $a$ , & même quelquefois on la sousentend, en la regardant comme l'unité dans les nombres, qui ne change rien aux quantités qu'elle multiplie ou qu'elle divise: ainsi en faisant  $a = 1$ , on écrira  $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = 0$ , au lieu de  $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - af = 0$  ou de  $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cax}{a^2} - \frac{dx}{a} - f = 0$ . Il en est de même des égalités du cinquième & du sixième degré, &c.

## REMARQUE IV.

392. SI après avoir construit le cercle qui est le lieu de la dernière équation du Lemme, on construit une Section conique qui soit le lieu de telle autre de ses équations qu'on voudra; ces deux lieux détermineront par leurs intersections les racines de l'égalité proposée; dont la raison est que faisant évanouir par le moyen de leurs équations l'inconnue  $y$ , on retrouve l'égalité même proposée.

De là il est évident qu'on peut construire cette égalité, 1°. Par le moyen d'un cercle & d'une Hyperbole équilatere, en se servant de la septième & de la sixième équation du Lemme. 2°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse dont l'axe parallele à  $AP$  est à son parametre comme  $a$  est à  $c$ , en se servant de la septième & de la troisième équation. 3°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Hyperbole dont l'axe parallele à  $AP$  est à son parametre comme  $aa$  est à  $bb$ , en se servant de la septième & de la quatrième équation. Or comme la ligne  $a$ , dont on se sert pour reduire sous l'expression  $ac$  toutes les quantités qui multiplient  $xx$ , sous l'expression  $aad$  celles qui multiplient  $x$ , & enfin sous l'expression  $aif$  les quantités entierement connues, est arbitraire; il s'ensuit qu'en prenant pour cette ligne  $a$  une infinité de différentes grandeurs, on pourra construire l'égalité proposée par le moyen d'une infinité de cercles, & d'Ellipses, ou d'Hyperboles équilateres & non équilateres, toutes différentes entr'elles.

On a vû dans l'article 387. qu'en prenant pour l'unité arbitraire  $a$  le parametre de l'axe d'une Parabole donnée, on peut en se servant de la première & de la septième équation construire l'égalité proposée par le moyen d'un cercle & de la Parabole donnée; & je vais faire voir qu'en déterminant cette ligne  $a$  d'une certaine maniere, on peut construire l'égalité par le moyen d'un cercle & d'une Ellipse ou d'une Hyperbole semblable à une Ellipse ou à une Hyperbole donnée. Car la raison de ses axes étant donnée par la supposition, la raison de l'axe parallele à  $AP$  avec son parametre sera aussi donnée. Si donc l'on nomme cette raison donnée  $\frac{p}{m}$ ; on aura lorsqu'il s'agit de l'Ellipse  $\frac{c}{a} = \frac{p}{m}$ , & partant  $aa = \frac{acm}{p}$ ; d'où il suit que si l'on prend pour l'unité arbitraire  $a$ , la racine d'un quarré  $aa$  égal \* à une

\* Art. 378.

quantité connue  $ac$  qui multiplie  $xx$  dans l'égalité donnée



donnée, & est multipliée par  $\frac{m}{n}$ , on construira l'égalité en se servant de la septième & de la troisième équation, par le moyen d'un cercle & d'une Ellipse dont l'axe parallèle à  $AP$ , sera à son parametre comme  $m$  est à  $n$ , puisque  $\frac{n}{m} = \frac{c}{a}$ . Mais lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole, on aura  $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$ , & partant  $a = b\sqrt{\frac{m}{n}}$ , d'où l'on voit que si l'on prend pour l'unité  $a$  cette valeur, & qu'on construise l'égalité en se servant de la septième & de la quatrième équation, l'axe parallèle à  $AP$  de l'Hyperbole qui est le lieu de la quatrième, sera à son parametre comme  $m$  est à  $n$ , puisque  $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$ . Et c'est ce qui étoit proposé.

#### REMARQUE V.

393. LA ligne  $a$  qui fait l'office de l'unité, & qui est arbitraire, suffit comme l'on vient de voir pour construire l'égalité proposée, par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée, ou bien par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse, ou d'une Hyperbole semblable à une donnée. Mais lorsqu'il est question de la construire par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse, ou d'une Hyperbole donnée, une seule ligne arbitraire ne suffit pas; il faut en introduire d'autres dans l'égalité proposée, afin de pouvoir les déterminer ensuite de manière que la Section donnée serve. C'est ce que l'on va exécuter dans le Lemme suivant.

#### LEMME FONDAMENTAL

*Pour la construction des Egalités du troisième & du quatrième degré, avec un cercle & une Ellipse, ou une Hyperbole donnée.*

394. SOIT l'égalité du quatrième degré  $x^4 + abxz - aacz + a^2d = 0$ , dans laquelle les lettres  $a, b, c, d$ ,  
R r

marquent des lignes données, & la lettre  $x$  exprime les racines inconnues de l'égalité. Je prends une autre inconnue  $x = \frac{fz}{a}$  (la lettre  $f$  marque une ligne prise à volonté), & substituant à la place de  $x$ ,  $xz$ , &  $x^2$  leurs valeurs  $\frac{fz}{a}$ ,  $\frac{f^2xz}{a^2}$ , &  $\frac{f^2z^2}{a^2}$  dans l'égalité précédente, je la change en cette autre  $x^2 + \frac{bf}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{df}{a} = 0$ ; je prends une troisième inconnue  $y$  telle qu'étant multipliée par  $f$  son produit  $fy$  soit égal au carré  $xx$  de la seconde; ce qui donne les équations suivantes.

1°.  $xx - fy = 0$ ; & substituant à la place de  $xx$ , & de  $x^2$  leurs valeurs  $fy$  &  $ffyy$  dans l'égalité  $x^2 + \frac{bf}{a}xx + \frac{cf}{a}x + \frac{df}{a} = 0$ , j'ai pour seconde équation.

2°.  $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}x + \frac{df}{a} = 0$ , laquelle étant ajoutée à la première, donne pour troisième équation.

3°.  $yy + \frac{bf}{a}y - fy + xx - \frac{cf}{a}x + \frac{df}{a} = 0$ , dont le lieu est \* un cercle lorsque les inconnues & indéterminées  $x$  &  $y$  font entr'elles un angle droit. Je multiplie la première équation par la fraction  $\frac{g}{a}$  dans laquelle  $g$  exprime une ligne telle qu'on veut de même que  $f$ , & j'ai  $\frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}y = 0$ ; Et ajoutant cette équation avec la seconde, & l'en ôtant ensuite, je forme la quatrième & la cinquième équation.

4°.  $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}y + \frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}x + \frac{df}{a} = 0$ , dont

\* Art. 324. le lieu est \* une Ellipse.

5°.  $yy + \frac{bf}{a}y + \frac{cf}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}x + \frac{df}{a} = 0$ , dont

\* Art. 332. le lieu est \* une Hyperbole ou les Hyperboles opposées.

#### REMARQUE.

395. S'IL arrive que quelques termes de l'égalité proposée aient des signes différens de celle-ci, ou qu'ils

manquent, les lieux de ces cinq équations seront toujours néanmoins des Sections coniques de même nom : c'est à dire que les lieux de la première & de la seconde équation seront toujours des Paraboles, celui de la troisième, un cercle, &c.

PROPOSITION V.

Problème.

396. CONSTRUIRE l'égalité du quatrième degré  $z^4 + abzz - 2acz + a^2d = 0$ , avec un cercle donné & une Hyperbole semblable à une donnée; ou avec une Hyperbole donnée & un cercle.

Je construis séparément \* les lieux de la troisième & de la cinquième équation, en prenant pour les incon-  
nuës & indéterminées  $x$  &  $y$  les mêmes lignes  $AP$ ,  $PM$ , qui fassent entr'elles un angle droit  $APM$ ; & les intersections de ces deux lieux me servent à déterminer les valeurs de l'inconnuë  $z$ , de la manière qui suit.

Soit menée par le point  $A$  origine des  $x$ , la ligne  $AD = \frac{af-bf}{2a}$  parallèle à  $PM$ , & du même côté lorsque  $a$  surpasse  $b$ , & au contraire du côté opposé lorsqu'il est moindre. Et ayant tiré la droite indéfinie  $DG$  parallèle à  $AP$ , soient prises sur cette ligne du côté de  $PM$  la partie  $DC = \frac{g}{2a}$ , & soit décrit du centre  $C$  & du rayon  $CF$  ou  $CG = \frac{f}{2a} \sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$ , un cercle. Maintenant ayant mené  $AH = \frac{bf+gf}{2a}$  parallèle à  $PM$  & du côté opposé, soit tirée la droite indéfinie  $HK$  parallèle à  $AP$ , sur laquelle soient prises la partie  $HI = \frac{g}{2g}$  du côté opposé à  $PM$ , & de part & d'autre du point  $I$  les parties  $IK, IL$ , égales chacune à  $\frac{f}{2g} \sqrt{cc - hg + 4dg}$  ou  $\frac{f}{2g} \sqrt{hg - 4dg - cc}$  (qua

R r ij

pris pour abréger  $h = \frac{b+g}{a}$ ). Soit enfin décrite de l'axe

$LK$  (qui doit être le premier lorsque  $cc - 4dg$  est plus grand que  $hg$ , & le second lorsqu'il est moindre) qui soit à son paramètre  $KO$  comme  $a$  est à  $g$ , une Hyperbole ou les Hyperboles opposées qui rencontrent le cercle en des points  $M, M$ , d'où soient abaissées des perpendiculaires  $MP, MP$ , sur la ligne  $AP$ . Je dis que les parties  $AP, AP$ , de cette ligne seront les racines de l'égalité  $x^4 - \frac{bf}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = 0$ ; en observant qu'elles sont vraies lorsque les points  $P$  tombent du côté où l'on a supposé  $PM$  en faisant la construction, & fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car on trouvera par la propriété du cercle la troisième équation; & par la propriété de l'Hyperbole, la cinquième; & ôtant la troisième de la cinquième, on aura  $\frac{cf}{a}y - \frac{f}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{g}{a}xx = 0$ , d'où l'on tire  $y = \frac{xx}{f}$ ; & mettant dans l'une ou dans l'autre de ces deux équations à la place de  $y$  cette valeur  $\frac{xx}{f}$ , & à la place de  $yy$  son carré  $\frac{x^4}{f}$ , on trouvera l'égalité  $x^4$  &c. Mais ayant les valeurs de  $x$ , on a celles de  $z$ ; puisque  $z = \frac{ax}{f}$ .

Maintenant pour satisfaire à la première demande du Problème, je nomme le rayon du cercle donné  $CF, r$ ; & j'ai par conséquent  $r = \frac{f}{2a} \sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$ ; d'où il suit que si l'on prend  $f = \frac{2ar}{\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}}$ , le rayon  $CF$  ou  $CG$  du cercle qui est le lieu de la troisième équation, sera égal à la donnée  $r$ . Il reste à faire que l'Hyperbole soit semblable à une donnée, c'est à dire, que son premier ou second axe  $LK$  soit à son paramètre  $KO$  en raison donnée de  $m$  à  $n$ ; & il est visible qu'il ne faut pour cela que prendre  $g = \frac{an}{m}$ , puisque  $LK.$   
 $KO :: a. g :: m. n.$

Enfin pour faire en sorte que l'Hyperbole soit donnée, ou, ce qui est la même chose que son premier ou second axe  $LK$  & le parametre  $KO$  de cet axe soient égaux à des lignes données; je nomme d'abord le premier axe  $LK$ ,  $2t$ ; son parametre  $KO$ ,  $p$ ; & j'ai  $KO(p) = \frac{2t^2}{a}$ , &  $LK(2t) = \frac{f}{g} \sqrt{cc + 4dg - bg}$  (il faut se souvenir que  $b = \frac{b^2 + a^2}{a}$ ); ce qui donne  $g = \frac{2t^2}{2t}$ , &  $f =$

$\frac{2t^2}{\sqrt{cc + 4dg - bg}}$ : d'où l'on voit que si  $cc + 4dg$  surpasse  $bg$ , & qu'on prenne pour  $g$  & pour  $f$  ces valeurs, on trouvera dans la construction de la cinquième équation pour le premier axe  $LK$  & son parametre  $KO$  les lignes données  $2t$  &  $p$ . Mais s'il arrive que  $cc + 4dg$  soit moindre que  $bg$ , il faudra nommer le second axe  $LK$ ,  $2t$ ; & son parametre  $KO$ ,  $p$ ; ce qui donne comme ci-dessus  $g = \frac{2t^2}{2t}$ , &  $f = \frac{2t^2}{\sqrt{bg - cc - 4dg}}$ ; où l'on doit observer que  $2t$  &  $p$  ne marquent plus à présent les mêmes lignes qu'auparavant: & s'il arrive que  $bg$ , dans cette dernière supposition où  $2t$  marque le second axe, surpasse  $cc + 4dg$ , il est visible qu'en prenant pour  $g$  &  $f$  ces valeurs dans la construction de la cinquième équation, on trouvera pour le second axe  $LK$  & son parametre  $KO$  les lignes données  $2t$  &  $p$ .

Il faut bien remarquer qu'il peut arriver que la valeur de  $f$  soit imaginaire dans l'une & dans l'autre de ces suppositions; & alors on voit que la construction devient impossible du moins par cette methode. Or comme tous les Auteurs qui s'en sont servis après M. Sluze qui en est l'inventeur, la donnent pour generale; j'en ferai une remarque à part, où je ferai voir en examinant par ordre tous les cas qui peuvent arriver, que dans cet exemple même il peut y en avoir une infinité où cette methode ne réussit point.

Si c'étoient deux Hyperboles conjuguées qui fussent données, la construction seroit toujours possible; car si

après avoir nommé le premier axe d'une de ces Hyperboles  $LK$ ,  $2t$ ; & son parametre  $KO$ ,  $p$ ; il se trouvoit que la valeur de  $f = \frac{2g^2}{\sqrt{cc+4dc-bg}}$  fût imaginaire, c'est à dire, que  $bg$  surpassât  $cc+4dg$ ; il n'y auroit qu'à se servir dans la construction à la place de cette Hyperbole de sa conjugée & de son second axe, puisque le second axe de celle-ci étant le même que le premier axe de l'autre, la valeur de  $f$  ne renfermeroit plus aucune contradiction. Je dois encore avertir que s'il arrive que  $cc+4dg=bg$ , l'équation du quatrième degré s'abaisse à une du second.

## REMARQUE.

397. 1°. Si l'Hyperbole donnée est équilatere. On aura  $g=a$ , & on se servira dans la construction du Problème de son premier axe, lorsque  $cc+4dg$  surpassé  $bg$ , c'est à dire, en mettant pour  $b$  sa valeur  $\frac{b+g^2}{a}$ , & pour  $g$  sa valeur  $a$ , lorsque  $cc+4ad$  surpassé  $\overline{b+a^2}$ ; & du second lorsqu'il est moindre. Et la construction sera toujours possible.

2°. Si le premier axe de l'Hyperbole donnée surpassé son parametre. On se servira dans la construction du Problème de son premier axe, lorsque  $cc+4ad$  surpassé  $\overline{b+a^2}$ ; car il suit de là que  $cc+4dg$  surpassé  $bg$ , c'est à dire (en multipliant par  $\frac{a}{g}$  & mettant pour  $b$  sa valeur  $\frac{b+g^2}{a}$ ) que  $\frac{acc}{g}+4ad$  surpassé  $\overline{b+g^2}$ , puisque dans cette supposition  $g$  ( $\frac{ap}{2t}$ ) étant moindre que  $a$ , la quantité  $\frac{acc}{g}+4ad$  sera plus grande que  $cc+4ad$ , &  $\overline{b+g^2}$  sera moindre que  $\overline{b+a^2}$ . Au contraire lorsque  $cc+4ad$  est moindre que  $\overline{b+a^2}$ , il faudra se servir du second axe; car il suit de là que  $cc+4dg$  est moindre que  $bg$ , ou que  $\frac{acc}{g}+4ad$  est moindre que  $\overline{b+g^2}$ .

Puisque  $2t$  marquant à présent le second axe qui est moindre que son paramètre  $p$  la quantité  $\frac{ap}{2t}$  est ici plus grande que  $a$ . D'où l'on voit que la construction est toujours possible, non seulement lorsque l'Hyperbole donnée est équilatère, mais encore lorsque le premier axe est plus grand que son paramètre.

3°. Si le premier axe est moindre que son paramètre. Il faudra nécessairement lorsque  $cc + 4ad$  surpasse  $\overline{b+a^2}$ , se servir du premier axe; car si l'on employoit le second, il faudroit que  $cc + 4dg$  fût moindre que  $bg$ , ou que  $\frac{ac}{g} + 4ad$  fût moindre que  $\overline{b+g}$ ; ce qui ne peut être, puisque  $2t$  qui exprimeroit alors le second axe étant plus grand que  $p$ , la quantité  $g \left( \frac{ap}{2t} \right)$  seroit moindre que  $a$ . Mais en se servant du premier axe, il peut arriver que  $\frac{ac}{g} + 4ad$  soit moindre que  $\overline{b+g}$ , puisque  $g \left( \frac{ap}{2t} \right)$  est plus grand que  $a$ ; & alors il est évident que la construction du Problème devient impossible, parce que la valeur de  $f \left( \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-bg}} \right)$  renferme une contradiction. De même lorsque  $cc + 4ad$  est moindre que  $\overline{b+a^2}$ , il faut nécessairement se servir du second axe; & comme alors la valeur de  $g \left( \frac{ap}{2t} \right)$  est moindre que  $a$ , il peut arriver que  $\frac{ac}{g} + 4ad$  soit plus grand que  $\overline{b+g}$ , & qu'ainsi la valeur de  $f \left( \frac{2gt}{\sqrt{bg-ac-4dg}} \right)$  soit imaginaire.

Il est donc évident qu'il peut arriver une infinité de cas, où la construction de l'égalité proposée dans le Problème devient impossible; & cela lorsque le premier axe de l'Hyperbole donnée est moindre que son paramètre, car autrement elle réussira toujours.

## COROLLAIRE I.

389. Si l'on prenoit dans le Problème précédent la quatrième équation au lieu de la cinquième, & qu'on fît la construction de même en se servant de l'Ellipse qui est le lieu de cette équation, au lieu de l'Hyperbole qui est le lieu de la cinquième : il est visible que l'on construïroit l'égalité proposée  $x^4$  &c. par le moyen d'un cercle donné & d'une Ellipse semblable à une donnée ; ou avec une Ellipse donnée & un cercle.

## COROLLAIRE II.

399. Il est évident qu'on peut rendre la construction précédente générale pour toutes sortes d'égalités du troisième & du quatrième degré, en observant, 1°. De faire évanouir le second terme de l'égalité donnée, lorsqu'elle en a un ; de la multiplier ensuite par sa racine  $x$  lorsqu'elle n'est que du troisième degré ; & de prendre un plan  $ab$  égal à tous les plans qui multiplient  $xx$ , un solide  $aac$  égal à tous les solides qui multiplient  $x$ , & enfin un sursolide  $a^3d$  égal à tous les sursolides donnés. 2°. D'effacer dans les valeurs de  $AD$ ,  $DC$ ,  $CF$ ,  $AH$ ,  $IH$ ,  $LK$ , les termes où se trouve  $b$  lorsque  $xx$  ne se rencontre point dans l'égalité donnée, ceux dans lesquels se rencontrent  $c$  ou  $d$  lorsque le quatrième ou le cinquième terme manquent : & de changer de signes tous les termes où  $b$  se rencontre avec une dimension impaire, si le troisième terme de l'équation donnée a un signe différent du troisième de la précédente, comme aussi ceux dans lesquels  $c$  ou  $d$  se rencontrent avec une dimension impaire lorsque le quatrième ou le cinquième terme ont des signes différens des quatrième & cinquième de l'égalité précédente. 3°. De prendre du côté de  $PM$  ces lignes lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont négatives.

REMARQUE.



## REMARQUE.

400. ON peut toujours rendre la construction précédente plus simple dans les égalités particulières qu'on se propose de construire, en faisant en sorte que  $a$  soit égal à  $b$ ; car il n'y a qu'à réduire l'égalité donnée sous cette forme  $x^4 + aaxx + aacz + a^3d = 0$ , au lieu de cette autre  $x^4 + abxx + aacz + a^3d = 0$ . Ce qui a empêché de le faire d'abord, c'est qu'on avoit en vûe de rendre la construction du Problème générale pour tous les cas, comme l'on vient de faire dans le Corollaire précédent, & que pour cet effet il falloit que chaque terme de l'égalité renfermât des lettres différentes  $b, c, d$ , au premier degré.

## PROPOSITION VI

## Problème.

401. CONSTRUIRE les racines de l'égalité  $z^4 - bz^3 - aczz + aadz + aabb = 0$ , par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ses Asymptotes, & d'un cercle.

Ayant fait  $z = \frac{ax}{f}$ , on transformera l'égalité donnée FIG. 222. en cette autre  $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cf}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{bbf^4}{aa} = 0$ .

Ayant mené d'un point quelconque  $M$  de l'Hyperbole donnée qui a pour centre le point  $A$ , une parallèle  $MP$  à l'une des Asymptotes  $AQ$ , & qui rencontre l'autre au point  $P$ , on nommera les inconnues & indéterminées  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; lesquelles font entr'elles un angle donné  $APM$ , & on aura par la propriété de l'Hyperbole  $xy = mm$ , en supposant que  $mm$  en soit la puissance. Maintenant si l'on prend  $f = m\sqrt{\frac{a}{b}}$ , on aura  $bbf^4 = amm$ , &  $\frac{bbf^4}{aa} = m^4 = xxyy$ : & mettant à la place de  $\frac{bbf^4}{aa}$  qui est le dernier terme de l'égalité précédente sa valeur  
Ss

$xyy$ , & divisant ensuite par  $xx$ , on trouvera  $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{df}{a} + \frac{df^3}{ax} + yy = 0$ , qui se change (en mettant dans le terme  $\frac{df^3}{ax}$  à la place de  $x$  sa valeur  $\frac{bf}{ay}$  trouvée par le moyen de l'équation  $xy = mm = \frac{bf}{a}$ ) en cette autre  $xx$

\* Art. 328.  $-\frac{bf}{a}x - \frac{df}{a} + \frac{df}{b}y + yy = 0$ , dont le lieu est \* un cer-  
 & 329. cle lorsque l'angle  $APM$  est droit.

Mais lorsque l'angle  $APM$  n'est pas droit, ou (ce qui revient au même) lorsque l'Hyperbole donnée n'est pas équilatère, il est évident que le lieu de la dernière équation n'est plus un cercle, mais une Ellipse. C'est pourquoi afin de trouver une équation dont le lieu soit un cercle, je prens sur l'Asymptote  $AP$  la partie  $AB = 2a$ : & ayant mené  $BE$  parallèle à l'autre Asymptote  $AQ$ , je tire du centre  $A$  la perpendiculaire  $AE$  sur  $BE$ : & nommant les données  $BE, g$ ;  $AE, e$ ; je multiplie l'équation  $xy - mm = 0$ , dont l'Hyperbole donnée est le lieu, par  $\frac{e}{a}$ ; & j'ai  $\frac{exy}{a} - \frac{emm}{a} = 0$ . J'ajoute ensuite cette équation à la précédente lorsque l'angle fait par les Asymptotes est aigu, & je l'en retranche lorsqu'il est obtus comme je le suppose dans cette figure: cela me donne  $yy - \frac{e}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{df + gmm}{a} = 0$ ,

\* Art. 327. dont le lieu est un cercle \* qui se construit ainsi.  
 & 329.

FIG. 222. Soit prise sur l'Asymptote  $AQ$  la partie  $AD = \frac{df}{ab}$  du côté opposé à  $PM$ : soit tirée parallèlement à  $AE$ , la ligne  $DC = \frac{bf}{e} - \frac{df}{ab}$  du côté de  $PM$  lorsque cette valeur est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative: Enfin du centre  $C$  & du rayon  $CM = \sqrt{AC^2 + \frac{df - gmm}{a}}$  soit décrit un cercle. Je dis qu'il coupera l'Hyperbole donnée & son opposée en des points  $M$ , d'où ayant mené des parallèles  $MP$  à l'Asymptote

*AQ*; les parties *AP* de l'autre Asymptote exprimeront les racines de l'égalité  $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{df}{a}xx + \frac{df^2}{a}x - \frac{bbf^2}{aa} = 0$ : savoir celles qui sont du côté de *PM*, les vraies; & celles qui sont du côté opposé, les fausses.

Car par la propriété du cercle, on trouve cette équation  $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y - xx - \frac{bf}{a}x - \frac{df + gmm}{a} = 0$  qui se réduit (en mettant pour *xy* la valeur *mm*) à cette autre  $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{df}{a} + \frac{df}{b}y - yy = 0$ , dans laquelle mettant enfin pour *y* la valeur  $\frac{mm}{x}$  ou  $\frac{bf}{ax}$ , & pour *yy* le quarré de cette valeur, on retrouve l'égalité même proposée  $x^4 - \frac{bf}{a}x^3$  &c.

Si l'angle fait par les Asymptotes étoit aigu, il faudroit changer dans les valeurs de *AD* & de *CM*, les signes des termes où *g* se rencontre, dont la raison est que *BE* (*g*) devient negative de positive qu'elle étoit. Mais lorsque l'Hyperbole est équilatere, il faut effacer les termes où *g* se rencontre & mettre pour *e* la valeur 2 *a*, parce que *AE* tombe alors sur *AB*: ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

Lorsqu'on a les différentes valeurs de *x*, il est évident qu'on a aussi celles de *z*, en faisant  $z = \frac{ax}{f}$ . Et c'est ce qui étoit proposé.

#### COROLLAIRE I.

402. Si le dernier terme de l'égalité proposée du quatrième degré, avoit le signe —, il est clair qu'en opérant comme ci-dessus, on trouveroit une équation dans laquelle le terme *yy* auroit le signe —, & dont le lieu par conséquent ne seroit pas un cercle, mais \* une Hyper- \* *Art. 332.* bole. D'où l'on voit que cette methode ne peut servir que pour les égalités du quatrième degré qui ont leur dernier terme avec le signe +.

## COROLLAIRE II.

403. ON pourra toujours en se servant de la méthode précédente, résoudre toute égalité donnée du troisième degré  $x^3 + nxx + apx + aaq = 0$ ; par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ses Asymptotes, & d'un cercle. Car la multipliant par  $x + r$  lorsqu'il y a  $+aaq$ , & par  $x - r$  lorsque c'est  $-aaq$ , on la changera toujours en cette autre du quatrième degré.

$$x^4 + nx^3 + apxx + aaqx - +aaqr = 0, \\ +r \quad +nr \quad +apr$$

dont le dernier terme  $aaqr$  aura toujours le signe  $+$ , & qui sera par conséquent du nombre de celles qu'on peut construire de la manière précédente.

Mais on abrégera beaucoup la construction en observant 1°. De prendre pour l'unité arbitraire  $a$  la ligne  $m$  racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, qui est le lieu de l'équation  $xy = mm = aa$ , puisque  $m = a$ . 2°. De profiter de l'indéterminée  $r$  pour égaler le dernier terme  $aaqr$  avec  $a^4 = xxxy$ ; ce qui donne  $r = \frac{aa}{q}$ . 3°.

Que le cercle qui doit déterminer par ses intersections les racines de l'égalité coupera nécessairement l'Hyperbole lorsqu'il y a  $-aaq$ , & son opposée lorsque c'est  $+aaq$ , en un point  $K$ , d'où ayant mené une parallèle  $KH$  à l'Asymptote  $AQ$ , la partie  $AH$  de l'autre Asymptote doit être égale à  $r$ , puisque l'égalité du quatrième degré a pour une de ses racines  $x = +r$ . De là on tire cette construction qu'il est facile de rendre générale pour toutes les égalités du troisième degré.

Fig. 223.

Jé suppose que l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole donnée soit aigu, & qu'ayant pris pour l'unité arbitraire  $a$  la racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, on ait réduit l'égalité donnée du troisième degré sous cette expression  $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$ . Ayant pris sur l'Asymptote  $AP$  la partie  $AB = 2a$ , & mené  $BE$  parallèle à l'autre Asymptote  $AQ$ , on tire

du centre  $A$  la perpendiculaire  $AE$  sur  $BE$ ; & ayant pris sur  $AQ$  la partie  $AL = q$  du côté de  $PM$ , parce qu'il y a  $-aaq$  dans l'égalité donnée, on tirera  $LK$  parallèle à  $AP$ , & qui rencontre l'Hyperbole au point  $K$ . Cela fait, on nommera les données  $BE, g$ ;  $AE, e$ ;  $LK, r$ ; & on prendra sur l'Asymptote  $AQ$  la partie  $AD = \frac{e^2}{2a} - \frac{1}{2}q = -\frac{1}{2}d$  pour abréger, & on tirera  $DC = \frac{ae + ar + d^2}{e}$  parallèle à  $AE$ , en observant de prendre ou mener ces lignes du côté de  $PM$  lorsque leurs valeurs sont positives & du côté opposé lorsqu'elles sont négatives. On décrira enfin du centre  $C$ , & du rayon  $CK$ , un cercle qui coupera les Hyperboles opposées en des points  $M$ , d'où ayant mené des droites  $MP$  parallèles à l'Asymptote  $AQ$ ; les parties  $AP$  de l'autre Asymptote seront les racines de l'égalité proposée  $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$ .

Car prolongeant les droites  $MP, KH$ , jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne  $DC$  aussi prolongée, s'il est nécessaire, aux points  $G, F$ ; on aura (à cause des triangles rectangles  $CFK, CGM$ ) ces deux égalités  $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{CM}^2$ , &  $\overline{FK}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CK}^2$ ; & par conséquent  $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$ , puisque les lignes  $CM, CK$ , sont rayons d'un même cercle. Or par la construction (je suppose ici pour éviter l'embarras des signes  $+$  &  $-$ , que  $\frac{e^2}{2a} - \frac{1}{2}q = -\frac{1}{2}d$ , c'est à dire, que cette valeur est positive)  $GM$  ou  $PM - PG = y + \frac{e}{2a}x - \frac{1}{2}d$ ,  $CG$  ou  $DG - DC = \frac{e^2}{2a} - \frac{ae + ar + d^2}{e}$ ,  $FK$  ou  $KH - HF = q - \frac{e}{2a}r + \frac{1}{2}d$ ,  $CF$  ou  $CD - DF = \frac{ae + ar + d^2}{e} - \frac{er}{2a}$ . C'est pourquoi mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques dans l'égalité précédente  $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$ , on en formera d'abord celle-ci  $yy + \frac{e}{a}xy + 2dy + \frac{e^2 + e^2}{4a^2}xx$

$-nx - rx = qq + \frac{2}{a}rq + 2dq + \frac{2g+e}{4aa}rr - nx - rr$ ,  
 en s'épargnant la peine d'écrire de part & d'autre les  
 quarrés de  $d$  & de  $\frac{2g+e}{4aa}$  qui se détruisent mutuel-  
 lement. Si l'on considère à présent qu'à cause de l'Hy-  
 perbole, le rectangle  $xy = rq$ , & qu'à cause du trian-  
 gle rectangle  $AEB$  le quarré  $4aa = gg + ee$ , on  
 changera l'équation précédente en celle-ci  $yy + 2dy$   
 $+ xx - nx - rx = qq + 2dq - nr$ , dans laquelle met-  
 tant d'abord à la place de  $d$  sa valeur  $\frac{r}{a} - q$ , & en-  
 suite à la place de  $y$  &  $yy$  leurs valeurs  $\frac{aa}{x}$  &  $\frac{a^4}{xx}$ , & or-  
 donnant l'égalité il vient

$$\begin{aligned}
 x^4 - nx^3 - apxx - aaqx + a^4 &= 0, \\
 -n + nr &+ apr
 \end{aligned}$$

qui étant divisée par  $x - r$ , donne enfin  $x^3 - nxx - apx$   
 $- aaq = 0$ , qu'il falloit construire.

Pour rendre cette construction generale il faut obser-  
 ver, 1°. De prendre la partie  $AL$  sur l'Asymptote  $AQ$   
 du côté opposé à  $PM$  lorsqu'il y a  $+aaq$  dans l'éga-  
 lité donnée; & de changer de signes les termes où  $q$  &  
 $r$  se rencontrent dans les valeurs de  $AD$ ,  $DC$ , 2°. De  
 changer de signes le terme où  $p$  se rencontre dans la va-  
 leur de  $AD$  lorsqu'il y a  $+apx$  dans l'égalité donnée,  
 & de l'effacer lorsque ce terme y manque: il faut faire  
 la même chose à l'égard du terme où  $n$  se rencontre  
 dans la valeur de  $DC$ , lorsqu'il y a  $+nxx$ . 3°. De  
 changer de signe le terme où  $g$  se rencontre dans la va-  
 leur de  $DC$ , lorsque l'angle fait par les Asymptotes est  
 obtus, & de l'effacer lorsqu'il est droit, en observant  
 alors que  $e = 2a$ .

#### REMARQUE.

**404.** L'ALGÈBRE nous fournit des moyens faciles  
 pour transformer toute égalité du quatrième degré, en  
 une autre du même degré dont les signes des termes  
 soient alternatifs. Or comme alors son dernier terme

sara toujours le signe  $+$ , il est visible qu'en se servant de cette préparation lorsque le dernier terme de l'égalité qu'on veut construire a le signe  $-$ , on rend la methode du Problème generale pour toutes sortes d'égalités du quatrième degré. Mais parce que toutes les racines réelles d'une égalité sont vraies, lorsque les signes de ses termes sont alternatifs; il s'ensuit qu'on n'a besoin alors que de l'Hyperbole donnée, puisque son opposée qui ne sert que pour les racines fausses devient inutile.

## PROPOSITION VII.

### Problème.

405. SOIT proposée à construire l'égalité du sixième degré  $x^6 - bx^5 + acx^4 + 2adx^3 + a^2exx - a^2fx + a^2g = 0$ , ou  $x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + exx - fx + g = 0$  (en s'entendant la ligne  $a$  qui rend le nombre des dimensions égal dans chaque terme, & que l'on regarde comme l'unité); par le moyen d'un cercle, & d'un lieu du troisième degré.

Je prends pour le lieu du troisième degré  $x^3 - mx^2 - nx + q = -pxy$ , dans lequel les quantités  $m, n, p, q$ , que l'on regarde comme données, se doivent déterminer d'une maniere convenable pour satisfaire au Problème; ce que je fais en cette sorte:

en quarrant chaque membre, j'ai

$$x^6 - 2mx^5 + mmx^4 + 2nmx^3 + nnxx - 2nqx + qq = pp xx yy,$$

& comparant les termes  $-2mx^5, -2nqx, +qq$  avec leurs correspondans dans la proposée  $-bx^5, -fx, +g$ ,

je trouve  $m = \frac{1}{2}b, q = \sqrt{g}, n = \frac{f}{2g}$ ; & par conséquent

$x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq = x^6 - bx^5 - fx + g$ . Si l'on met à present à la place de  $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq$  la valeur  $ppxxyy - mmx^4$  &c. trouvée par le moyen de l'équation précédente, & à la place de  $x^6 - bx^5 - fx + g$  la valeur  $-cx^4 - dx^3$  &c. trouvée par le moyen de l'égalité donnée, & qu'ayant divisé par  $xx$ , on transf.

pose toutes les quantités d'un même côté, on formera cette équation

$$ppyy - mmxx - 2mnx - nn = 0,$$

$$+ 2n \quad - 2q \quad + 2mq$$

$$+ c \quad + d \quad + e$$

\* Art. 328. dont le lieu sera \* un cercle si la quantité  $c + 2n - mm$   
 § 329. (qui multiplie le quarré  $xx$ ) est positive, & qu'on prenne  $pp$

$= c + \frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{1}{4}bb$ ; car divisant par  $pp$ , & faisant pour

abreger  $2r = \frac{2mn + 2q - d}{pp}$  &  $ss = \frac{2mq + e - nn}{pp}$  ou  $\frac{mn - 2mq - e}{pp}$ ,

on aura  $yy + xx - 2rx + ss = 0$ : sçavoir  $+ss$  lorsqu'  
 $2mq + e$  surpasse  $nn$ ; &  $-ss$ , lorsqu'il est moindre.

Fig. 224. Pour construire la ligne courbe qui est le lieu de la  
 première équation  $xy - xx - nx + q = -pxy$ , je sup-  
 pose à l'ordinaire deux lignes droites inconnues & indé-  
 terminées  $AP(x)$ ,  $PM(y)$  qui fassent entr'elles un  
 angle droit  $APM$ ; & je tire par l'origine  $A$  des  $x$ , une  
 ligne droite indéfinie  $AQ$  parallèle à  $PM$ , sur laquelle  
 ayant pris du côté de  $PM$  la partie  $AG = \frac{n}{p}$ , & du côté

opposé la partie  $GB = \frac{q}{mp}$ , je mene du côté de  $PM$  la  
 droite  $BC = m$  perpendiculaire à  $AQ$ . Cela fait, je  
 décris sur un plan séparé une Parabole  $MEM$  qui ait  
 pour parametre de son axe la ligne  $p = \sqrt{c + 2n - mm}$ , &  
 ayant placé ce plan sur celui-ci en sorte que l'axe de la  
 Parabole se confonde avec la ligne  $AQ$  & que la Para-  
 bole s'étende vers le côté opposé à  $PM$ , je prends sur  
 cet axe depuis son origine  $E$  vers le dedans de la Para-  
 bole la partie  $EF = BG = \frac{q}{mp}$ . Je me sers enfin d'une  
 longue regle indéfinie  $CF$  mobile autour du point fixe  
 $C$ , & qui passe toujours par le point  $F$ , & la faisant tour-  
 ner autour du point  $C$ , en sorte qu'elle fasse glisser la  
 partie  $EF$  de l'axe de la Parabole le long de la ligne  
 $AQ$ . Je dis que les deux intersections continuelles  $M, M$ ,  
 de cette regle avec la Parabole  $MEM$  décriront dans  
 ce mouvement deux lignes courbes qui seront le lieu  
 qu'on



qu'on demande. Car par la construction  $AB$  ou  $AG - GB = \frac{n}{p} - \frac{q}{mp}$ , & par la propriété de la Parabole  $EQ = \frac{xx}{p}$  puisque  $AP$  ou  $MQ = x$ . Or les triangles semblables  $FQM$ ,  $MDC$ , donnent  $FQ$  ou  $EQ - EF \left( \frac{xx}{p} - \frac{q}{mp} \right) \cdot QM(x) :: DM$  ou  $PM - AB \left( y + \frac{q}{mp} - \frac{n}{p} \right) \cdot CD(m - x)$ . Donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura  $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$ . Et si l'on prend successivement les points  $M$  dans les trois angles qui suivent celui-ci, on trouvera toujours la même équation, en observant de faire  $AP = -x$  &  $PM = -y$  lorsque les points  $P$  &  $M$  tombent du côté opposé à celui-ci: de sorte que ces deux lignes courbes, qu'on peut appeller *conchoïdes paraboliques*, seront le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue  $y$ , qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue  $x$ , dans l'égalité  $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$ .

Pour construire le cercle qui est le lieu de la seconde équation  $yy + xx - 2rx + ss = 0$ , il n'y a qu'à prendre sur la droite indéfinie  $AP$  la partie  $AH = r$  du côté de  $PM$  lorsque la valeur de  $r$  est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative; ensuite du centre  $H$  & du rayon  $HM = \sqrt{rr + ss}$ , sçavoir  $-ss$  lorsqu'il y a  $+ss$  dans l'équation, &  $+ss$  lorsque c'est  $-ss$ , décrire un cercle; car à cause du triangle rectangle  $HPM$ , on aura toujours  $\overline{HM}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PM}^2$ , c'est à dire en mettant les valeurs analytiques, & transposant tous les termes d'un côté  $yy + xx - 2rx + ss = 0$ .

Je dis maintenant que si des points  $M$  où ce cercle rencontre les conchoïdes paraboliques on mene des perpendiculaires  $MQ$  sur la droite indéfinie  $AQ$ ; ces lignes seront les racines de l'égalité proposée: sçavoir celles qui tombent à droit, les vraies; & celles qui tombent à gauche, les fausses. Car menant des paralleles

$MP$  à  $AQ$ , on trouve par la propriété des conchoïdes cette équation  $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$ , c'est à dire, en quarrant chaque membre,  $ppxxyy = -x^6 - 2mx^3 &c$ ; & par la propriété du cercle, cette autre  $yy + xx - 2rx + ss = 0$ , laquelle étant multipliée par  $ppxx$  donne  $ppxxyy = -ppx^4 + 2pprx^3 + ppsxx$ . Et comparant ensemble ces deux valeurs de  $ppxxyy$ , on formera une égalité dans laquelle si l'on met à la place de  $2r$ ,  $ss$ ,  $pp$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $q$ , leurs valeurs, on retrouvera l'égalité proposée  $x^6 - bx^3 &c$ .

S'il y avoit dans l'égalité proposée  $-dx^3$  au lieu de  $+dx^3$ , il est visible qu'en prenant alors  $2r = \frac{2mn + 2q + d}{pp}$ , le reste de la construction ne changeroit point, puisque  $d$  ne se rencontre que dans la valeur de  $r$ . Et comme alors tous les signes des termes de l'égalité proposée sont alternatifs; c'est une maxime reçue en Algebre que toutes ses racines réelles seront vraies; c'est à dire, que si cette égalité a deux racines réelles & quatre imaginaires, les deux réelles seront vraies; si elle en a quatre réelles & deux imaginaires, les quatre seront vraies; & enfin si toutes les six sont réelles, elles seront toutes vraies. D'où l'on voit qu'on n'a besoin alors que de la conchoïde qui est décrite par la moitié de la Parabole qui tombe du côté du point fixe  $C$ , puisque l'autre ne sert que pour les racines fausses.

S'il arrivoit que la valeur du rayon du cercle fût nulle ou imaginaire, ou enfin si petite qu'il ne touchât, ni ne coupât les deux conchoïdes en aucun point; ce seroit une marque infailible que toutes les racines de l'égalité seroient imaginaires. S'il les coupoit en six points, toutes les racines seroient réelles. Et enfin s'il ne les coupoit qu'en quatre ou en deux, il n'y auroit que quatre ou deux racines réelles, & les autres seroient imaginaires. Il faut toujours prendre garde que si le cercle touchoit l'une des conchoïdes en quelque point, on doit regarder ce point comme s'il réunissoit deux points infiniment proches, en sorte que l'égalité proposée auroit deux racines égales à la perpendiculaire menée de ce point sur  $BE$ .

## REMARQUE I.

406. IL suit de la description des deux conchoïdes paraboliques, 1°. Qu'elles ont pour Asymptote commune la droite  $BE$  infiniment prolongée de part & d'autre. 2°. Qu'une des conchoïdes passe par le point fixe  $C$ , & qu'alors la règle  $CF$  la touchera en ce point; puisque le point  $M$  se réunissant au point  $C$ , la règle passe par deux points infiniment proches de cette ligne courbe. 3°. Que lorsque le point  $F$  tombe sur  $B$ , la règle  $CF$  qui décrit par les intersections  $M, M$ , avec la Parabole les conchoïdes, tombe sur  $CB$ ; & qu'ainsi la ligne  $MF$  devient la double ordonnée qui part du point  $F$ : c'est à dire que la ligne  $CB$  rencontre les conchoïdes en deux points  $K, L$ , tels que  $BK$  &  $BZ$  sont égales chacune à l'ordonnée à l'axe de la Parabole qui part du point  $F$ . D'où il est clair que si  $BC$  étoit égale à cette ordonnée, le point  $K$  tomberoit alors sur le point  $C$ ; & qu'ainsi la ligne  $BC$  qui passeroit par deux points infiniment proches  $K, C$  de la conchoïde la toucheroit en se réunissant toute entière dans le seul point  $C$ .

Il n'est pas nécessaire de se servir de la Parabole  $MEM$  Fig. 225; pour trouver les points des conchoïdes; car ayant pris sur  $BE$  la partie  $BO$  égale au parametre de la Parabole, & décrit d'un diametre quelconque  $OR$  plus grand que  $OB$  un cercle qui coupe  $BC$  aux points  $D, D$ ; on prendra sur ce diametre la partie  $RS$  égale à  $EF$ , & on tirera par le point fixe  $C$  les deux droites  $CM, CM$ , paralleles à  $DS, DS$ , qui rencontreront les paralleles  $DM, DM$ , à  $EB$  en des points  $M, M$ , qui seront aux deux conchoïdes. Car ayant prolongé  $CM$  jusqu'à ce qu'elle rencontre l'Asymptote  $BE$  au point  $F$ ; & mené  $MQ$  parallele à  $BC$ ; il est clair que les triangles rectangles  $MQF, DBS$ , seront égaux, & qu'ainsi  $FQ$  est égale à  $BS$ . Or ayant pris  $RS$  égale à  $EF$ ; on aura  $EF + FQ$ , ou  $EQ = RS + SB$  ou  $RB$ ; & la Parabole  $EM$  qui a pour sommet le point  $E$ , & pour

T t ij

parametre une ligne égale à  $BO$ , passera par le point  $M$ ; puisque par la propriété du cercle le quarré de  $BD$  ou  $MQ$ , est égal au rectangle de  $BR$  ou  $EQ$  par le parametre  $BO$ ; ce que donne aussi la propriété de la Parabole. D'où il suit que le point  $M$  trouvé par cette construction, n'est pas différent de celui que donneroit l'intersection de la regle  $CF$  avec la demie Parabole  $EM$ . Et c'est ce qu'il falloit démontrer.

Si le point  $D$  étoit donné, il ne faudroit pour avoir le point  $R$ , que mener  $DR$  perpendiculaire à  $OD$ ; & le reste de la construction ne changeroit point.

J'avertirai ici en passant, 1°. Que si l'on prend sur  $BC$  du côté du point  $C$ , une partie  $BD$  égale à la vraie racine de l'égalité du troisieme degré  $x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}mnp = 0$  (les données  $BC = m, EF = n, BO = p$ ); & qu'on trouve ensuite le point  $M$  comme l'on vient d'enseigner: ce point sera plus éloigné de la droite  $BC$  que tous les autres points de la portion  $KMC$ , de sorte que la tangente qui passe par ce point sera parallele à  $BC$ . 2°. Que si l'on prend sur  $BC$  prolongée de l'autre côté du point  $B$ , une partie  $BD$  égale à la vraie racine de l'égalité  $x^3 - mnp = 0$ ; le point  $M$  de la conchoïde qui répond au point  $D$ , en sera le point d'inflexion: c'est à dire, le point où de concave elle devient convexe. Comme ceci dépend des principes que j'ai établis dans mon Livre des Infiniment petits, on doit le supposer comme vrai, & remettre à en chercher la raison après avoir lû ce Livre ou quelque chose d'équivalent, d'autant plus que cela est inutile pour la resolution des égalités du sixieme degré dont il est ici question.

## REMARQUE II.

407. Il est visible que pour décrire les deux conchoïdes paraboliques, il faut 1°. Que la ligne  $BC$  ( $\frac{1}{2}b$ ) ait quelque grandeur, & qu'ainsi l'égalité proposée doit avoir un second terme. 2°. Que le terme  $q$  ne peut être

nul dans l'équation  $x^3 - mxx - nx - + q = -pxy$ , puisqu'en divisant par  $x$ , elle deviendrait cette autre  $xx - mx - n = -py$ , dont le lieu est une Parabole; d'où il est clair que le dernier terme  $g$  se doit trouver dans l'égalité proposée avec le signe  $-+$ , puisque  $q = \sqrt{g}$ .

De plus si le terme  $fx$  avoit le signe  $-+$ , on lui donneroit le signe  $-$  en changeant aussi les signes du deuxième & du quatrième terme; ce qui ne troubleroit point l'égalité, mais changeroit seulement les racines fausses en vraies & les vraies en fausses. Et afin que le lieu de la deuxième équation pût être un cercle, il faudroit que  $\frac{f}{\sqrt{g}} + c$  (sçavoir  $-+c$  lorsqu'il y a  $-+cx^4$ , &  $-c$  lorsqu'il y a  $-cx^4$ ) surpassât  $\frac{1}{4}bb$ . D'où l'on voit que le terme  $fx$  manquant, il faut que le terme  $cx^4$  ait le signe  $-+$ , & que  $c$  surpassé  $\frac{1}{4}bb$ ; & que si le terme  $cx^4$  manque,  $\frac{f}{\sqrt{g}}$  doit surpasser  $\frac{1}{4}bb$ .

Il est donc évident que ce sont-là les conditions que doit avoir nécessairement l'égalité proposée du sixième degré, afin qu'on la puisse construire immédiatement par le moyen des conchoïdes paraboliques, & du cercle, comme l'on vient de faire la précédente.

### REMARQUE III.

408. LORSQUE l'égalité donnée n'est que du cinquième degré, on peut souvent en l'élevant au sixième, lui donner en même temps toutes les conditions nécessaires pour être construite immédiatement. En voici quelques exemples.

Soit 1°.  $x^5 - a^4b = 0$ , où l'on suppose que  $a$  surpassé  $b$ . Je multiplie cette égalité par  $x - b$ , pour avoir celle du sixième  $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = 0$ , qui a toutes les conditions requises dans la remarque précédente.

Soit 2°.  $x^5 - 5aax^3 + 5a^4x - a^4b = 0$ , dans laquelle  $a$  surpassé  $b$ . Je multiplie cette égalité par  $x - b$ , & j'ai  $x^6 - bx^5 - 5aax^4 + 5aabx^3 + 5a^4xx - 6a^4bx + a^4bb = 0$ ,

qui a toutes les conditions nécessaires.

Soit 3°.  $x^5 - ax^4 - 4aax^3 + 3a^3xx - + 3a^4x - a^5 = 0$ . Je multiplie cette égalité par  $x - 4a$ ; ce qui me donne  $x^6 - 5ax^5 + 19a^3x^3 - 9aaxx - 13a^3x + 4a^6 = 0$ , qui est une égalité du sixième degré, dans laquelle toutes les conditions nécessaires se rencontrent.

Il est bon d'avertir que la première égalité  $x^5 - a^4b = 0$ , sert à trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux extrêmes  $A, B$ ; que la seconde  $x^5 - 5aax^3 &c.$ , sert à diviser un angle donné en cinq parties égales; & enfin que la troisième  $x^5 - ax^4 &c.$  sert à inscrire dans un cercle donné un Polygone regulier de onze côtés: & c'est ce qu'on verra dans les articles du Livre suivant. Je vais donner la construction de la première de ces égalités, afin qu'on la puisse comparer avec celle qu'on trouve à la fin du troisième Livre de la Geometrie de M. Descartès.

FIG. 226.

Ayant décrit une Parabole  $ME$  qui ait pour le parametre de son axe une ligne  $p = \sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$ , & pris du côté que l'on voit dans la figure les lignes  $AG = \frac{aa}{2p}$ ,  $GB$  ou  $EF = 4AG$ ,  $BC = \frac{1}{2}b$ ,  $AH = \frac{5aab}{4pp}$ , & une ligne  $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$ , ou  $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$ ; on décrira d'abord une conchoïde parabolique  $COM$  (comme l'on a enseigné dans l'article 404.) à l'aide de la Parabole  $ME$ , & d'une longue regle  $CF$  qui tourne librement autour du point fixe  $C$ , & qui passe toujours par le point  $F$ , pendant que la partie  $EF$  de l'axe de la Parabole glisse le long de la ligne  $AQ$ ; & ensuite un cercle du centre  $H$  & du rayon  $HM = \sqrt{AH^2 \mp ss}$ , sçavoir  $+ss$  lorsque  $4bb$  surpasse  $aa$ , &  $-ss$  lorsqu'il est moindre. Je dis que si des points  $O, M$ , où ce cercle rencontre la conchoïde, on mene des perpendiculaires  $OR, MP$ , sur  $AP$ ; les parties  $AR, AP$ , seront les racines de l'égalité  $x^5 - bx^4 - a^4bx + a^5bb = 0$ . Cela se prouve comme dans l'article 404.

On peut s'épargner la peine de trouver une ligne  $s = \frac{a}{2p} \sqrt{4bb - aa}$ , ou  $\frac{a}{2p} \sqrt{aa - 4bb}$  ; si l'on fait attention que le cercle décrit du centre  $H$ , doit couper la conchoïde  $COM$  en un point  $O$ , tel qu'ayant mené  $OR$  perpendiculaire sur  $AP$ , on a la partie  $AR = b$  ; puisque l'une des racines de cette égalité est  $x = b$ . C'est pourquoi ayant pris sur  $AP$  la partie  $AR = b$ , & tiré  $RO$  perpendiculaire à  $AP$  & qui rencontre en  $O$  la conchoïde  $COM$  ; il n'y a qu'à décrire du centre  $H$  & du rayon  $HO$  un cercle. Car il la coupera en un autre point  $M$ , tel, qu'ayant mené  $MP$  perpendiculaire sur  $AP$ , la ligne  $AP$  sera la plus grande des quatre moyennes proportionnelles qu'on demande. Comme le cercle décrit du centre  $H$  ne coupe la conchoïde qui passe par le point  $C$  qu'en deux points  $O$ ,  $M$ , & ne rencontre point l'autre ; il s'ensuit que l'égalité proposée  $x^a - bx'$  &c. n'a que deux racines vraies  $AR$ ,  $AP$ , & les quatre autres imaginaires.

#### REMARQUE IV.

409. **LORSQUE** l'égalité donnée du sixième degré, n'a point les conditions nécessaires pour être construite immédiatement par la methode que l'on vient d'expliquer, ou bien qu'étant du cinquième degré, la remarque précédente se trouve inutile, on pourra se servir de la préparation qu'enseigne M. Descartes dans le troisième Livre de sa Geometrie. On y trouve la maniere de transformer toute égalité du cinquième ou du sixième degré en une autre du sixième, dans laquelle tous les termes se rencontrent avec des signes alternatifs, & où la quantité connue du troisième terme surpasse le carré de la moitié de la quantité connue du second : ce qui rend la construction du Problème generale pour toutes sortes d'égalités du cinquième & du sixième degré. Je ne m'arrêterai point ici à expliquer cette préparation, parce qu'elle dépend de l'Algebre pure dont je n'ai point

entrepris de parler, & que d'ailleurs je vais donner dans la Proposition suivante une construction generale pour toutes sortes d'égalités du cinquième & du sixième degré, qui ne suppose point d'autre préparation que celle de faire évanouir le second terme.

## PROPOSITION VIII.

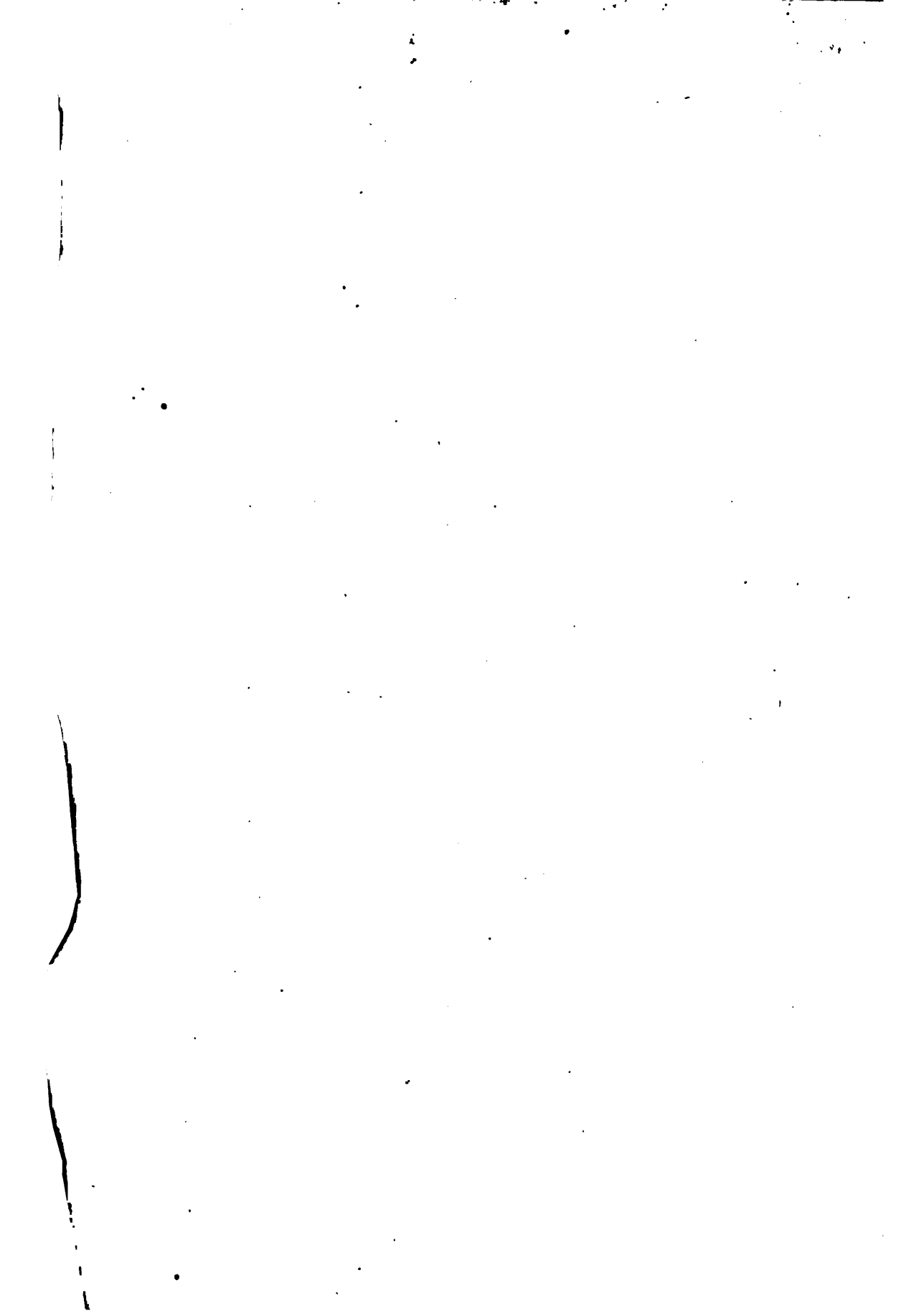
### Problème.

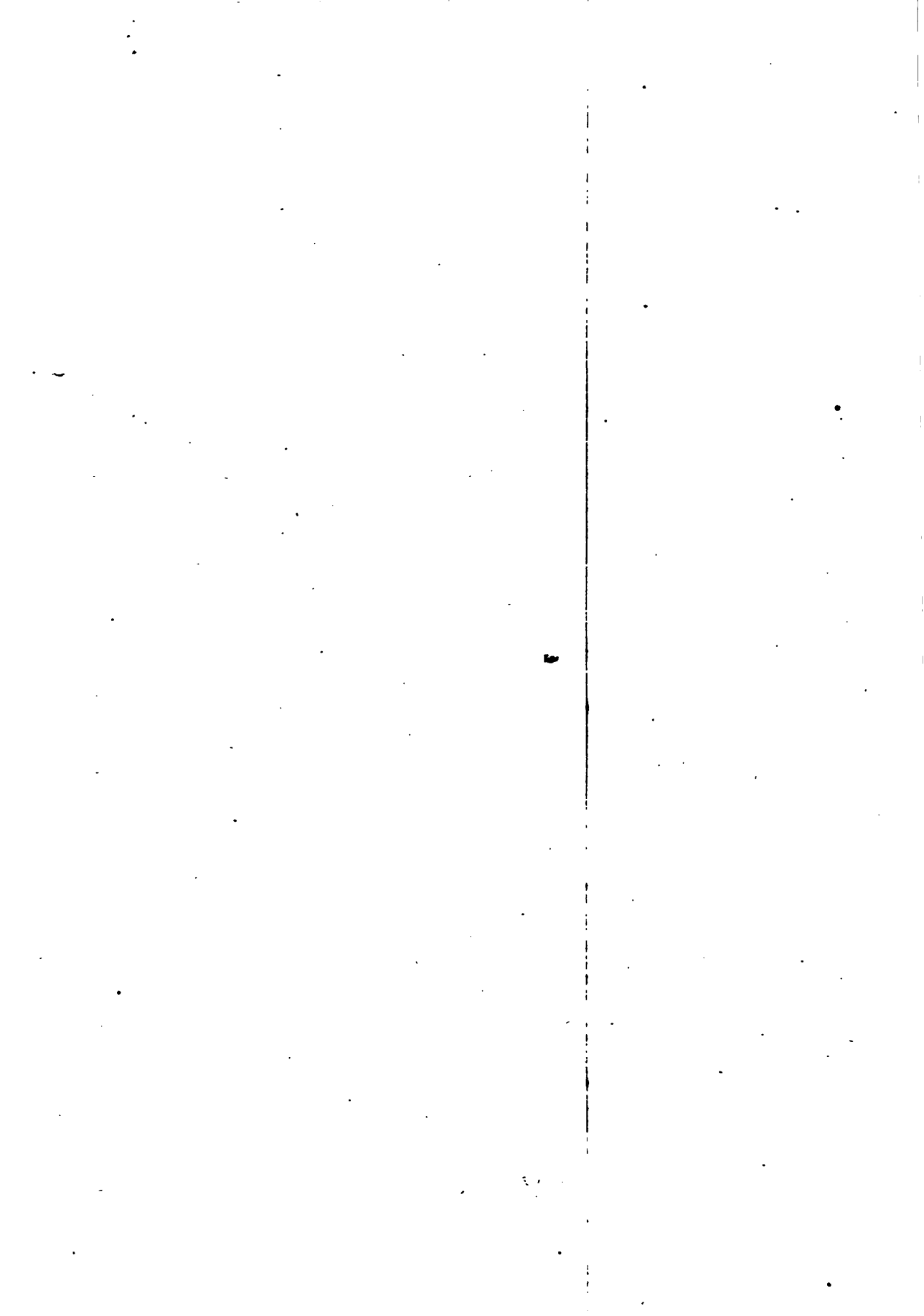
**410. T**ROUVER les racines de l'égalité  $x^5 - bx^4 - cx^3 + dxx - fx + g = 0$ , par le moyen d'une premiere Parabole cubique donnée, & d'une Section conique.

**FIG. 227.** Soit  $ay = x^3$  l'équation dont le lieu est la premiere Parabole cubique  $MAM$  ( $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $AB = a$ ). Je mets dans l'égalité proposée à la place de  $x^5$  la valeur  $a^4yy$ , à la place de  $x^4$  la valeur  $aaxy$ , & à la place de  $x^3$  la valeur  $ay$ ; ce qui la change en cette équation du second degré  $yy - \frac{b}{aa}xy - \frac{c}{aa}y + \frac{d}{a^2}xx - \frac{f}{a^2}x + \frac{g}{a^2} = 0$ , dont le lieu est une Ellipse \* lorsque  $d$  surpasse  $\frac{1}{4}bb$ , c'est à dire, lorsque la quantité connue qui multiplie  $xx$  surpasse le quarré de la moitié de la quantité connue qui multiplie  $x^2$ , comme je le suppose ici. Et si l'on veut que la ligne qui fait l'office de l'unité dans l'égalité proposée, & qui y est sousentendue, soit égale au parametre  $a$  de la Parabole cubique donnée; cette équation se changera en celle-ci  $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$ , dont voici la construction.

Ayant pris sur la droite indéfinie  $AP$  la partie  $AB = a$ , on tirera parallelement à  $PM$  & du même côté les droites  $BE = \frac{1}{2}b$ ,  $AD = \frac{1}{2}c$ : & on menera par le point  $A$  la droite  $AE$  ( $e$ ), & par le point  $D$  une parallele  $DG$  à  $AE$ , sur laquelle on prendra du côté de  $PM$  la partie  $DC$  ( $s$ ) =  $\frac{2afx + bcs}{4ad - bb}$ , & de part & d'autre du point  $C$  les parties







parties  $CK, CL$ , égales chacune à  $t = \sqrt{ss + \frac{ss^2 - 4ag^2}{4ad - bb}}$ ;  
 Cela fait, du diamètre  $LK$  ( $2t$ ) qui ait pour parametre  
 une ligne  $KH = \frac{4adt - bb^2}{2ss}$ , & pour ordonnées des droi-  
 tes paralleles à  $PM$ , on décrira l'Ellipse cherchée.

Maintenant si des points de rencontre de cette Ellipse  
 avec la Parabole cubique donnée, on abaisse des lignes  
 $MP$  qui fassent avec  $AP$  l'angle donné ou pris à volon-  
 té  $APM$ , les parties  $AP$  de la droite indéfinie sur la-  
 quelle s'étend l'indéterminée  $x$  seront les racines cher-  
 chées, sçavoir celles qui tombent du côté où l'on a sup-  
 posé  $PM$  en faisant la construction, les vraies; & celles  
 qui tombent du côté opposé, les fausses. Car par la pro-  
 priété de la Section conique il vient  $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx$   
 $- fx - ag = 0$ , & par la propriété de la Parabole  
 cubique,  $y = \frac{x^3}{aa}$ ; & mettant cette valeur à la place de  
 $y$  & son quarré à la place de  $yy$  dans l'équation préce-  
 dente, on retrouve l'égalité donnée  $x^6 - abx^4 - aacx^3$   
 $&c. = 0$ .

#### REMARQUE I.

411. TOUTE égalité du cinquième ou du sixième  
 degré étant donnée, si l'on en fait évanouir le second  
 terme, & qu'après l'avoir multipliée par l'inconnue  $x$   
 lorsqu'elle n'est que du cinquième degré, on se serve du  
 parametre  $a$  de la Parabole cubique donnée pour rédui-  
 re sous l'expression  $ab$  les quantités connues qui multi-  
 plient  $x^4$ , sous l'expression  $aac$  celles qui multiplient  
 $x^3$  &c; il est visible qu'en faisant la substitution comme  
 ci-dessus, on transformera toujours l'égalité donnée en  
 un lieu du second degré. D'où l'on voit qu'ayant une  
 fois décrit avec exactitude une Parabole cubique qui ait  
 pour parametre une ligne quelconque  $a$ , & dont l'angle  
 $APM$  que font les appliquées  $PM$  avec le diamètre  
 $AP$ , peut être pris à volonté; on pourra toujours par

son moyen, en décrivant de plus une Section conique convenable, refoudre toutes sortes d'égalités du cinquième & du sixième degré.

## REMARQUE II.

412. **L**ORSQU'APRÈS avoir fait évanouir le second terme d'une égalité donnée du cinquième & du sixième degré, & l'avoir multipliée par l'inconnue  $x$  si elle n'est que du cinquième, la quantité connue qui multiplie le quarré  $xx$  est positive, & surpasse le quarré de la moitié de celle qui multiplie  $x^4$ : on arrivera toujours en faisant la substitution par le moyen de  $aay = x^3$ , à une équation du second degré dont le lieu est une Ellipse, comme l'on a vû dans ce Problème. Or l'on pourra toujours faire en sorte que cette Ellipse devienne un cercle, mais alors la Parabole cubique ne peut plus être donnée. Voici comment il s'y faudra prendre.

\* Art. 378. Ayant trouvé une ligne  $a^*$  dont le quarré de quarré  $a^4$  soit égal à la quantité connue qui multiplie  $xx$ , on se servira de cette ligne  $a$  pour reduire sous l'expression  $ab$  toutes les quantités connues qui multiplient  $x^4$ , sous l'expression  $aac$  celles qui multiplient  $x^3$  &c; ce qui reduira l'égalité donnée sous cette forme  $x^6 + abx^4 + aacx^3 + a^4xx + a^4fx + a^4g = 0$ . Et mettant  $a^4yy$ ,  $aaxy$  &  $aay$  à la place de  $x^6$ ,  $x^4$  &  $x^3$ , on trouvera cette équation du second degré  $yy + \frac{b}{a}xy + cy + xx + fx + ag = 0$ , dont le lieu sera \* un cercle, si l'on fait en sorte que l'angle  $AEB$  soit droit; ce qui est facile en cette maniere.

FIG. 228. Ayant pris sur la droite indéfinie  $AP$  la partie  $AB = a$ , on décrira de cette ligne comme diametre un demi cercle  $AEB$ , du côté où l'on suppose que  $PM$  doit tomber, lorsqu'il y a  $-\frac{b}{a}xy$ , & du côté opposé lorsqu'il y a  $+\frac{b}{a}xy$ . On portera sur la demi circonfe-

rence de  $B$  en  $E$ , une ligne  $BE = \frac{1}{2}b$ ; & ayant tiré  $AB$  ( $e$ ), la ligne  $PM$  doit être parallèle à  $BE$ , & on achèvera le reste de la construction comme pour l'Ellipse, qui deviendra alors un cercle; puisque l'angle  $CGM$  sera droit, & qu'à cause du triangle rectangle  $AEB$  il vient  $ce = aa - \frac{1}{2}bb$ , qui doit exprimer la raison du diamètre  $LK$  à son paramètre. La figure qui est ici à côté représente la construction de l'équation  $yy - \frac{1}{2}xy - cy + xx - fx - ag = 0$ , qui n'est différente de celle du Problème qu'en ce que  $a = a$ .

Maintenant ayant pris sur la ligne  $AB$  autant de parties  $AP$ ,  $AP$ , &c. qu'on voudra, & mené des parallèles  $PM$ ,  $PM$ , &c. à  $BE$ ; on prendra chaque  $PM$  égale à la quatrième proportionnelle à sa correspondante  $AP$  & la donnée  $AB$ . Et faisant passer une ligne courbe  $MAM$  par tous les points  $M$  ainsi trouvés, il est évident qu'elle sera le lieu de l'équation  $x^2 = aay$ , & par conséquent la première Parabole cubique qui par ses points d'intersection  $M$ ,  $M$ , avec le cercle, servira à découvrir les racines  $AP$ ,  $AP$ , de l'égalité proposée.

### RÉMARQUE III.

413. COMME l'on a parlé souvent dans ce Livre des Paraboles de tous les degrés, & qu'on vient même d'employer la première Parabole cubique pour résoudre les égalités du cinquième & du sixième degré, je crois qu'il n'est pas hors de propos d'examiner les différentes figures qu'elles peuvent avoir. Soient donc données de position deux lignes droites indéfinies  $BC$ ,  $DE$ , qui s'entrecoupent au point  $A$ , & soit dans l'angle  $BAD$  Fig. 229: une Parabole  $AM$  de tel degré qu'on voudra, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques  $M$  une parallèle  $MP$  à  $DE$ , qui rencontre  $BC$  au point  $P$ ; & ayant nommé les indéterminées  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; la donnée  $AB$ ,  $1$ ; on ait toujours,  $x^m = y^n$  (les lettres  $m$  &  $n$  marquent les exposans des puissances de

$x$  &  $y$  qui peuvent être tels nombres positifs entiers qu'on voudra; & l'on suppose seulement que  $m$  surpasse  $n$ . Il est évident 1°. Que  $AP(x)$  étant nulle ou zero,  $PM(y)$  l'est aussi, & que plus  $AP(x)$  croît, plus aussi  $PM(y)$  augmente; & cela à l'infini. 2°. Que la sous-tangente  $PT$

$\left(\frac{m}{n}x\right)$  est toujours moindre que  $AP(x)$ , puisque l'on suppose ici que  $n$  soit moindre que  $m$ . D'où il suit que la Parabole  $AM$  de tel degré qu'elle puisse être, passera toujours par le point  $A$ ; qu'elle s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite  $BC$  que l'on regarde comme son diamètre; & enfin qu'elle tournera sa convexité du côté de ce diamètre. Mais comme la ligne courbe  $AM$  qui tombe dans l'angle  $DAB$ , n'est qu'une portion de cette Parabole; il reste à examiner dans lequel des angles  $DAC$ ,  $CAE$ ,  $EAB$ , elle doit se continuer; & pour cela il faut distinguer trois différens cas.

*Premier cas.* Lorsque l'exposant  $m$  de la puissance de  $x$  est un nombre pair, & l'exposant  $n$  de la puissance de  $y$  un nombre impair. La racine  $m$  de  $x^m$  sera  $\mp x$ , & la racine  $n$  de  $y^n$  sera seulement  $+y$ ; car soit par exemple,  $m=4$  &  $n=3$ , il est clair que le quarré de quarré ou la puissance quatrième de  $\mp x$  est toujours  $x^4$ , & qu'il n'en est pas de même du cube de  $\mp y$ ; puisque le cube de  $+y$  est  $y^3$ , & celui de  $-y$  est  $-y^3$ . De là il est évident que  $AP(x)$  peut être positive & negative, &  $PM(y)$  toujours positive; d'où l'on voit que la Parabole  $AM$  doit se continuer dans l'angle  $DAC$ , qui est à côté de l'angle  $BAD$ , en sorte que si par un point quelconque  $K$  de la ligne  $AD$ , on tire une parallèle à  $BC$ , elle rencontrera la Parabole  $MAA$  en deux points  $M, M$ , qui seront également éloignés du point  $K$ . Telle est la Parabole ordinaire qui est le lieu de l'équation  $xx=ay$ , ou  $xx=y$  en faisant le parametre  $a=1$ .

*Second cas.* Lorsque les exposans  $m$  &  $n$  sont des nombres impairs. La racine  $m$  de  $x^m$  sera seulement  $+x$ , & de même la racine  $n$  sera  $+y$ ; mais parce que l'équation

$-x^m = -y^n$  est la même que  $x^m = y^n$ , & que la racine  $m$  de  $-x^m$  est  $-x$ , & la racine  $n$  de  $-y^n$  est  $-y$ ; il s'en suit que  $AP(x)$  peut être positive & négative de même que  $PM(y)$ , en observant que lorsque  $AP$  est positive,  $PM$  l'est aussi, & au contraire. D'où l'on voit que la Parabole  $AM$  doit alors se continuer dans l'angle  $CAE$  opposé au sommet à l'angle  $BAD$ , dans une position toute semblable, mais renversée; en sorte que prenant  $AP$  égale à  $AP'$ , & menant  $PM$  qui fasse avec  $AP$  l'angle  $APM$  égale à l'angle  $APM'$ ; cette ligne  $PM$  rencontre la portion  $AM$  qui tombe dans l'angle  $CAE$ , en un point  $M$  tel que  $PM$  est égal à  $PM'$ . Telle est la première Parabole cubique  $x^3 = aay$ , ou  $x^3 = y$  en faisant  $a = 1$ .

FIG. 230.

*Troisième cas.* Lorsque l'exposant  $m$  de la puissance de  $x$  est un nombre impair, & l'exposant  $n$  de la puissance de  $y$  un nombre pair. La racine  $m$  de  $x^m$  sera toujours  $+x$ , & la racine  $n$  de  $y^n$  sera  $\mp y$ ; car soit par exemple,  $AM$  une seconde Parabole cubique qui est le lieu de l'équation  $x^3 = ayy$ , ou  $x^3 = yy$ , il est clair que la racine cubique de  $x^3$  est seulement  $+x$ , & que celle de  $yy$  est  $\mp y$ . D'où il suit que la Parabole  $AM$  doit se continuer dans l'angle  $BAE$  qui est à côté de l'angle  $BAD$ ; en sorte que si l'on mène par un point quelconque  $P$  de la ligne  $AB$  une parallèle à  $DE$ , elle rencontrera la Parabole entière  $MAM$  en deux points  $M, M'$ , également éloignés du point  $P$ .

FIG. 231.

Or l'équation générale  $x^m = y^n$  appartient toujours à l'un de ces trois cas; car si  $m$  &  $n$  étoient deux nombres pairs, on extrayeroit de part & d'autre la racine quadrée autant de fois qu'il seroit possible; ce qui la réduiroit à une équation dont l'un des exposants seroit nécessairement impair. Et l'on peut toujours supposer que  $m$  surpasse  $n$ ; car s'il étoit moindre, & qu'on eût par exemple,  $aax = y^3$ , on trouveroit en rapportant les points de la Parabole  $AM$  à ceux de la ligne  $DE$ , & nommant alors  $AK, x$ ;  $KM, y$ ; cette autre équation  $x^3 = aay$

FIG. 232.

qui exprimeroit aussi la nature de la même Parabole  $AM$ , & dans laquelle l'exposant de la puissance de  $x$  est plus grand que celui de la puissance de  $y$ ; de sorte qu'on pourroit faire alors le même raisonnement par rapport à la ligne  $DE$ , qu'on vient de faire par rapport à la ligne  $BC$ . De là il est évident que toutes les Paraboles de tel degré qu'elles puissent être, auront toujours l'une des trois figures précédentes.

## PROPOSITION IX.

### Problème.

414. SOIT proposée à construire l'égalité du huitième degré  $x^8 - bx^7 + cx^6 - dx^5 + ex^4 - fx^3 + gx^2 - hx + l = 0$ , dans laquelle aucun terme ne manque, par le moyen de deux lieux géométriques; l'un du second degré, & l'autre du quatrième.

Ayant pris  $xx = ay$  pour le lieu du second degré, on substituera à la place de  $x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$ , &  $xx$ , leurs valeurs  $a^2y^2, a^3y^3, a^4y^4, a^5y^5, a^6y^6, a^7y^7$ , &  $ay$ , & en prenant la droite donnée  $a$  pour l'unité, on aura cette autre équation  $y^4 - \frac{b}{a}xy^3 + cy^3 - dxy^2 + acy^2 - afxy + aay - aahx + a^2l = 0$  dont le lieu est du quatrième degré, & des plus simples; puisque l'une des inconnues  $x$  n'étant qu'au premier degré, on pourra en déterminer tous les points en ne se servant que de cercles & de lignes droites.

Si l'on construit à présent la Parabole qui est le lieu de la première équation  $xx = ay$ , & qu'ayant pris pour  $y$  autant de différentes grandeurs que l'on voudra, on détermine les valeurs de  $x$  qui leur répondent dans la seconde équation; le lieu qui passera par les extrémités de toutes les  $y$ , & qui sera par conséquent celui de la seconde équation, déterminera par le moyen des points où il rencontre la Parabole, les valeurs cherchées des racines de l'équation donnée. Ce qui est visible; puisque mettant dans cette seconde équation pour  $y$  la valeur



$\frac{x^2}{a}$ , & pour les puissances de  $y$  les puissances de cette valeur, on retrouve l'équation donnée  $x^2 - bx' + c = 0$ .

### COROLLAIRE I.

415. COMME l'unité  $a$  est arbitraire, on peut supposer qu'elle est donnée, & qu'ainsi la Parabole qui est le lieu de la première équation  $xx = ay$  est donnée. Or il est évident qu'on pourra toujours par le moyen de cette équation transformer toute égalité du septième ou huitième degré, en une autre équation du quatrième, dans laquelle l'inconnue  $x$  ne se trouve qu'au premier degré. D'où il suit que toute égalité du septième ou du huitième degré, dans laquelle ou tous les termes se rencontrent ou seulement une partie, se pourra toujours construire par le moyen d'une Parabole donnée & d'un lieu du quatrième degré, dans lequel l'une des inconnues ne se trouvera qu'au premier, & cela sans autre préparation que de prendre pour l'unité le paramètre  $a$  de la Parabole donnée, afin de réduire sous l'expression  $ac$  les quantités connues qui multiplient  $x^2$ , sous l'expression  $aad$  celles qui multiplient  $x'$ , &c.

### COROLLAIRE II.

416. ON prouvera de même que toute égalité du neuvième ou du dixième degré se pourra toujours construire par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du cinquième degré dans lequel l'une des inconnues ne se trouvera qu'au premier degré : que les égalités de l'onzième & du douzième degré se construiront encore par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du sixième degré; & ainsi de suite pour les autres à l'infini.

## PROPOSITION X.

## Problème.

417. **C**ONSTRUIRE l'égalité du neuvième degré  $x^9 - bx^7 + cx^6 \&c = 0$ , dans laquelle tous les termes se rencontrent excepté le second; par le moyen de deux lieux géométriques chacun du troisième degré.

Ayant pris  $x^3 = aay$  pour l'un des lieux du troisième degré, on substituera à la place de  $x^9$ ,  $x^7$ ,  $x^6$ , &c. leurs valeurs  $a^3y^3$ ,  $a^4xyy$ ,  $a^4yy$ , &c., & l'on aura pour l'autre lieu du troisième degré, en prenant  $a$  pour l'unité;

$y^3 - \frac{b}{a}xyy + cyy \&c = 0$  dans lequel l'inconnue  $x$  ne peut monter qu'au second second degré, puisqu'on suppose que par tout où il y a  $x^3$  dans la proposée, on substitue à sa place  $aay$ .

Or il est visible que si l'on construit ce lieu avec la Parabole cubique, qui est le lieu de l'autre équation  $x^3 = aay$ , leurs points de rencontre détermineront les racines de l'égalité donnée.

## COROLLAIRE.

418. **T**OUTE égalité du sixième, du huitième ou du neuvième degré étant donnée, il est visible qu'après avoir fait évanouir son second terme, & l'avoir multipliée par sa racine  $x$  lorsqu'elle est du huitième degré, & par son quarré  $xx$  lorsqu'elle n'est que du septième, on la transformera toujours en un lieu du troisième degré en se servant de l'équation  $x^3 = aay$  dont le lieu est une Parabole cubique donnée, & faisant la substitution comme ci-dessus: de sorte que cette maniere est generale pour toutes les égalités du septième, du huitième, & du neuvième degré. On trouvera de même que toute égalité du douzième degré dont le second terme est évanoui, se transformera en un lieu du quatrième, en se servant encore de l'équation  $x^3 = aay$ ; comme aussi celles  
du

DE LA CONSTRUCTION DES EGALITE'S. 445  
du dixième & du onzième degré en les élevant au douzième.

Mais si l'on propose une égalité du seizième degré dans laquelle tous les termes se rencontrent, excepté le deuxième, on trouvera qu'en se servant du lieu du quatrième degré  $x^4 = a^4y$ , on la transformera en un lieu du cinquième. On trouvera de même qu'une égalité du vingtième degré se transformera en un lieu du sixième, en se servant encore du lieu du quatrième degré  $x^4 = a^4y$ ; comme aussi celles du dix-septième, dix-huitième & dix-neuvième degré: que les égalités du vingt-cinquième degré dans lesquelles tous les termes se rencontrent, excepté le deuxième, se transformeront en un lieu du sixième degré, en se servant du lieu du cinquième  $x^5 = a^5y$ ; comme aussi toutes les égalités du vingt-unième, vingt-troisième, vingt-quatrième degré. Et l'on peut continuer cette recherche autant qu'on voudra.

#### REMARQUE. I.

419. IL est à propos de remarquer que si dans une égalité du seizième degré non seulement le second terme manquoit, mais le troisième & le sixième; le lieu du cinquième degré lequel joint avec celui du quatrième  $x^4 = a^4y$  sert à construire l'égalité se transformeroit en un du quatrième, & on peut faire des remarques semblables sur les égalités des degrés plus élevés. Mais quoiqu'il soit vrai de dire qu'une égalité du seizième degré dans laquelle il n'y a que le deuxième terme qui manque, ne se peut transformer qu'en un lieu du cinquième, si l'on employe à cet effet le lieu du quatrième  $x^4 = a^4y$  qui n'a que deux termes; on n'en doit pas conclure en general, que les lieux les plus simples pour résoudre une équation complète du seizième degré, doivent être, l'un du quatrième & l'autre du cinquième. Car au contraire, il me paroît évident que si l'on se sert d'un lieu du quatrième degré composé de plusieurs termes à la

place de  $x^2 = y$  qui n'en n'a que deux, on pourra choisir ce lieu en sorte qu'il servira à transformer l'égalité complète du seizième degré en un autre lieu du quatrième. En voici la raison. Si l'on prend deux lieux du quatrième degré dans l'un desquels l'inconnuë  $x$  monte au quatrième degré, & dans l'autre l'inconnuë  $y$ , il est constant par les regles de l'Algebre, qu'en faisant évanouir l'inconnuë  $y$  par le moyen de ces deux équations, on arrivera à une égalité dans laquelle l'inconnuë  $x$  montera au seizième degré. Or comme deux lieux du quatrième degré, peuvent avoir ensemble plus de seize termes, puisque chacun en peut avoir quinze differens, il s'ensuit qu'ils peuvent contenir toutes les quantités connues de l'égalité donnée: ce qui suffit pour faire voir la possibilité de construire une égalité complète du seizième degré par deux lignes du quatrième.

On doit de même penser que les deux lieux les plus simples pour construire une égalité complète du vingtième, dix-neuvième, & dix-septième degré, seront, l'un du quatrième, & l'autre du cinquième, parce que la reduite de ces deux lieux montera au vingtième degré, & qu'ils pourront contenir ensemble plus de termes que la proposée, & renfermer par conséquent toutes les quantités connues qui s'y rencontrent. Et si l'inconnuë avoit 21, 22, 23, 24, ou 25 dimensions dans l'égalité proposée, il faudroit deux lieux de cinq degrés chacun. De là on forme la regle suivante, qui sert à trouver les degrés des deux lieux qui peuvent résoudre une égalité proposée; en sorte qu'ils soient les plus simples qu'il est possible.

Il faut extraire la racine quarrée de la plus haute dimension de l'inconnuë. Si elle est exacte, chacun des deux lieux doit avoir autant de degrés que cette racine contient d'unités; & si elle ne l'est pas, ou le reste est égal, ou moindre que la racine, & alors l'un des lieux aura pour degré le nombre de la racine, & l'autre ce même nombre augmenté de l'unité: ou le reste est plus grand que la racine, & alors chacun des deux lieux aura

pour degré le nombre de la racine augmenté de l'unité:

Soit proposé par exemple, de trouver les deux lieux les plus simples, qui peuvent résoudre une égalité, dont la plus haute dimension de l'inconnuë soit de trente-sept degrés. Comme la racine quarrée de 37 est 6, & que le reste 1 est moindre que ce nombre 6, il faudra que l'un des lieux soit du sixième degré, & l'autre du septième; on trouvera la même chose, si la plus haute dimension est 38, 39, 40, 41 & 42. Mais si elle étoit 43, comme la racine quarrée de 43 est 6, & que le reste 7 est plus grand que cette racine, il faudroit deux lieux qui fussent chacun du septième degré; & il en est de même si la plus haute dimension étoit 44, 45, 46, 47, 48 & 49.

REMARQUE II.

420. IL arrive quelquefois qu'on peut construire une égalité donnée par le moyen d'une seule & même courbe mise en deux différentes positions; & c'est ce qu'on verra clairement dans cet exemple.

Soit proposée à construire l'égalité du neuvième degré  $x^9 + a^8x - a^8b = 0$ , dans laquelle tous les termes moyens manquent excepté le penultième. Je prends l'équation  $x^3 = aay$ , dont le lieu est une Parabole cubique  $MAM$  qui a pour parametre la ligne droite donnée  $AB = a$ , & pour appliquées des lignes droites  $PM (y)$  qui font avec les parties correspondantes  $AP (x)$  de son axe ou diametre un angle pris à volonté  $APM$  que je suppose ici droit; & en cubant chaque membre, j'ai  $x^9 = a^8y^3$ : ce qui change par la substitution l'égalité proposée en cette équation  $y^3 = aab - aax$ , dont le lieu se construit ainsi.

Soit prise sur  $AP$  prolongée du côté de  $A$  la partie  $AC = b$ ; & ayant mené par le point  $C$  la droite indéfinie  $CK$  parallèle à  $PM$ , soit décrite une autre Parabole cubique  $MCM$  qui ait pour axe  $CK$ , & pour appliquées des droites  $KM$  parallèles à  $AP$ , & dont le pa-

rametre  $CD = a$ . Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car par la construction  $MK$  ou  $CP = b - x$ , & par la propriété de la courbe  $CK' = MK \times \overline{CD}$ , c'est à dire en termes analytiques  $y^3 = aab - aax$ . Or il est évident 1°. Que si des points  $M$  où cette dernière Parabole cubique  $MCM$  rencontre l'autre  $MAM$ , on mène des parallèles  $MP$  à  $CE$ ; les parties  $AP$  exprimeront les racines  $x$  de l'égalité proposée  $x^3 - a^2x - a^2b = 0$ . 2°. Que les Paraboles cubiques  $MCM$ ,  $MAM$ , sont précisément les mêmes; puisque leurs paramètres  $AB$ ,  $CD$ , sont égaux, & que les angles  $APM$ ,  $CKM$ , que font leurs appliquées avec leurs axes le sont aussi.

La situation des deux Paraboles cubiques  $MAM$ ,  $MCM$ , fait connoître que l'égalité proposée  $x^3 - a^2x - a^2b = 0$ , n'a qu'une racine réelle  $AP(x)$ , qui est toujours vraie & moindre que  $AC(b)$ ; de sorte que les huit autres sont imaginaires.

## PROPOSITION XL

### Problème.

421. **C**ONSTRUIRE toute égalité de tel degré qu'elle puisse être, par le moyen d'une ligne droite, & d'un lieu du même degré, duquel lieu toutefois on puisse déterminer tous les points en n'employant que des lignes droites.

Il faut mettre le dernier terme de l'égalité proposée tout seul d'un côté en le rendant égal à tous les autres, & diviser ensuite toute l'égalité par la ligne qui fait l'office de l'unité, repetée autant de fois qu'il sera nécessaire, afin que chaque terme n'exprime que des lignes; comme si l'on proposoit  $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^2ex - a^2f = 0$ , on auroit  $f = \frac{x^5}{a^2} - \frac{bx^4}{a^2} + \frac{cx^3}{a^2} - \frac{dxx}{a^2} + \frac{ex}{a^2}$ .

FIG. 334. Cela fait, on prendra sur une ligne droite indéfinie  $AB$  dont l'origine fixe soit au point  $A$ , une partie quelcon-



9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1

9.1.1



que  $AP$  pour la valeur de  $x$ ; & ayant mené parallèlement à la ligne  $AC$  donnée de position une droite  $PM = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^3} + \frac{cx^3}{a^2} - \frac{dxx}{a} + \frac{ex}{a}$  (ce qui se peut toujours faire \* en n'employant que des lignes droites), son extrémité  $M$  sera l'un des points d'une ligne courbe  $ADEM$ ; dont les intersections  $M, M, M, \&c.$  avec une ligne droite  $KM$  menée parallèlement à  $AB$  par le point  $K$  tel que  $AK=f$ , détermineront des parties  $KM, KM, KM, \&c.$  qui seront les valeurs cherchées de l'inconnue  $x$  dans l'égalité donnée.

Car menant les droites  $MP, MP, MP, \&c.$  parallèles à  $AC$ , & nommant les indéterminées  $AP, x; PM, y$ ; on aura par la propriété de la courbe  $ADEM$  cette équation  $PM(y) = \frac{y^5}{a^4} - \frac{by^4}{a^3} + \frac{cy^3}{a^2} - \frac{dyy}{a} + \frac{ey}{a}$  qui est un lieu du cinquième degré; & par la propriété de la droite  $KM$  cette autre  $y=f$ . Ce qui, en substituant pour  $y$  sa valeur  $f$ , & multipliant par  $a^4$ , donne l'égalité même proposée  $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadx + a^4ex - a^4f = 0$ .

Ces sortes de constructions peuvent être très-utiles pour trouver les limites des égalités. Supposons, par exemple, qu'on ait une méthode pour déterminer sur la ligne  $AC$  les parties  $AF, AG$ , telles que les droites  $FD, GE$ , parallèles à  $AB$  touchent la courbe en des points  $D, E$ ; il est clair 1°. Que si  $AK(f)$  est moindre que  $AF$  & plus grande que  $AG$ , comme on le suppose dans cette figure, l'égalité proposée aura trois racines vraies  $KM, KM, KM$ , & les deux autres imaginaires; parce que la figure de la courbe est telle que la ligne  $KM$  la rencontrera en trois points, & jamais en davantage. 2°. Que si  $AK(f)$  est moindre que  $AG$ , la ligne  $KM$  coupera la courbe en cinq points; c'est à dire que l'égalité aura cinq racines vraies. 3°. Que si  $AK$  surpasse  $AF$ , l'égalité n'aura qu'une racine vraie, & les quatre autres imaginaires. 4°. Que si  $AK=AF$ , l'égalité aura trois racines vraies, dont il y en aura deux

égales entr'elles; ſçavoir  $FD$ ,  $FD$ . 5°. Et enfin que ſi  $AK=AG$ , l'égalité aura cinq racines vraies, dont il y en aura deux égales, ſçavoir  $GE$ ,  $GE$ .

La même ligne courbe  $ADEM$  étant continuée du côté du point  $A$ , ſervira à trouver les racines de l'égalité  $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadx^2 + a'ex + a'f = 0$ , qui ne diffère de la précédente qu'en ce que le dernier terme a le ſigne  $+$ ; ce qui fait voir qu'on doit mener alors la droite  $KM$  au deſſous de  $AB$ , puisſque ſon lieu doit être  $y = -f$ .

## REMARQUE.

422. ON peut varier la conſtruction précédente en différentes manières; car au lieu du dernier terme qu'on égale à tous les autres, on pourroit prendre tel autre des termes qu'on voudroit, ou même deux quelconques qui ſe ſuivent immédiatement, & les diviſer enſuite d'une manière convenable, afin que les égalant à l'inconnue  $y$ , le lieu de l'équation ne fût que du premier degré. Soit par exemple, l'égalité du troiſième degré  $x^3 - abx - aac = 0$ ; je fais  $\frac{bx}{a} + c = \frac{x^3}{aa}$ , & j'ai ces deux équations  $x^3 = aay$ , &  $y = \frac{bx}{a} + c$ , dont les lieux étant conſtruits ſeparément donneront les racines de l'égalité propoſée. Voici comment.

Fig. 235.

Ayant pris à l'ordinaire pour inconnues & indéterminées les deux droites  $AP(x)$ ,  $PM(y)$  qui ſont entr'elles un angle quelconque  $APM$ , ſoit décrite une première Parabole cubique  $MAM$  qui ſoit le lieu de la première équation  $x^3 = aay$ . Soit menée par le point  $A$  origine des  $x$  une ligne droite parallèle à  $PM$ , ſur laquelle ſoient priſes les parties  $AC=b$ ,  $AD=c$  du côté où s'étend  $PM$ ; & ayant pris ſur  $AP$  prolongée du côté de  $A$  la partie  $AB=a$ , ſoit tirée par le point  $D$  une parallèle indéfinie à  $BC$ . Je dis que ſi des points  $M$  où elle rencontre la première Parabole cubique  $MAM$ , on mène des parallèles  $MP$  à  $AC$ ; les cou-

pées  $AP$  seront les racines de l'égalité donnée  $x^3 - abx - aac = 0$ .

Car menant  $DE$  parallele à  $AP$ , les triangles semblables  $BAC$ ,  $DEM$ , donneront  $BA(a)$ .  $AC(b)$  ::  $DE(x)$ .  $EM = \frac{bx}{a}$ , & par conséquent  $PM(y) = \frac{bx}{a} + c$ . Or à cause de la premiere Parabole cubique  $MAM$ , l'on aura  $x^3 = aay$ . Si donc l'on met à la place de  $y$  la valeur  $\frac{bx}{a} + c$ , on retrouvera l'équation donnée  $x^3 - abx - aac = 0$ .

S'il y avoit  $+b$  dans l'égalité donnée, il faudroit prendre  $AC$  du côté opposé à  $PM$ , & il en est de même de  $AD$  lorsqu'il y a  $+c$ : de sorte que cette construction est generale pour toute égalité donnée du troisieme degré. Car il est évident qu'après en avoir fait évanouir le deuxieme terme, on peut toujours la reduire sous l'une de ces formes.

Il est visible qu'on peut se servir d'une Parabole cubique donnée, puisqu'il n'y a qu'à prendre l'unité arbitraire  $a$  égale à son parametre.

## PROPOSITION XII.

### Problème.

423. **APPROCHER** de plus en plus à l'infini de la juste valeur des racines de toute égalité du troisieme & du quatrieme degré; & des égalités qui passent le quatrieme degré lorsqu'elles n'ont que deux termes: en ne se servant que de lignes droites & de cercles

Soit donnée l'égalité du troisieme degré  $x^3 + 2apx - aaq = 0$ ; je la multiplie par  $x$  pour l'élever au quatrieme & transposant le terme  $aaqx$ , j'ai  $x^4 + 2apxx = aaqx$ ; j'ajoute de part & d'autre  $aapp$  pour faire que le premier membre soit un quarré, ce qui me donne  $x^4 + 2apxx + aapp = aaqx + aapp$ , & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient  $xx + ap$

$= \sqrt{ap + qx}$ ; transposant enfin  $ap$ , & extrayant de nouveau la racine quarrée, je trouve  $x = \sqrt{ap + \sqrt{ap + qx}}$ . Je considere à présent que si au lieu de la juste valeur de la racine vraie  $x$ , je prends une grandeur qui l'excede, comme par exemple  $c$ ; il s'ensuit 1°. Que  $c$  surpasse  $\sqrt{ap + \sqrt{ap + qc}}$ . 2°. Que  $\sqrt{ap + \sqrt{ap + qc}}$  sera encore plus grande que la juste valeur de  $x$ . Cette seconde proposition est visible, mais pour la premiere elle se prouve ainsi.

Si l'égalité du troisiéme degré  $a + 2apx$ , il est clair  
*\* Ce signe ainsi tourné veut dire, surpasse.* que  $c^3 + 2apcc > aaqc$ , d'où il vient en ajoutant de part & d'autre le quarré  $aapp$ , & achevant le calcul comme ci-dessus,  $c > \sqrt{ap + \sqrt{ap + qc}}$ . Mais lorsqu'il y a  $-2apx$ , on aura en transposant  $2apx$  & divisant par  $x$  cette égalité  $xx = 2ap + \frac{aaq}{x}$ , d'où il suit que si l'on met dans  $\frac{aaq}{x}$  pour  $x$  une valeur  $c$  plus grande que la racine vraie de l'égalité  $x^3 - 2apx - aaq = 0$ , la quantité  $2ap + \frac{aaq}{c}$  sera moindre que le quarré  $xx$  (puisque  $\frac{aaq}{c}$  est moindre que  $\frac{aaq}{x}$ ) & à plus forte raison que le quarré  $cc$ . On aura donc  $cc > 2ap + \frac{aaq}{c}$ , & multipliant par  $cc$ , il vient  $c^4 - 2apcc > aaqc$ , d'où l'on tire (en operant comme l'on vient de faire)  $c > \sqrt{ap + \sqrt{ap + qc}}$ . Or ceci supposé, je forme cette suite:  $\sqrt{ap + \sqrt{ap + qc}}$ ,  $\sqrt{ap + \sqrt{ap + qf}}$ ,  $\sqrt{ap + \sqrt{ap + qg}}$  &c, dans laquelle  $f$  exprime le terme  $\sqrt{ap + \sqrt{ap + qc}}$  qui le precede immédiatement, & de même  $g$  exprime le terme  $\sqrt{ap + \sqrt{ap + qf}}$  &c.

Il est donc évident par ce que l'on vient de démontrer, que tous les termes de cette suite seront plus grands que la juste valeur de la vraie racine  $x$ , & qu'ils en approchent

prochent toujours de plus en plus. Je dis à présent que si on la continuë à l'infini, le terme infinitième (s'il est permis de s'exprimer ainsi) ou le dernier terme de cette suite, sera précisément égal à la valeur cherchée de l'inconnuë  $x$ . Car soit  $z$  ce dernier terme, il est certain par la nature de la suite qu'il approchera de plus près de l'inconnuë  $x$  que tous les autres termes, & qu'ainsi le

terme  $\sqrt{+ap - +a\sqrt{pp} - +qz}$  qui le suivroit immédiatement, s'il n'étoit pas le dernier, ne peut être moindre que lui; puisque s'il étoit moindre il approcheroit de plus près de l'inconnuë  $x$ , & seroit par conséquent le dernier terme, ce qui est contre la supposition. Or il ne peut être plus grand, car on vient de démontrer que tous les termes de la suite vont en diminuant. Il faudra donc qu'il lui soit égal, & on aura par conséquent

$z = \sqrt{+ap - +a\sqrt{pp} - +qz}$ , c'est à dire en ôtant les incommensurables  $z^2 \pm 2apz - aaq = 0$ , d'où l'on voit que  $z = x$ . *Ce qu'il falloit démontrer.*

On prouvera par un raisonnement semblable, que si l'on prend une grandeur  $c$  plus petite que la juste valeur de  $x$ , tous les termes de cette suite iront toujours en augmentant en sorte que le dernier sera précisément égal à la valeur cherchée de  $x$ . Voici maintenant comment on peut construire par Geometrie cette suite, en n'employant que des lignes droites & des cercles.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies  $BD, CP$ , qui s'entrecoupent à angles droits au point  $A$ , on prendra sur l'une d'elles les parties  $AB = a$ ,  $AD = p$ , du même côté du point  $A$  lorsqu'il y a  $+2apx$ , & de part & d'autre lorsqu'il y a  $-2apx$ , comme on le suppose dans ces deux figures; & sur l'autre les parties  $AC = q$ ,  $AP = c$ , toujours de part & d'autre de point  $A$ . Ayant décrit du diametre  $CP$  un demi cercle qui coupe  $AD$  en  $E$ , on prendra sur  $AC$  la partie  $AF$  égale à  $AE$ , & on portera sur  $AD$  depuis le point  $D$  vers le point  $A$  dans le premier cas, & vers le côté opposé dans le

Yy

FIG. 236.  
237.

second, la partie  $DG$  égale à  $DF$ . On décrira enfin du diamètre  $BG$  un demi cercle qui coupe  $AP$  en  $Q$ , je dis que  $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$ . Car à cause du demi cercle  $CEP$  la ligne  $AE$  ou  $AF = \sqrt{qc}$ , & à cause du triangle rectangle  $FAD$  l'hypothénuse  $FD$  ou  $DG = \sqrt{pp + qc}$ , & par conséquent  $AG = p + \sqrt{pp + qc}$ , & à cause du demi cercle  $BQG$  la ligne  $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$ . Nommant à présent  $AQ, f$ ; & réitérant la même operation en se servant de  $AQ$  au lieu de  $AP$ , on trouvera  $AR = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qf}}$ , & ensuite par le moyen de  $AR$  que j'appelle  $g$ , on trouvera  $AS = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + gg}}$  en réitérant encore la même operation : de sorte que la continuant autant que l'on voudra, on trouvera des lignes  $AP, AQ, AR, AS$ , &c. qui approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de la vraie racine  $x$  de l'égalité proposée  $x^3 - 2apx - aaq = 0$ .

Il est à remarquer que l'on peut prendre d'abord pour  $AP(c)$  telle grandeur que l'on veut, car si cette grandeur se trouve plus grande que la racine  $x$ , les autres lignes  $AQ, AR, AS$ , &c. vont toujours en diminuant; & au contraire si  $AP$  est moindre que  $x$ , elles iront en augmentant : de sorte que la vraie racine est renfermée entre  $AP$  de l'une de ces deux figures &  $AP$  de l'autre,  $AQ$  &  $AQ, AR$  &  $AR, AS$  &  $AS$ . D'où l'on voit qu'en formant deux suites convergentes, dans l'une desquelles le premier terme soit plus grand que la vraie racine, & dans l'autre plus petit, l'on aura toujours en prenant les termes correspondans de ces deux suites, des limites entre lesquelles se doit trouver cette racine; de sorte que la difference de ces limites diminuë de plus en plus à l'infini.

Si l'on demandoit les deux autres racines de l'égalité proposée  $x^3 - 2apx - aaq = 0$ . Nommant  $m$  la racine approchée que l'on vient de trouver, on la regardera

comme étant exacte : c'est pourquoi divisant cette égalité par  $x - m$ , la division se fera au juste (car le reste  $m^3 - 2apm - aaq = 0$ , puisqu'on suppose  $x = m$ ), & on aura pour quotient l'égalité  $xx + mx + mm - 2ap = 0$ , dont la résolution fournira les deux racines qu'on demande.

Toutes les égalités du troisième degré peuvent se réduire à l'une ou à l'autre de ces deux formes; car après avoir fait évanouir le second terme, s'il y avoit  $+aaq$  en mettant  $-aaq$ , on ne feroit que changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où l'on voit que les constructions précédentes suffisent pour trouver les racines approchées de toute égalité donnée du troisième degré. Passons maintenant au quatrième.

Soit proposée l'égalité du quatrième degré  $xx^2 - 3apxx - aaqx - a^3r = 0$ , dont il faille trouver les racines approchées. Je cherche, comme l'on vient d'enseigner, les racines approchées de l'égalité du troisième degré

$$y^3 - 3ppy + 2p^3 = 0$$

$$+ 4ary + 8apr$$

$$- aqq$$

où l'on doit observer d'écrire  $-2p^3$  lorsqu'il y a dans la proposée  $+3apxx$ ;  $-4ar$  lorsqu'il y a  $+a^3r$ ; & enfin  $-8apr$  lorsque les signes des termes  $3apxx$  &  $a^3r$  sont differens. Je regarde ensuite l'une de ces racines approchées  $y$  comme étant exacte, & ayant trouvé une ligne  $v = \sqrt{ay + 2ap}$ , sçavoir  $+2ap$  lorsqu'il y a  $-3apxx$ , &  $-2ap$  lorsqu'il y a  $+3apxx$ ; j'ai pour les quatre racines approchées de la proposée, celles de ces deux égalités du second degré  $xx - vx + \frac{v^2 + a^2}{2} - \frac{aaq}{2v} = 0$

&  $xx + vx + \frac{v^2 + a^2}{2} + \frac{aaq}{2v} = 0$  (en observant de prendre  $-ap$  lorsqu'il y a  $-3apxx$  dans l'égalité proposée, &  $+ap$  lorsque c'est  $+3apxx$ ) que l'on construira aisément en n'employant que des cercles & des lignes droites. Tout ceci n'est qu'une suite de la règle que donne M. Descartes dans le troisième Livre de sa

Geometrie pour reduire toute égalité du quatrième degré à une du troisième, de laquelle connoissant une des racines, on a les quatre de la proposée; & comme cela dépend de l'Algebre pure, je pourrois le supposer ici comme démontré. En voici cependant la raison en peu de mots.

On regarde l'égalité du quatrième degré  $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = 0$ , comme le produit des deux planes  $xx - vx + ab - ac = 0$  &  $xx + vx + ab + ac = 0$ , dans lesquelles les lettres  $v, a, b, c$ , marquent des inconnues qui doivent être déterminées dans la suite, en sorte que le produit de ces deux égalités qui est  $x^4 - vvx - 2acvx + aabb - aacc = 0$ , soit en effet l'égalité même proposée. Pour cela j'en compare les termes correspondans, & j'ai 1°.  $c = \frac{aq}{2v}$ . 2°.  $b = \frac{vv - 3ap}{2a}$ . 3°.  $bb - cc = -ar$ , ou  $bb - cc + ar = 0$ ; c'est à dire en mettant pour  $b$  & pour  $c$  les valeurs que l'on vient de trouver & ordonnant, l'égalité  $v^6 - 6apv^4 + \frac{9a^2ppvv}{4a^2vv} - a^4qq = 0$ . Et si l'on fait  $vv = ay + 2ap$ , on trouvera par la substitution l'égalité du troisième degré

$$y^3 - 3pp^2 + \frac{2p^3}{4a^2r} = 0, \text{ de laquelle connoissant une racine } y,$$

on aura, en prenant la racine quarrée de  $ay + 2ap$ , la valeur de  $v$ , & ensuite celles de  $b$  & de  $c$ , lesquelles étant mises dans les deux égalités planes que l'on a supposées d'abord, on en formera deux autres dont le produit sera l'égalité même proposée, & dont la resolution par consequent fournira les quatre racines qu'on demande. S'il n'étoit question que de trouver une racine vraie d'une égalité du quatrième degré, on pourroit la trouver immédiatement par une suite en cette sorte.

Soit  $x^4 + 2apxx - aaqx - a^3r = 0$ , on trouvera en operant de même que pour le troisième degré  $x = \sqrt[4]{+ap + a\sqrt{qx} + pp + ar}$ , ce qui donne, en faisant pour abreger  $pp + ar = nn$ , cette suite conver-



gente  $c$ ,  $\sqrt{+ap+avnn+qc}$ ,  $\sqrt{+ap+avnn+qf}$ ,  $\sqrt{+ap+avnn+qg}$ , &c, dont la construction n'est differente des precedentes qu'en ce qu'il faut prendre  $AF=n$  &  $DG=FE$ .

Si l'on avoit  $x^2+2apxx-aaqx-+a'r=0$ , on trouveroit  $x=\sqrt{+ap+avqx+pp-ar}$ , & on formeroit lorsque  $pp$  surpasse  $ar$  (en faisant  $pp-ar=nn$ ) la même suite convergente que ci-dessus. Mais il est à remarquer que lorsqu'il y a  $+2apxx$  dans l'égalité donnée, il faut que  $\sqrt{qx+pp-ar}$  surpasse  $p$  afin que  $\sqrt{+ap+avqx+pp-ar}$  valeur de la racine vraie  $x$  ne renferme point de contradiction ; ce qui donne  $x > \frac{ar}{q}$ , & par conséquent il faudra prendre  $c$  plus grande que  $\frac{ar}{q}$ .

Si  $pp$  est moindre que  $ar$ , l'on formera alors, en faisant  $ar-pp=qn$ , cette suite convergente  $c$ ,  $\sqrt{+ap+avqc-qn}$ ,  $\sqrt{+ap+avqf-qn}$ ,  $\sqrt{+ap+avqg-qn}$ , &c, où l'on doit remarquer que lorsqu'il y a  $-2apxx$  dans l'égalité donnée, il faut que  $x$  surpasse  $n$  ou  $\frac{ar-pp}{q}$  afin que  $\sqrt{+ap+avqx+pp-ar}$  valeur de  $x$  ne renferme point de contradiction, & qu'ainsi on doit prendre  $c$  plus grand que  $n$ .

Il peut arriver lorsqu'il y a  $+r$  dans l'égalité donnée que ces racines soient toutes quatre imaginaires, & alors on tombera infailliblement dans quelque contradiction en construisant la suite ; car on n'a démontré qu'elle est convergente qu'en supposant qu'il y eut une racine vraie dans l'égalité donnée. Au reste la construction de la dernière suite est un peu differente des autres, mais comme elle n'est pas plus difficile, je ne m'y arrêterai pas.

Cette methode devient embarrassée lorsqu'on la veut étendre à des égalités complètes qui passent le quatrié-

me degré, c'est pourquoi je me contenterai de l'appliquer à une égalité du cinquième degré qui n'a que deux termes, & qui servira de methode pour les autres plus composées qui n'ont pareillement que deux termes.

Soit  $x^5 - a^4b = 0$ ; multipliant par  $x$ , & transposant il vient  $x^6 = a^4bx$ , & extrayant la racine quarrée on aura  $x^3 = a^2\sqrt{bx}$  ou  $x^4 = a^2x\sqrt{bx}$ , & extrayant de nouveau deux fois de suite la racine quarrée, on trouvera enfin  $x = \sqrt{a\sqrt{x}\sqrt{bx}}$ ; ce qui fournit cette suite convergente,  $c$ ,  $\sqrt{a\sqrt{c}\sqrt{bc}}$ ,  $\sqrt{a\sqrt{f}\sqrt{bf}}$ ,  $\sqrt{a\sqrt{g}\sqrt{bg}}$ , &c, dont voici la construction geometrique.

Fig. 238.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies  $BD$ ,  $CP$ , qui s'entrecoupent à angles droits au point  $A$ , on prendra sur l'une d'elles la partie  $AB = a$ , & sur l'autre, les parties  $AC = b$ ,  $AP = c$ , de part & d'autre du point  $A$ . Du diametre  $PC$  ayant décrit un demi-cercle qui coupe  $BA$  prolongée du côté de  $A$  en  $D$ , & ayant pris sur  $AC$  la partie  $AF = AD$ , on décrira du diametre  $PF$  un autre demi-cercle qui coupe  $AD$  en  $E$ . On décrira enfin du diametre  $BE$  un troisieme demi-cercle qui coupe  $AP$  en  $Q$ ; il est visible que  $AQ = \sqrt{a\sqrt{c}\sqrt{bc}}$ . Nommant à present  $AQ$ ,  $f$ ; & réiterant la même operation en se servant de  $AQ$  au lieu de  $AP$ , on trouvera  $AR = \sqrt{a\sqrt{f}\sqrt{bf}}$ , & de même  $AS = \sqrt{a\sqrt{g}\sqrt{bg}}$ . Et les droites  $AP$ ,  $AQ$ ,  $AR$ , &c. approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de l'inconnue  $x$  de l'égalité donnée  $x^5 - a^4b = 0$ . Cela se prouve de la même maniere que pour les égalités du troisieme degré.

M. Bernoulli celebre Professeur des Mathematiques à Bâle, est l'Auteur de ces suites. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipzig de l'année 1689. page 455.

## PROPOSITION XIII.

## Problème.

424. *UNE portion de Section conique étant donnée, trouver par son moyen les racines d'une égalité donnée du troisième ou du quatrième degré.*

On a vû dans le Problème précédent qu'une égalité du quatrième degré étant donnée, on en peut toujours trouver une du troisième, de laquelle connoissant une racine on a les quatre de la proposée; en ne se servant que de lignes droites, & de cercles. On sçait de plus que toute égalité du troisième degré se peut réduire sous cette forme  $x^3 + 2apx - aaq = 0$ , dont l'une des racines est vraie, & les deux autres ou fausses ou imaginaires. Cela posé; soit  $x^3 + 2apx - aaq = 0$ , dont il faille trouver les racines, par le moyen de la portion donnée *BD* d'une Parabole, qui a pour axe la ligne *GH* dont l'origine est au point *C*. Des points *B*, *D*, extrémités de la portion donnée ayant mené les perpendiculaires *BG*, *DH*, sur l'axe, il est manifeste que si la vraie racine étoit plus grande que *BG*, & moindre que *DH*, le cercle décrit du centre *E*, trouvé comme l'on a enseigné à la fin de l'article 387. pour les égalités qui n'ont point de second terme, & du rayon *EC*, couperoit infailliblement la portion *BD* en quelque point *M*; d'où menant la perpendiculaire *MQ* sur l'axe, cette ligne *MQ* en feroit la vraie racine. Il est donc question lorsque ce cercle ne coupe point la portion *BD*, de transformer cette égalité en une autre dont la vraie racine soit renfermée entre les limites *BG*, *DH*. Pour le faire, je nomme les données *BG*, *f*; *DH*, *g*; & je suppose que l'on ait deux limites *m*, *n*, entre lesquelles la vraie racine *x* soit resserrée (*m* est moindre que *n*, & *f* moindre que *g*). Ce qui donne *x* plus grand que *m* & moindre que *n*, & multipliant chaque terme par *f* & divisant

FIG. 239.

par  $m$ , il vient  $\frac{f^n}{m}$  plus grand que  $f$  & moindre que  $\frac{f^n}{m}$ . Si l'on fait à présent  $x = \frac{f^n}{m}$ , & qu'on mette dans l'égalité  $x^3 + 2apx - aaq = 0$ , à la place de  $x$  sa valeur  $\frac{mz}{f}$ , on la transformera en celle-ci  $z^3 + \frac{2apff}{mm} z - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$ , qui aura sa vraie racine  $z = \frac{f^n}{m}$  plus grande que  $f$  & moindre que  $\frac{f^n}{m}$ . D'où il suit que si les limites  $m, n$ , étoient telles que  $\frac{f^n}{m}$  fût égale ou moindre que  $g$ , il n'y auroit qu'à construire cette dernière égalité selon l'article 387. pour avoir sa vraie racine  $MQ(z)$  par le moyen de la portion donnée  $BC$ . De là on tire la construction suivante.

On fera par le Problème précédent deux suites convergentes qui approcheront l'une en dessus & l'autre en dessous de la vraie racine  $x$  de l'égalité donnée  $x^3 + 2apx - aaq = 0$ . On choisira deux termes correspondans dans ces deux suites  $m, n$ , qui soient tels que  $\frac{f^n}{m}$  soit égale ou moindre que  $g$ ; ce qui se pourra toujours faire, puisque  $f$  est moindre que  $g$ , & que la différence qui est entre  $m$  &  $n$  diminue continuellement à l'infini. Cela fait, on transformera l'égalité donnée en une autre  $z^3 + \frac{2apff}{mm} z - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$ , dont l'inconnue sera  $z = \frac{f^n}{m}$ ; & en la construisant selon la fin de l'article 387. le cercle coupera infailliblement la portion donnée  $BC$  en un point  $M$ ; duquel ayant mené sur l'axe la perpendiculaire  $MQ$ , elle sera la vraie racine  $z$  de cette seconde égalité: & faisant ensuite  $x = \frac{mz}{f}$ , cette ligne  $x$  sera la vraie racine de l'égalité  $x^3 + 2apx - aaq = 0$ .

Si l'on veut trouver les deux autres racines de cette égalité lorsqu'elles ne sont pas imaginaires; il n'y a qu'à la

DE LA CONSTRUCTION DES EGALITES. 361

La diviser par l'inconnu  $x$  moins celle que l'on vient de découvrir pour l'abaisser à une du second degré, dont on découvrira les deux racines par le moyen d'un cercle, en se servant de l'article 380.

Tout ceci est trop évident pour m'y arrêter davantage, je remarquerai seulement que si la portion donnée  $BD$  étoit d'une Ellipse ou d'une Hyperbole, il faudroit se servir de l'article 398. ou 403. & que toute la difficulté se réduiroit à transformer l'égalité donnée en une autre, dont la vraie racine eut des limites données : & c'est ce que l'on feroit comme dans la Parabole.

## LIVRE DIXIÈME.

*Des Problèmes déterminés.*

## PROPOSITION GÉNÉRALE.

425. *UN Problème de Geometrie déterminé étant proposé, en trouver la solution.*

On regardera d'abord le Problème proposé comme s'il étoit résolu, & on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connoître ce qui n'est que supposé. On nommera ensuite toutes ces lignes ( qui sont pour l'ordinaire des triangles rectangles ou semblables ) par des lettres de l'Alphabet, sçavoir les lignes qui sont connues par les premières lettres, & les lignes inconnues par les dernières lettres; & on parcourra toutes les conditions du Problème, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus simple & le plus naturel qu'il sera possible: ce qui doit servir à former autant de différentes égalités qu'il y a d'inconnues. On emploiera enfin les règles ordinaires de l'Algebre pour réduire ces différentes égalités à une seule dans laquelle il ne se trouve plus qu'une inconnue, & pour l'abaisser s'il se peut à un moindre degré; & l'ayant résoluë par les règles prescrites dans le Livre précédent, on en tirera la solution cherchée du Problème. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui suivent.

## EXEMPLE I.

FIG. 240. 426. LA ligne droite  $AB$  étant donnée, trouver hors de cette ligne le point  $C$  tel qu'ayant mené les droites  $AC, CB$ ; 1°. La somme de leurs quarrés soit au triangle  $ACB$  en la raison donnée de  $f$  à  $g$ , 2°. L'angle  $ACB$  qu'elles comprennent soit égal à l'angle donné  $GDK$ .

Je suppose que le point  $C$  soit celui qu'on cherche, & je mene  $CH$  perpendiculaire sur  $AB$  que je divise par le milieu au point  $E$ . Je nomme la donnée  $AE$  ou  $EB$ ,  $a$ ; & les inconnues  $EH$ ,  $x$ ;  $HC$ ,  $y$ ; & j'ai  $AH = a - x$ ,  $BH = a + x$ . Donc à cause des triangles rectangles  $AHC$ ,  $BHC$ , les quarrés des hypothenuses  $\overline{AC}^2 = aa - 2ax + xx + yy$ , &  $\overline{BC}^2 = aa + 2ax + xx + yy$ ; & par conséquent  $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa + 2xx + 2yy$ . Or puisque le triangle  $ACB = AE \times CH$  ( $ay$ ), il s'en suit par la premiere condition du Problème que  $2aa + 2xx + 2yy : ay :: f : g$ ; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par  $2g$ , cette équation  $aa + xx + yy = \frac{af}{2g} y = my$  en prenant (pour ôter les fractions) une ligne  $m = \frac{af}{2g}$ .

Il reste maintenant à accomplir la seconde condition, sçavoir que l'angle  $ACB$  soit égal à l'angle donné  $GDK$ . Pour y réussir, je mene d'un point  $G$  pris à discretion dans la droite  $GD$ , la perpendiculaire  $GF$  sur le côté  $DK$ , prolongée, s'il est necessaire, & du point  $A$  la perpendiculaire  $AL$  sur le côté  $BC$  prolongé aussi, s'il est necessaire, afin d'avoir deux triangles rectangles semblables  $ACL$ ,  $GDF$ , dont l'un  $GDF$  est donné. Cela fait, je nomme les données  $DF$ ,  $b$ ;  $FG$ ,  $c$ ; & faisant, pour abreger,  $BC = n$ , je trouve à cause des triangles rectangles semblables  $BCH$ ,  $BAL$ , ces proportions  $BC(n) . CH(y) :: BA(2a) . AL = \frac{2ay}{n}$ . Et  $BC(n) . BH(a+x) :: BA(2a) . BL = \frac{2aa+2ax}{n}$ . Et par conséquent  $CL$  ou  $BL - BC = \frac{2aa+2ax-nn}{n}$ . Donc puisque l'angle  $ACL$  doit être égal à l'angle  $GDF$ , il faut que  $CL \left( \frac{2aa+2ax-nn}{n} \right) . AL \left( \frac{2ay}{n} \right) :: DF(b) . FG(c)$ ; d'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens  $2aac + 2acx - cnn = 2aby$ , c'est à dire, en mettant pour  $nn$  sa valeur  $aa + 2ax + xx + yy$ , cette seconde

équation  $aac - cxx - cyy = 2aby$  qui renferme la seconde condition du Problème.

Comme l'on a trouvé autant d'égalités qu'il y avoit d'inconnues, & que l'on a satisfait à toutes les conditions du Problème; il ne faut plus que se servir des règles ordinaires de l'Algebre, pour reduire ces égalités à une seule qui ne renferme qu'une inconnue  $y$  ou  $x$ : & c'est ce qu'on peut faire en cette sorte. J'ai pour première équation  $aa + xx + yy = 2my$ , & pour seconde,  $aac - cxx - cyy = 2aby$  ou  $aa - xx - yy = \frac{2aby}{c}$ ; c'est pourquoi ajoutant ensemble d'une part les deux premiers membres, & de l'autre les deux seconds, je trouve  $2aa = \frac{2aby}{c} + 2my$ , d'où je tire  $y = \frac{aa}{m+f}$  en prenant  $f = \frac{ab}{c}$ .

Et mettant cette valeur à la place de  $y$  & son quarré à la place de  $yy$  dans l'une ou l'autre des équations précédentes, je trouve  $xx = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm + 2vf + ff}$  &  $x = \frac{a\sqrt{mm - ff - aa}}{m+f}$ ; d'où je connois que si  $mm$  étoit moindre que  $aa + ff$  le Problème seroit impossible. En voici la construction.

FIG. 241.

Par le point  $E$  milieu de  $AB$  ayant tiré une perpendiculaire indéfinie  $ON$  à  $AB$ , on menera par le point  $A$  la ligne  $AM$  qui fasse avec  $AB$  l'angle  $EAM$  égal à l'angle  $DGF$  qui est donné. Du point  $M$  où cette ligne rencontre la perpendiculaire  $ON$ , comme centre, & du rayon  $MA$ , on décrira un arc de cercle  $ACB$ . On prendra ensuite sur  $EM$  prolongée du côté de  $M$  la partie  $MN = m$ ; & ayant joint  $NA$ , on lui menera la perpendiculaire  $AO$  qui rencontre  $NO$  au point  $O$ , par lequel on tirera une parallèle à  $AB$ . Je dis que cette parallèle rencontrera l'arc de cercle  $ACB$  au point cherché  $C$ .

Car ayant mené  $CH$  perpendiculaire sur  $AB$ , il est clair que  $CH = EO = \frac{aa}{m+f}$ , puisqu'à cause des triangles rectangles semblables  $NEA$ ,  $AEO$ , il vient  $NE(m+f) \cdot AE(a) :: AE(a) \cdot EO = \frac{aa}{m+f}$ . De plus à



cause du cercle  $\overline{CM}^2 = \overline{AM}^2 = aa + ff$ ; & partant puisque  $MO = f + \frac{aa}{m+f}$ , il s'ensuit à cause du triangle rectangle  $MCO$  que  $\overline{CO}^2$  ou  $\overline{EH}^2 (xx) = aa + ff - ff - \frac{2aaf}{m+f} - \frac{aa^2}{mm+2mf+ff} = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm+2mf+ff}$ . Donc &c.

## REMARQUE.

427. **L**ORSQU'APRÈS avoir satisfait à toutes les questions d'un Problème, on est arrivé à deux équations qui renferment chacune les deux mêmes inconnues; il n'est pas nécessaire, si l'on veut, de les réduire à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnue, comme il est prescrit dans la proposition générale: mais l'on peut résoudre le Problème, en construisant séparément les lieux de ces deux équations, car leurs points d'intersection serviront à trouver les valeurs de ces deux inconnues. C'est ce qui se voit clairement dans cet exemple, où l'on a pris pour inconnues les droites  $EH (x)$ ,  $HC (y)$  qui font entr'elles un angle droit  $EH C$ ; & où après avoir satisfait aux conditions requises, on est arrivé à ces deux équations  $aa + xx + yy = 2my$ , &  $aa - xx - yy = 2fy$ ; car les cercles qui en font les lieux étant décrits séparément donneront par leurs intersections des points qui satisferont: voici comment.

Ayant décrit comme dans la première construction l'arc de cercle  $ACB$ , on décrira du centre  $A$ , & du rayon  $AP = m$ , un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire  $EM$  en  $P$ . On prendra sur cette perpendiculaire la partie  $EQ = m$  du côté de l'arc  $ACB$ , & on décrira du centre  $Q$  & du rayon  $QC = EP$ , un cercle qui coupera l'arc  $ACB$  en des points  $C$  qui satisferont.

Car à cause de ce dernier cercle on aura  $\overline{QC}^2$  ou  $\overline{EP}^2 (mm - aa) = \overline{QO}^2 (mm - 2my + yy) + \overline{OC}^2 (xx)$ , c'est à dire la première équation  $aa + xx + yy = 2my$ ;

& à cause de l'autre cercle  $ACB$  il vient  $\overline{MC}$  ou  $\overline{MA}$ .  
 $(ff + aa) = \overline{MO}^2 (ff + 2fy + yy) + \overline{OC}^2 (xx)$ , c'est  
à dire, la seconde équation  $aa - xx - yy = 2fy$ . D'où  
il suit que le point cherché  $C$  se doit trouver en même  
temps sur ces deux cercles, c'est à dire, qu'il doit se con-  
fondre avec leurs points d'intersection.

Il est visible qu'il y a deux differens points  $C$  qui satis-  
font à la question, lorsque ces deux cercles se coupent  
en deux points comme dans cette figure; qu'il n'y en a  
qu'un, lorsqu'ils se touchent; & qu'enfin il n'y en peut  
avoir aucun, lorsqu'ils ne se coupent ni ne se touchent.

Il faut bien prendre garde qu'en resolvant un Problème  
par le moyen de deux lieux, on ne tombe pas dans  
une construction plus composée, que si étant arrivé à une  
seule égalité qui ne renferme qu'une inconnue  $x$ , on l'eut  
construite selon les regles du Livre précédent. Je m'ex-  
plique: qu'il faille, par exemple, résoudre un Problème  
(c'est le troisième exemple qui sera proposé) dont les con-  
ditions soient renfermées dans ces deux équations

$y = \frac{cd - cx}{b}$ , &  $\frac{bb}{ff} yy = aa + xx$ ; si l'on se servoit des  
lieux de ces deux équations, il est clair qu'il faudroit

\* Art. 306. mener une ligne droite \* qui seroit le lieu de la premie-

\* Art. 330. re équation, & décrire une Hyperbole \* qui seroit le

ψ 332. lieu de la seconde, pour avoir par leurs intersections les  
valeurs des deux inconnues  $x$  &  $y$ . Mais parce qu'en réu-

nissant ces deux équations en une seule, on trouve l'é-  
galité du second degré  $xx - \frac{2ccd}{co + ff} x + \frac{acd - aaff}{co - ff} = 0$ ,

qui se construit en n'employant que des lignes droites &  
des cercles, ce seroit une faute considerable de se servir  
d'une Hyperbole.

#### EXEMPLE II.

Fig. 242. 428. LE quarré  $ABCD$  étant donné; il faut mener  
d'un de ses angles  $A$  la ligne droite  $AE$ , en sorte que  
sa partie  $FE$  comprise entre les côtés  $BC$ ,  $CD$ , oppo-

ses à cet angle soit égale à une ligne donnée  $b$ .

Je suppose que le point  $E$  pris sur le côté  $DC$  prolongé, soit tel que la partie  $FE$  de la ligne  $AE$  soit égale à  $b$ , c'est à dire que je suppose la question résolue; & je nomme la donnée  $AB$  ou  $AD$  ou  $DC$  ou  $CB$ ,  $a$ ; l'inconnue  $DE$ ,  $x$ . Cela fait, les triangles semblables  $EDA$ ,  $ECF$ , donnent  $ED(x) \cdot DA(a) :: EC(x-a) \cdot CF = \frac{ax-a^2}{x}$ , & le triangle rectangle  $ECF$  donne  $FE^2$

$$= EC^2 + CF^2 = xx - 2ax + aa + \frac{a^2xx - 2a^3x + a^4}{xx}.$$

Mais puisque par la condition du Problème  $FE$  doit être égale à  $b$ , on aura  $xx - 2ax + aa + \frac{a^2xx - 2a^3x + a^4}{xx} = bb$ , ou  $x^4 - 2a^3x + 2aaxx - bbxx - 2a^3x + a^4 = 0$ . D'où l'on voit que la résolution de cette égalité doit fournir pour  $DE(x)$ , une valeur telle que menant la droite  $AE$ , sa partie  $FE$  comprise entre les côtés  $CB$ ,  $DC$ , soit égale à la donnée  $b$ .

L'égalité que l'on vient de trouver étant du quatrième degré, il faudroit employer pour la résoudre une Section Conique. C'est pourquoi je dois chercher auparavant par les règles que fournit l'Algebre, si elle ne se peut point abaisser à un degré plus simple, & je trouve en effet que si l'on prend  $cc = aa + bb$ , elle sera le produit des deux égalités  $xx + aa - ax - cx = 0$ , &  $xx + aa - ax + cx = 0$ , qui sont chacune du second degré; de sorte que pour avoir les quatre racines de l'égalité du quatrième degré  $x^4 - 2a^3x + 2aaxx - bbxx - 2a^3x + a^4 = 0$ , il ne faut que trouver les racines de chacune de ces deux égalités. Je ne m'arrête point à chercher les racines de l'égalité  $xx + aa - ax + cx = 0$ ; parce que  $c$  surpasse  $a$ , la disposition des signes me fait connoître qu'elles sont toutes deux fausses: mais je trouve celles de l'autre égalité  $xx + aa - ax - cx = 0$ , que je connois être toutes deux vraies, de la maniere qui suit.

Soit prise sur le côté  $AB$  prolongé la partie  $BG = c$ , & soit décrit du diametre  $AG$  un demi-cercle qui cou-

pe en  $E$  le côté  $DC$  prolongé. Je dis que ce point sera celui qu'on cherche.

Car nommant  $DE, x$ ; & menant la perpendiculaire  $EH$ , on aura  $HG = a + c - x$ , & par la propriété du cercle  $AH \times HG (ax + cx - xx) = EH^2 (aa)$ .

## REMARQUE I.

429. LORSQU'APRÈS avoir satisfait aux conditions d'un Problème, on arrive à une égalité composée qui a plusieurs racines réelles, il est visible qu'il n'y a qu'une de ces racines qui exprime la valeur de l'inconnue qu'on cherche: mais on doit bien remarquer que les autres peuvent aussi servir à la résolution de la question, dans un sens qui ne peut être différent de celui qu'on s'est imaginé que dans quelques circonstances particulières. Ainsi dans cet exemple la petite racine vraie  $DL(x)$  de l'égalité  $xx - ax - cx + aa = 0$ , donne sur le côté  $DC$  un point  $L$  tel qu'ayant mené la droite  $AL$  qui rencontre le côté  $BC$  prolongé en  $K$ , la partie  $LK$  est égale à la donnée  $b$ . De même si l'on prend  $Bg = c$  sur le côté  $BA$  prolongé vers  $A$ , & qu'on décrive du diamètre  $Ag$  un demi-cercle, il coupera le côté  $CD$  prolongé vers  $D$  aux points  $e, l$ , en sorte que  $De$ , &  $Dl$  seront les deux racines fausses de l'égalité  $xx + cx - ax + aa = 0$ : & si l'on mène les droites  $Ae, Al$ , qui rencontrent le côté  $CB$  prolongé aux points  $f, k$ ; les droites  $ef, lk$ , seront encore chacune égale à la donnée  $b$ . De là on peut voir que quoiqu'en résolvant le Problème on n'ait eu en vûe que de trouver la valeur de  $DE$ , on est cependant arrivé à une égalité dont les racines ont fourni d'autres valeurs  $DL, De, Dl$ , qui ont toutes servi à résoudre le Problème en quelque sens.

## REMARQUE II.

430. S'IL y a lieu de croire que l'égalité qui renferme les conditions d'un Problème se peut abaisser à un moindre

moindre degré, il est à propos de tenter d'autres voies que celles qu'on a suivies quand même elles paroîtroient moins naturelles; parce qu'il arrive souvent qu'elles conduisent à des égalités plus simples, & que d'ailleurs il est assés difficile d'abaisser des égalités composées. Voici deux autres manieres de résoudre le Problème précédent qui pourront servir à faire comprendre cette remarque.

Ayant supposé le Problème résolu, je mene  $EG$  perpendiculaire sur  $AE$  qui rencontre le côté  $AB$  prolongé en  $G$ , & je prends pour inconnuës les deux droites  $AF$  &  $BG$  que je nomme  $y$  &  $z$ . Cela fait, les triangles rectangles semblables  $ABF$ ,  $AEG$ , donnent  $AB(a) : AF(y) :: AE(y+b) : AG(a+z)$ . Et partant  $yy+bz = aa+az$ . Or comme j'ai deux inconnuës & que le Problème est déterminé, il faut encore chercher une autre égalité. Pour la trouver, je considère que  $EG=AF(y)$ ; car menant  $EH$  perpendiculaire sur  $AG$ , le triangle rectangle  $EHG$  est semblable au triangle rectangle  $ABF$ , & de plus égal, puisque les côtés homologues  $AB$ ,  $EH$ , sont égaux entr'eux. J'aurai donc (à cause du triangle rectangle  $AEG$ ) cette autre égalité  $aa+2az+zz=yy+2by+bb+yy=2yy+2by+bb$ , dans laquelle mettant à la place de  $2yy+2by$  sa valeur  $2aa+2az$  trouvée par le moyen de la première égalité, il vient  $aa+2az+zz=2aa+2az+bb$  qui se réduit à cette égalité très-simple  $z=\sqrt{aa+bb}$ , qui fournit d'abord la même construction que ci-dessus.

FIG. 242.

## AUTRE MANIERE.

La maniere suivante a cela de particulier qu'elle réussit également soit que la figure  $ABCD$  soit un quarré, ou qu'elle soit un rhombe. Ayant mené par le point cherché  $F$ , que je regarde comme donné, la ligne  $FG$  qui fasse avec  $AF$  l'angle  $AFG$  égal à l'angle donné  $ACE$ , & qui rencontre au point  $C$  la diagonale  $AC$  prolongée autant qu'il est nécessaire; on aura trois triangles  $ACE$ ,  $AFG$ ,

FIG. 243.

Aaa

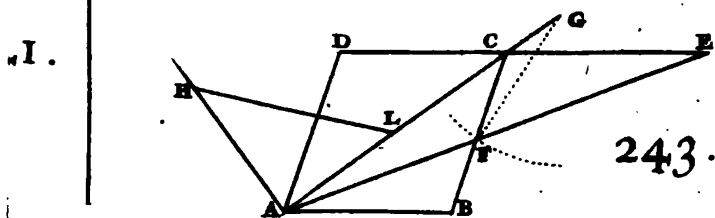
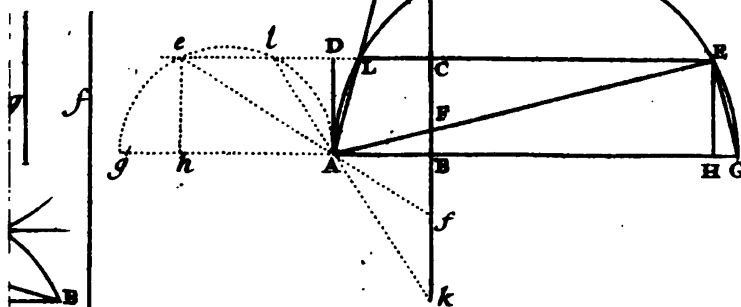
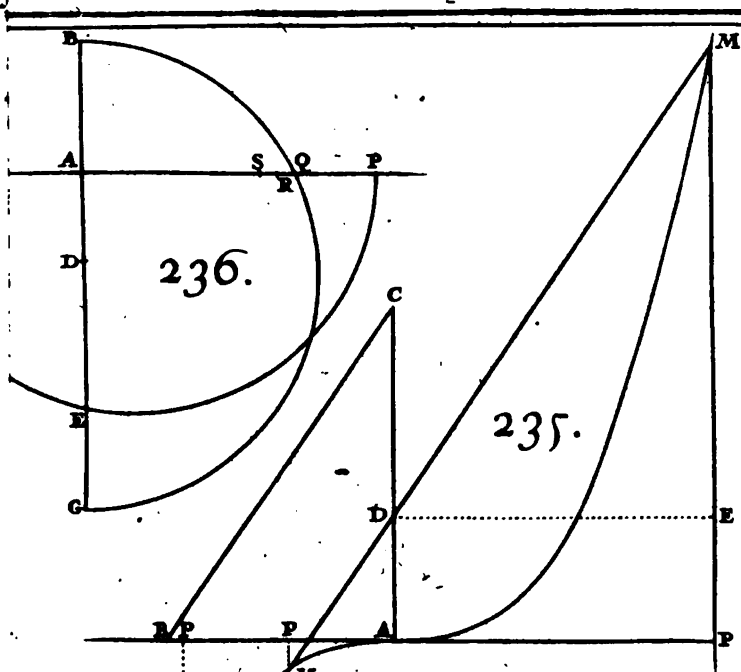
$GCF$ , qui seront semblables entr'eux. Car 1°. L'angle en  $A$  étant commun aux deux triangles  $ACE$ ,  $AFG$ , & les angles  $ACE$ ,  $AFG$ , étant égaux par la supposition; il est visible que ces deux triangles seront semblables. 2°. Le triangle  $ADC$  étant isocelle, l'angle  $DCA$  ou  $ECG$  sera égal à l'angle  $DAC$  ou  $ACF$ , & ajoutant de part & d'autre le même angle  $FCE$ , l'angle  $FCG$  sera égal à l'angle  $ACE$  ou  $AFG$ ; & partant puisque l'angle en  $G$  est commun, les deux triangles  $AGF$ ,  $FGC$ , seront semblables. Cela posé, soient les inconnues  $CE = x$ ,  $AG = z$ , & les données  $DC = a$ ,  $AE = b$ ,  $AC = c$ ; on aura (à cause des parallèles  $AD$ ,  $CF$ ,) cette proportion:  $CE(x) \cdot FE(b) :: CD(a) \cdot AF = \frac{ab}{x}$ . Or à cause des triangles semblables  $ACE$ ,  $AFG$ ,  $GCF$ , on trouvera  $AC(c) \cdot CE(x) :: AF\left(\frac{ab}{x}\right) \cdot FG = \frac{ab}{c}$ . Et  $AG(z) \cdot FG\left(\frac{ab}{c}\right) :: \frac{ab}{c} \cdot CG(z-c)$ . D'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens, l'égalité  $zz - cz = \frac{aab}{c}$  qui fournit cette construction.

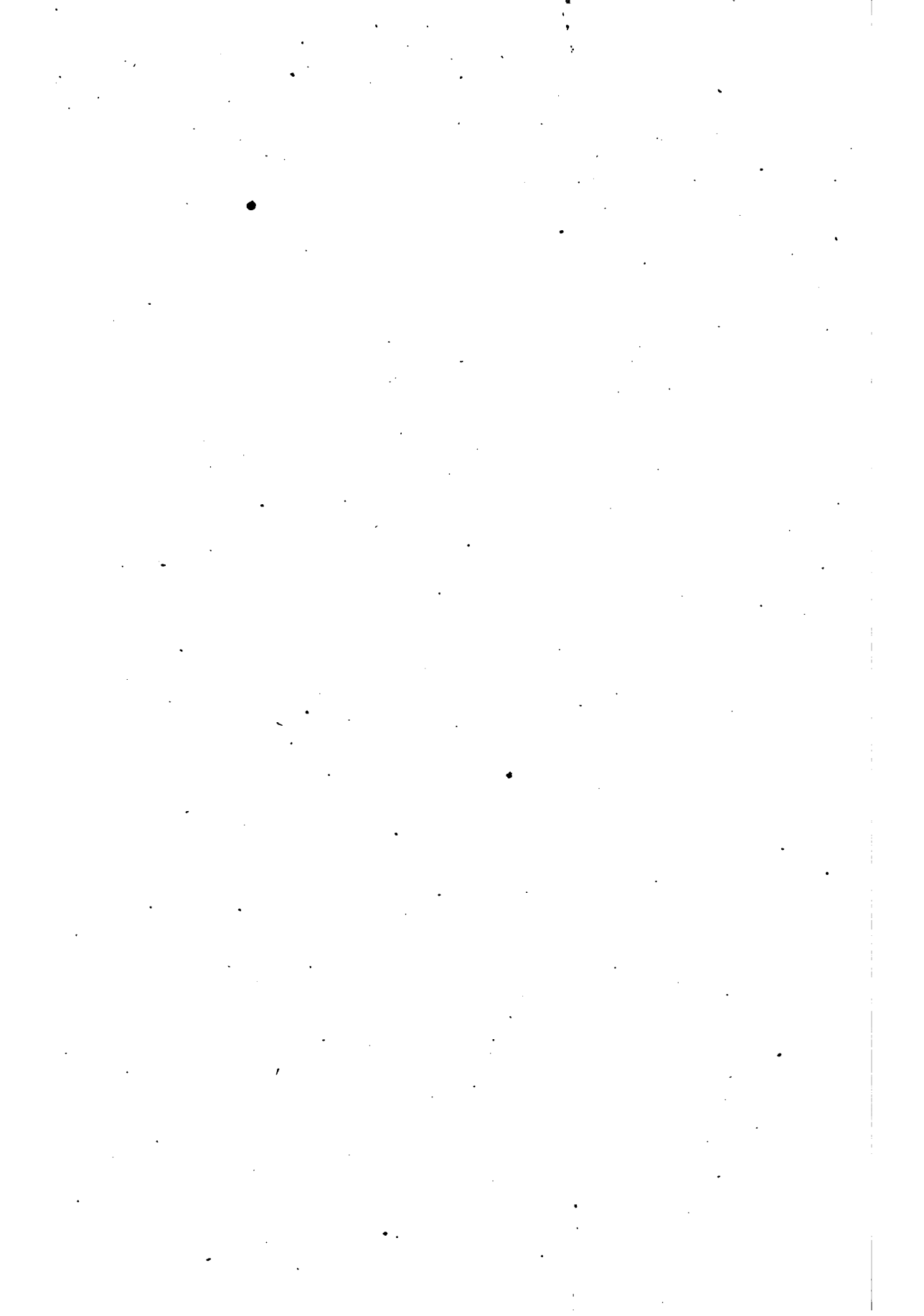
**Fig. 243.** Ayant mené du point  $A$  perpendiculairement sur  $AC$  la ligne  $AH = \frac{ab}{c}$ , on tirera par le point du milieu  $L$  de la diagonale  $AC$  la ligne  $HL$ , & on prendra sur cette diagonale prolongée du côté de  $C$  la partie  $LG$  égale à  $LH$ . On décrira ensuite du centre  $G$  & du rayon  $GF$  égal à  $AH$ , un arc de cercle qui coupera le côté  $BC$  au point cherché  $F$ . Cela est évident; puisque par la construction  $zz - cz = \frac{aab}{c}$ , & que  $GF = \frac{ab}{c}$ .

### EXEMPLE III.

**Fig. 244.**

**431.** TROUVER sur une ligne droite indéfinie  $DE$  donnée de position, deux points  $D$ ,  $E$ ; desquels ayant mené à deux points donnés  $O$ ,  $C$ , hors de cette ligne, les droites  $DQ$ ,  $OE$ ,  $DC$ ,  $CE$ ; l'angle  $DOE$  soit droit







& l'angle  $DCE$  égal à un angle donné  $TPS$ .

Supposons la chose faite, je décris du diamètre  $DE$  un demi-cercle qui passera par le point  $O$ , puisque l'angle  $DOE$  est droit; & sur la corde  $DE$  je décris un arc de cercle capable de l'angle donné, lequel passera par conséquent par le point  $C$ . Du point  $H$  centre de cet arc, & des points donnés  $O, C$ , je mene sur  $DE$  les perpendiculaires  $HK, OA, CB$ , & je nomme les données  $OA, a$ ;  $CB, b$ ;  $AB, c$ ; les inconnues  $AK, x$ ;  $KH, y$ . Cela posé, il est clair par les Elemens de Geometrie, 1°. Que le point  $K$  sera le milieu de la ligne  $DE$ , & par conséquent le centre du demi-cercle  $DOE$ . 2°. Que si par le sommet  $P$  de l'angle donné  $TPS$  on mene une perpendiculaire  $PQ$  à l'un des côtés  $PT$ , l'angle  $QPS$  qu'elle fait avec l'autre côté  $PS$ , sera égal à l'angle  $KEH$ . Or à cause du triangle rectangle  $KAO$  le quarré  $\overline{KO}$  ou  $\overline{KE} = aa + xx$ , & à cause du triangle rectangle  $HKE$  le quarré  $\overline{HE} = aa + xx + yy$ : mais prolongeant  $HK$  jusqu'à ce qu'elle rencontre en  $R$  une parallèle  $CR$  à  $DE$ , on aura (à cause du triangle rectangle  $CRH$ ) le quarré  $\overline{CH} = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$ . Donc puisque les lignes  $HE, HC$ , sont rayons du même cercle, on formera par la comparaison de leurs valeurs analytiques cette équation  $aa + xx + yy = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$ , qui, en effaçant de part & d'autre  $yy + xx$ , & pour abréger, faisant  $\frac{aa - bb - cc}{2x} = d$ , se réduit à celle-ci;  $y = \frac{cd - cx}{b}$ .

Si l'on considère le chemin qu'on a suivi pour arriver à l'équation précédente, on verra qu'elle renferme cette condition, sçavoir que les cercles décrits des centres  $K, H$ , & des rayons  $KO, HC$ , se rencontrent sur la ligne  $DE$  dans les mêmes points  $D, E$ ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à faire que l'angle  $KEH$  soit égal à l'angle  $QPS$ . Pour en venir à bout.

Ayant pris sur la ligne  $PQ$  la partie  $PQ$  égale à  $CB$ , & tiré  $QS$  parallèle au côté  $PT$ , & terminée en  $S$  par

l'autre côté  $PS$ ; il est évident que le triangle rectangle  $EKH$  doit être semblable au triangle rectangle  $PQS$ , & qu'ainsi, en nommant la donnée  $QS$ ,  $f$ , on aura cette proportion;  $EK(\sqrt{aa+xx}) . KH(y) :: PQ(b) . QS(f)$ , d'où l'on tire  $y = \frac{f}{b} \sqrt{aa+xx} = \frac{cd-cx}{b}$ . Quarrant chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant par ordre l'égalité, on trouve  $xx - \frac{2cd}{a-f} x + \frac{cdd-af}{a-f} = 0$ , dont l'une des racines fournira pour  $AK(x)$  une valeur telle que décrivant un cercle du centre  $K$  & du rayon  $KO$ , il coupera la ligne  $DE$  aux deux points cherchés  $D, E$ .

On peut trouver les racines de cette égalité, selon les articles 380. ou 382. (Liv. précéd.) : mais quoique les méthodes qu'on y explique soient très-simples eu égard à leur généralité, il arrive néanmoins très-souvent qu'en considérant avec attention la nature d'une question particulière, on trouve des constructions plus faciles. Par exemple, on peut remarquer ici, 1°. Que si par le point de milieu  $F$  de la ligne  $OC$  qui joint les deux points donnés, on mène la perpendiculaire  $FG$  qui rencontre en  $G$  la ligne  $DE$  donnée de position, on aura  $AG = d$ ; car nommant  $AG$ ,  $x$ ; les triangles rectangles  $GAO$ ,  $GBC$ , donneront  $GO = \sqrt{xx+aa}$  &  $GC = \sqrt{xx+2cx+cc+bb}$ , & comparant ensemble ces deux valeurs qui doivent être égales entr'elles, puisque le point  $G$  est dans la perpendiculaire  $FG$  qui divise par le milieu la ligne  $OC$ , il vient  $\sqrt{xx+aa} = \sqrt{xx+2cx+cc+bb}$ , d'où l'on tire  $AG(x) = \frac{aa-bb-c}{2c} = d$ . 2°. Que l'égalité

$f\sqrt{aa+xx} = cd-cx$  qui renferme les conditions du Problème, se réduit à cette proportion;  $GK(d-x) . KO(\sqrt{aa+xx}) :: QS(f) . AB(c)$ : de sorte que si l'on

\* Art. 350.

décrit \* le lieu de tous les points  $K$  tels qu'ayant mené aux deux points donnés  $G, O$ , les droites  $KG, KO$ , elles soient toujours entr'elles en la raison donnée de

$QS$  à  $AB$ ; ce lieu coupera la ligne  $DE$  au point cherché  $K$ . Ce qui donne la construction suivante qui est très-simple.

Par le point de milieu  $F$  de la ligne  $OC$  qui joint les deux points donnés ayant mené la perpendiculaire  $FG$ , qui rencontre en  $G$  la ligne  $DE$  donnée de position, on divisera la ligne  $OG$  au point  $M$ , en sorte que  $GM. MO :: QS. AB$ . Et on la prolongera du côté de  $G$  jusqu'au point  $N$ , en sorte que  $GN. NO :: QS. AB$ . Du diamètre  $MN$  on décrira un cercle qui coupera la ligne  $DE$  en un point  $K$ , duquel point comme centre, & du rayon  $KO$  ayant décrit un cercle; ce cercle rencontrera la ligne  $DE$  aux deux points cherchés  $D, E$ .

Comme le cercle qui a pour diamètre la ligne  $MN$ , coupe la droite  $DE$  non seulement au point  $K$ , mais encore en un autre point  $L$ ; il s'ensuit qu'on peut se servir du point  $L$  de même que l'on a fait du point  $K$ , pour trouver sur la ligne  $DE$  deux autres points qui satisferont également, & qu'ainsi cette question peut avoir deux différentes solutions.

Si l'angle  $DCE$  devoit être droit aussi-bien que l'angle  $DOE$ , il est clair que  $QS$  ( $f$ ) deviendrait nulle, & qu'ainsi l'égalité  $f\sqrt{aa+xx}=cd-cx$  se changeroit en celle-ci  $cd-cx=0$ , d'où l'on tire  $x=d$ ; c'est à dire que le centre  $K$  tomberoit alors sur le point  $G$ . Et si le point  $B$  tomboit sur le point  $A$ , l'égalité  $f\sqrt{aa+xx}=cd-cx$  se changeroit en celle-ci  $f\sqrt{aa+xx}=\frac{aa-bb}{2}$ , en mettant pour  $cd$  sa valeur  $\frac{aa-bb-a}{2}$ , & effaçant ensuite les termes où  $c$  (qui devient en ce cas nul) se rencontre; d'où l'on voit que dans ce cas, si du point  $O$  comme centre, & du rayon  $OK=\frac{aa-bb}{2f}$  on décrit un arc de cercle, il coupera la ligne  $DE$  au point cherché  $K$ . Ceci s'accorde parfaitement avec les articles 66. 67. 68. du Livre second, & la construction générale peut servir à trouver tout d'un coup dans une Ellipse dont

deux diamètres conjugués sont donnés, deux autres diamètres conjugués qui fassent entr'eux un angle donné; ce qui dans l'art. 65. avoit été renvoyé ici.

## EXEMPLE IV.

FIG. 245.

432. **T**ROIS points  $A, B, C$ , étant donnés, en trouver un quatrième  $M$ , duquel ayant mené à ces points les droites  $MA, MB, MC$ ; les différences de l'une d'elles aux deux autres soient données.

Cette question est susceptible de trois differens cas. Car ou les trois lignes  $MA, MB, MC$ , sont toutes égales entr'elles; ou il y en a seulement deux qui soient égales entr'elles; ou enfin toutes les trois sont inégales entr'elles.

*Premier cas.* Lorsque les trois lignes  $MA, MB, MC$ , sont égales entr'elles; ou ce qui est la même chose lorsque les deux différences données sont nulles. Il est clair que le point cherché  $M$  sera le centre du cercle qui passe par les trois points donnés  $A, B, C$ .

FIG. 246.

*Second cas.* Lorsque deux des trois lignes  $MA, MB, MC$ , comme  $MA, MB$ , doivent être égales entr'elles; ou (ce qui est la même chose) lorsqu'une des différences données est nulle.

Ayant tiré du point donné  $C$ , la perpendiculaire  $CO$  sur la ligne  $AB$  qui joint les deux autres points donnés  $A, B$ ; du point  $M$  que l'on suppose être celui qu'on cherche, ayant mené les droites  $MP, MQ$ , parallèles à  $CO, OB$ ; il est clair que  $AP$  sera égale à  $PB$ , puisque  $AM$  doit être égale à  $MB$ . Nommant donc les données  $AP$  ou  $PB, a$ ;  $OP, b$ ;  $OC, c$ ;  $AM - MC, f$ ; & les inconnues  $AM, x$ ;  $PM, y$ ; les triangles rectangles  $APM, MQC$ , donneront ces deux égalités  $xx = aa + yy$ , &  $xx - 2fx + ff = cc - 2cy + yy + bb$ ; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la seconde de ceux de la première, il vient  $2fx - ff = aa - cc + 2cy - bb$ , qui se réduit à cette proportion  $x, y + \frac{aa - bb - cc + ff}{2c} :: c, f$ . De là on tire la construction suivante:

Soit menée par le point de milieu  $P$  de la ligne  $AB$ , la perpendiculaire  $PD = \frac{aa-bb-c-c+ff}{2c}$ . Soit divisée l'hypothénuse  $AD$  prolongée du côté qu'il sera nécessaire, aux points  $E, F$ ; en sorte que  $AE.ED :: c.f$ , &  $AF.FD :: c.f$ . Du diamètre  $EF$  soit décrit un cercle; il coupera la ligne  $PD$  au point cherché  $M$ .

Car ayant mené la droite  $MA$ , il est clair par la propriété du cercle  $EMF$ , \* que  $AM(x).$   $MD$  \* *Art. 350.*  
 $(y + \frac{aa-bb-c-c+ff}{2c}) :: c.f$ ; & par la propriété de la perpendiculaire  $PM$ , que  $xx = aa + yy$ . Or comme ces deux équations renferment les conditions du Problème, il s'ensuit &c.

Si par l'autre point  $N$ , où la ligne  $DP$  rencontre la circonférence, on mène les droites  $NA, NB, NC$ ; les deux  $NA, NB$ , seront égales entr'elles, & la différence de chacune de ces deux droites à la troisième  $NC$  sera égale à la donnée  $f$ ; de sorte que le point  $N$  satisfait aussi, mais avec cette différence que  $NC$  est la plus grande des trois droites  $NA, NB, NC$ , au lieu que  $MC$  est la plus petite des trois  $MA, MB, MC$ .

On peut encore résoudre ce second cas sans aucun *Fig. 247.* calcul. Je suppose comme auparavant que  $M$  soit le point cherché, & ayant tiré les droites  $MA, MB, MC$ , je décris du centre  $C$ , & du rayon  $CD = MA - MC$ , un cercle  $DEKFIH$ . Du point  $D$  où la ligne  $MC$  rencontre ce cercle, je mène aux deux points donnés  $A, B$ , les droites  $DA, DB$  qui rencontrent le cercle aux points  $E, F$ ; par où je tire les rayons  $EC, CF$ , & la corde  $EF$ . Cela fait, puisque  $MC + CD$  ou  $MD = MA$ , & que les lignes  $CD, CE$ , sont rayons d'un même cercle, les triangles  $DMA, DCE$ , seront isoscèles; & par conséquent semblables parce que l'angle en  $D$  est commun: c'est pourquoi les lignes  $CE, MA$ , seront parallèles. On prouvera de même que les lignes  $CF, MB$ , seront aussi parallèles; ce qui donne  $DA.DE :: DM.DC :: DB.DF$ . Et de là on voit que toute la difficulté

se réduit à trouver sur la circonférence du cercle  $DEK FH$ , le point  $D$  tel qu'ayant mené les droites  $DA$ ,  $DB$ , qui rencontrent la circonférence aux points  $E$ ,  $F$ ; la corde  $EF$  soit parallèle à la ligne  $AB$ . Or cela se peut faire ainsi.

Ayant décrit du point  $C$  un cercle qui ait pour rayon une ligne  $CD = AM - MC$ , & tiré  $AC$  qui rencontre ce cercle aux points  $K$ ,  $H$ ; on prendra sur  $AB$  la partie  $AG$  quatrième proportionnelle à  $AB$ ,  $AH$ ,  $AK$ ; & on menera du point  $G$  la tangente  $GE$  au cercle  $EDH FK$ . Ayant mené par le point touchant  $E$  la ligne  $AE$  qui rencontre le cercle au point  $D$ , on tirera  $DC$ , sur laquelle on prendra le point  $M$  tel que  $DM : DC :: DA : DE$ . Je dis qu'il sera celui qu'on cherche.

Car par la propriété du cercle  $DEK FH$  le rectangle  $HA \times AK = DA \times AE$ ; Et par conséquent  $BA : AD :: AE : AG$ ; c'est pourquoi les triangles  $DAB$ ,  $GAE$ , qui ont l'angle en  $A$  commun, & les côtés autour de cet angle réciproquement proportionnels, seront semblables. L'angle  $AEG$  sera donc égal à l'angle  $ABD$ ; mais cet angle  $AEG$  étant fait par la tangente  $EG$  & par la corde  $DE$  prolongée du côté de  $E$ , a pour mesure la moitié de l'arc  $DE$ . Il sera donc égal (en tirant par le point  $F$  où la ligne  $DB$  rencontre la circonférence, la corde  $EF$ ) à l'angle  $DFE$ ; & par conséquent les lignes  $FE$ ,  $AB$ , seront parallèles entr'elles. Or par la construction  $DC, DM :: DE : EA :: DF, FB$ . Les triangles  $DMA$ ,  $DMB$ , seront donc isocèles; puisque les triangles  $DCE$ ,  $DCF$ , qui leur sont semblables sont isocèles. Les lignes  $AM$ ,  $MB$ , seront donc égales chacune à  $DM$ , & par conséquent entr'elles; & de plus  $AM$  ou  $DM$  surpassera  $MC$  de la grandeur donnée  $CD$ , Et c'est ce qui étoit proposé.

**FIG. 148.** *Troisième cas.* Lorsque les trois lignes  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ , sont inégales entr'elles. Du point donné  $C$ , je mène la perpendiculaire  $CO$  sur la ligne  $AB$  qui joint les deux autres points donnés; & du point  $M$ , que je suppose

suppose être celui qu'on demande, les perpendiculaires  $MP$ ,  $MQ$ , sur les lignes  $AB$ ,  $CO$ . Je nomme les données  $AO$ ,  $a$ ;  $OB$ ,  $b$ ;  $CO$ ,  $c$ ;  $AM-MB$ ,  $d$ ;  $AM-MC$ ,  $f$ ; & les inconnues  $OP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ;  $AM$ ,  $z$ : ce qui donne  $AP=a-x$ ,  $BP=b-x$ ,  $CQ=c-y$ ,  $BM=z-d$ ,  $CM=z-f$ . Par le moyen des triangles rectangles  $APM$ ,  $BPM$ ,  $CQM$ , je trouve les trois équations suivantes; la première,  $zz=aa-2ax+xx+yy$ ; la deuxième,  $zz-2dz+dd=bb-2bx+xx+yy$ ; la troisième,  $zz-2fz+ff=cc-2cy+yy+xx$ ; & retranchant par ordre les membres des deux dernières de ceux de la première, je forme une quatrième, & une cinquième équation; sçavoir la quatrième,  $2dz-dd=aa-bb+2ax-2bx$ , & la cinquième,  $2fz-ff=aa-cc+2ax-2cy$ . Je mets dans la première équation à la place de  $yy$  le carré de la valeur de  $y$  trouvée par le moyen de la cinquième; & ensuite à la place de  $x$  sa valeur trouvée par le moyen de la quatrième, & à la place de  $xx$  le carré de cette valeur: ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnues que la seule  $z$  qui ne monte qu'au carré. C'est pourquoi on la pourra toujours résoudre en n'employant que des lignes droites & des cercles, comme l'on a enseigné dans les articles 380, ou 382 (Liv. précéd.) Or ayant la valeur de l'inconnue  $z$ , il est facile de trouver le point cherché  $M$ ; car il sera dans l'intersection de deux arcs de cercle, dont l'un aura pour centre le point  $A$ , & pour rayon la ligne  $AM$  ( $z$ ); & l'autre pour centre le point  $B$ , & pour rayon la ligne  $BM$  ( $z-d$ ).

On voit assez qu'en achevant le calcul, on seroit arrivé à une égalité du deuxième degré qui auroit renfermé dans ses termes des quantités très-composées; de sorte que pour les réunir sous des expressions simples, comme le demandent les articles 380, & 382, on auroit besoin d'un grand nombre d'opérations; ce qui rendroit la construction très-longue. C'est pourquoi on se servira de celle-ci par le moyen de laquelle on réduit ce cas au précédent.

FIG. 249.

Les deux droites  $AB$ ,  $AC$ , qui joignent les points donnés étant divisées par le milieu aux deux points  $D$ ,  $F$ , & ayant mené du point  $M$  que je suppose être celui qu'on cherche, les perpendiculaires  $MP$ ,  $MQ$ , sur ces deux lignes; on nommera les données  $AB$ ,  $2a$ ;  $BC$ ,  $2b$ ;  $AM - MB$ ,  $2c$ ;  $AM - MC$ ,  $2d$ ; & les inconnues  $DP$ ,  $x$ ;  $FQ$ ,  $y$ . Cela posé, si l'on nomme  $t$  la somme inconnue des deux droites  $AM$ ,  $BM$ ; la plus grande  $AM$  sera  $t + c$  & la moindre  $BM$  sera  $t - c$ . Or les triangles rectangles  $APM$ ,  $BPM$ , donnent  $\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BP}^2$ , c'est à dire en termes analytiques  $t^2 + 2ct + cc - aa - 2ax - xx = t^2 - 2ct + cc - aa + 2ax - xx$ , d'où l'on tire  $t = \frac{ax}{c}$ ; & par conséquent  $AM(t + c) = \frac{ax}{c} + c$ . On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles  $AQM$ ,  $CQM$ , que  $AM = \frac{by}{d} + d$ ; ce qui, en comparant ensemble les deux valeurs de  $AM$ , donne cette équation  $\frac{ax}{c} + c = \frac{by}{d} + d$ , ou  $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + d - c = \frac{by}{d} + f$ , en faisant pour abréger  $d - c = f$ . D'où il est clair que le point cherché  $M$  doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires  $MP$ ,  $MQ$ , sur les deux droites  $AB$ ,  $AC$ ; on ait cette équation  $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + f$ , ou ce qui revient au même cette proportion  $x \cdot y + \frac{df}{b} :: b \cdot \frac{ad}{c}$ . Or cela suffit pour trouver la construction suivante.

Ayant joint les points donnés par les deux droites  $AB$ ,  $AC$ , & divisé ces droites par le milieu aux points  $D$ ,  $F$ ; on prendra sur  $AC$  du côté du point  $A$  la partie  $FK = \frac{df}{b}$ ; & ayant tiré sur  $AB$ ,  $AC$ , les perpendiculaires  $DO$ ,  $KS$ , qui se rencontrent au point  $H$ , on menera dans l'angle  $OHS$  la droite  $HM$  qui soit le lieu des points  $M$ , tels qu'ayant tiré de chacun d'eux



les perpendiculaires  $MO$ ,  $MR$ , sur les côtés  $HO$ ,  $HS$ ; la droite  $MO$  soit toujours à la droite  $MR$ , en la raison donnée de  $b$  à  $\frac{ad}{c}$ . Ensuite l'on tirera  $AE$  perpendiculaire sur  $HM$ , & l'ayant prolongée en  $G$  en sorte que  $EG$  soit égale à  $AE$ , on trouvera par le second cas le point  $M$ , tel qu'ayant mené les droites  $MA$ ,  $MG$ ,  $MC$ ; les deux  $MA$ ,  $MG$ , soient égales entr'elles, & la différence de  $MA$  à  $MC$  soit la donnée  $2d$ . Je dis qu'il satisfera à la question.

Car par la propriété de la droite  $HM$ , on aura toujours  $MO$  ou  $DP(x)$ .  $MR$  ou  $QK\left(y + \frac{df}{b}\right) :: b. \frac{df}{b}$ ; & par conséquent le point  $M$  se doit trouver dans cette ligne. Il sera donc également éloigné des points  $A$ ,  $G$ ; mais de plus la différence de  $AM$  à  $MC$  doit être la donnée  $2d$ . Donc &c.

## REMARQUE.

433. Si au lieu que dans cet exemple, les deux différences de l'une de ces trois droites  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ , aux deux autres sont données; on vouloit à présent que ce fussent les deux sommes de l'une de ces droites avec chacune des deux autres, ou bien la somme de l'une d'elles avec une autre & la différence de la même avec la troisième: la question n'en deviendrait pas plus difficile, & on pourroit toujours la résoudre par les mêmes méthodes. Ce que je n'expliquerai point en détail, afin de laisser quelque chose à l'industrie des Lecteurs.

## COROLLAIRE I.

434. DE LA on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

Car soient les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , les centres des cercles donnés, & le point  $M$  celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons

FIG. 250.

Bbb ij

des cercles donnés  $AD=a$ ,  $BE=b$ ,  $CF=c$ ; & le rayon du cercle qu'on cherche  $MD$  ou  $ME$  ou  $MF = x$ . Cela posé, on aura  $AM=x-a$ ,  $MB=x-b$ ,  $MC=x-c$ ; & partant  $AM-MB=a-b$ ,  $MB-MC=b-c$ ,  $AM-MC=a-c$ . D'où il est évident que la question se réduit à trouver un point  $M$ , duquel ayant mené aux trois points donnés  $A, B, C$ , les droites  $MA, MB, MC$ , leurs différences soient données.

## COROLLAIRE II.

FIG. 251.  
252.

435. DE LA on tire encore la maniere de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné  $F$ , qui passe par deux autres points donnés  $B, C$ , & qui touche une ligne droite  $DE$  donnée de position.

On doit distinguer ici deux differens cas, dont le premier est, lorsque les trois points donnés  $F, B, C$ , tombent du même côté de la droite indéfinie  $DE$ ; & le second lorsqu'ils tombent de part & d'autre.

FIG. 251.

*Premier cas.* Ayant mené  $FD$  perpendiculaire sur  $DE$ , & l'ayant prolongée en  $A$  en sorte que  $DA$  soit égale à  $DF$ ; on tirera les droites  $FB, FC$ . On trouvera le point  $M$  tel que la différence de  $AM$  &  $BM$  soit égale à  $FB$ , & celle de  $AM$  &  $MC$  égale à  $FC$ . On décrira ensuite \* une Section conique qui ait pour ses deux foyers les points  $F, M$ , & pour l'axe qui passe par les foyers une ligne égale à  $AM$ . Je dis qu'elle sera celle qu'on cherche.

\* Def. 1. II.

♣ 1. III.

Car 1°. Le point  $E$  où la ligne  $AM$  rencontre la droite  $DE$  est à la Section, puisque  $FE$  étant égale à  $AE$ , on aura dans l'Ellipse la somme des droites  $FE, EM$ , & dans l'Hyperbole la différence égale à l'axe qui passe par les foyers; & par la même raison les points  $B, C$ , seront aussi dans la Section. 2°. Par la construction les angles  $FED, DEA$ , sont égaux entr'eux; & par conséquent la ligne  $ED$  est \* tangente en  $E$ .

\* Art. 60.

♣ 123.

Il faut remarquer dans ce cas que lorsqu'on cherche

le foyer  $M$  du même côté du foyer donné  $F$  par rapport à ligne  $DE$ , la Section qu'on trouve est une Ellipse; au lieu qu'elle sera une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées, lorsqu'on le cherchera de l'autre côté.

*Second cas.* Il est évident que dans ce dernier cas il ne peut y avoir d'Ellipse qui satisfasse, mais seulement deux Hyperboles opposées. Pour les trouver, ayant mené comme dans le premier cas  $FD$  perpendiculaire sur  $DE$ , & l'ayant prolongée en  $A$  en sorte que  $DA$  soit égale à  $DF$ ; on cherchera le point  $M$  tel que la somme de  $AM$  &  $BM$  soit égale à la donnée  $FB$ , & la différence de  $AM$  &  $MC$  soit égale à la donnée  $FC$ . On décrira enfin deux Hyperboles opposées qui aient pour foyers les deux points  $F, M$ , & dont le premier axe soit égal à  $AM$ . Je dis qu'elles ont les conditions requises. FIG. 252.

Car 1°. Le point  $E$ , où la ligne  $AM$  rencontre la ligne  $DE$ , sera à l'une de ces deux Hyperboles, puisque  $FE$  étant égale à  $AE$ , la différence des droites  $FE, ME$ , sera égale à  $AM$  valeur du premier axe; & par la même raison les points  $B, C$ , seront à ces Hyperboles. 2°. La ligne  $DE$  sera \* tangente en  $E$ , puisque par la construction les angles  $AED, DEF$ , sont égaux entr'eux. \* *Art. 123.*

Si le point  $C$  tomboit du même côté du point  $B$  par rapport à la ligne  $DE$ , la somme des deux droites  $AM$  &  $MC$  seroit égale à la donnée  $FC$ ; au lieu que c'est la différence lorsque les points  $B, C$ , tombent de part & d'autre de la ligne  $DE$ , comme l'on a supposé dans cette figure.

Si l'on proposoit de décrire une Section conique qui eût pour foyer un point donné, pour tangentes deux lignes données de position, & qui passât par un autre point donné; on trouveroit par le moyen de ces deux lignes deux points comme l'on vient de faire le point  $A$ , desquels ayant mené deux droites qui aboutissent à l'autre foyer qu'on cherche, elles doivent être égales entr'elles, & leur différence ou leur somme avec celle qui part du

point où doit passer la Section & qui aboutit au même foyer, sera toujours donnée : de sorte qu'on pourra toujours résoudre la question par le moyen de l'Exemple précédent, & de sa Remarque. Enfin s'il falloit décrire une Section qui touchât trois lignes données de position, & qui eût pour foyer un point donné, on trouveroit par le moyen de ces trois lignes trois points comme l'on a fait le point *A* par le moyen de la ligne *DE* dans les deux cas précédens, & le centre du cercle qui passeroit par ces trois points, seroit l'autre foyer de la Section, laquelle auroit pour premier axe une ligne égale au rayon de ce cercle.

On doit observer dans tous ces différens cas, que si le point cherché *M* étoit infiniment éloigné du point *F*; la Section deviendrait alors une Parabole dont les diamètres seroient parallèles aux lignes, qui, continuées à l'infini, aboutiroient au point cherché.

## E X E M P L E V.

FIG. 253. 436. UNE Parabole *NCS* étant donnée avec un de ses arcs *MN*; trouver un autre arc *RS* qui soit à l'arc *MN*, en raison donnée de nombre à nombre.

Ayant prolongé l'axe de la Parabole du côté de son origine *C* jusques en *A*, en sorte que *CA* soit égal à la moitié de son parametre, & décrit une Hyperbole équilatère *EAF* qui ait pour centre le point *C* & pour la moitié de son premier axe la ligne *CA*; on mena parallèlement à l'axe *CA* les droites *MB*, *NE*, *RD*, *SF*, qui rencontrent le second axe aux points *H*, *L*, *K*, *O*, & l'Hyperbole aux points *B*, *E*, *D*, *F*, desquels on tirera sur les Asymptotes les perpendiculaires *BP*, *EQ*, *DG*, *FI*. Cela fait, il est visible que le rectangle *AC × MN* ou \* *Art. 246.* le Trapeze hyperbolique *HBEL* est égal au Secteur hyperbolique *CBE* plus le triangle *CLE* moins le triangle *CHB*; & de même que  $AC \times RS = CDF + COF - CKD$ . Or supposant que la raison donnée de l'arc

$MN$  à l'arc  $RS$  soit comme  $m$  est à  $n$ , les lettres  $m$  &  $n$  expriment des nombres entiers quelconques) on aura par la condition du Problème  $AC \times MN$  ou  $CBE - CLE - CHB$ .  $AC \times RS$  ou  $CDF - COF - CKD :: m. n$ , & par conséquent  $nCBE - nCLE - nCHB = mCDF - mCOF - mCKD$ . Si donc l'on nomme les données  $CP, b$ ;  $CQ, c$ ; l'inconnue  $CG, x$ ; & qu'on prenne  $CI = x \sqrt{\frac{a}{b}}$ , il est clair \* que le Secteur hyper- \* Art. 223.  
bolique  $CBE$ .  $CDF :: m. n$ , & qu'ainsi  $nCBE = mCDF$ ; d'où l'on voit que l'égalité précédente se change en celle-ci  $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$  qui ne renferme plus d'espaces hyperboliques, mais seulement des triangles rectangles dont il s'agit maintenant de trouver les valeurs analytiques.

Les droites  $CP, HB$ , forment en s'entrecoupant au point  $N$  deux triangles rectangles  $VHC, VPB$ , qui sont semblables; puisque les angles en  $V$  étant opposés au sommet sont égaux; ce qui donne  $HV. CV :: VP. VB$ , & en multipliant les extrêmes & les moyens  $HV \times VB = CV \times VP$ . De plus à cause de l'Hyperbole équilatère  $EAF$ , l'angle  $VCA$  ou  $CVH$  \* est demi \* Def. 16.  
droit, & par conséquent le triangle rectangle  $CHV$  III.  
est isoscèle, aussi-bien que son semblable  $VPB$ , ce qui donne  $VP = PB$ ,  $CH = HV$ , &  $\overline{CV}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HV}^2 = 2 \overline{HV}^2$ . Donc le quadruple du triangle rectangle  $CHB$ , c'est à dire  $2CH \times HB = 2HV \times \overline{HV} + \overline{VB}^2 = 2 \overline{HV}^2 + 2HV \times VB = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2 - \overline{VP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PB}^2$ , puisque  $\overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2$  est le carré de  $CV + VP$  ou de  $CP$ . Et par conséquent le triangle  $CHB = \frac{1}{4} \overline{CP}^2 - \frac{1}{4} \overline{PB}^2$ . On prouvera de même que le triangle  $CLE = \frac{1}{4} \overline{CQ}^2 - \frac{1}{4} \overline{QE}^2$ , que le triangle  $CKD = \frac{1}{4} \overline{CG}^2 - \frac{1}{4} \overline{GD}^2$ , & enfin que le triangle  $COF = \frac{1}{4} \overline{CI}^2 - \frac{1}{4} \overline{IF}^2$ . C'est pourquoi nommant  $a$  la puissance de l'Hyperbole,

on aura le triangle  $CHB = \frac{1}{4}bb - \frac{a^4}{4bb}$ , le triangle  $CLE = \frac{1}{4}cc - \frac{a^4}{4cc}$ , le triangle  $CKD = \frac{1}{4}xx - \frac{a^4}{4xx}$ , le

\* Art. 101. triangle  $COF = \frac{xx}{4} \sqrt{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{4xx} \sqrt{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ ; puisque \*  $PB$

$= \frac{aa}{b}$ ,  $QE = \frac{aa}{c}$ ,  $IF = \frac{aa}{x} \sqrt{\frac{b^n}{c^n}}$ : & mettant ces valeurs

à la place des triangles qu'elles expriment dans l'égalité  $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$ , on en formera

celle-ci  $\frac{1}{4}n \times cc - \frac{a^4}{4cc} - bb - \frac{a^4}{4bb} = \frac{1}{4}m \times xx \sqrt{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{4xx} \sqrt{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$

$- xx - \frac{a^4}{4xx}$  qui se réduit, en opérant selon les règles

ordinaires de l'Algebre, à cette égalité du deuxième

degré  $x^4 - \frac{na^4 - nb^2ccx - bbx\sqrt{b^{2n}}}{mbb^2cx\sqrt{c^{2n}} - \sqrt{b^{2n}}} xx - \frac{a^4}{4} \sqrt{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} = 0$ , dont

la résolution doit fournir pour  $CG (x)$  une valeur telle

qu'en prenant  $CI = x \sqrt{\frac{c^n}{b^n}}$ , & tirant les perpendicu-

lares  $GD$ ,  $IF$ , qui rencontrent l'Hyperbole équilate-

re aux points  $D$ ,  $F$ ; l'arc  $RS$  que les paralleles  $DR$ ,

$FS$  à l'axe coupent sur la Parabole, sera à l'arc  $MN$

en la raison donnée de  $n$  à  $m$ .

Il est à propos de remarquer, 1<sup>o</sup>. Que le second terme

de cette égalité est toujours negatif, parce que  $CQ(c)$

surpasse  $CP(b)$ ; & qu'ainsi ces deux racines seront toutes

deux vraies ou toutes deux imaginaires, selon que la moi-

tié de la grandeur connue au second terme est plus gran-

de ou moindre que  $aa \sqrt{\frac{b^n}{c^n}}$  racine quarrée du dernier

terme: ce qui est une suite de la résolution des égalités

du second degré. 2<sup>o</sup>. Que  $\overline{CG} (xx)$  étant une des ra-

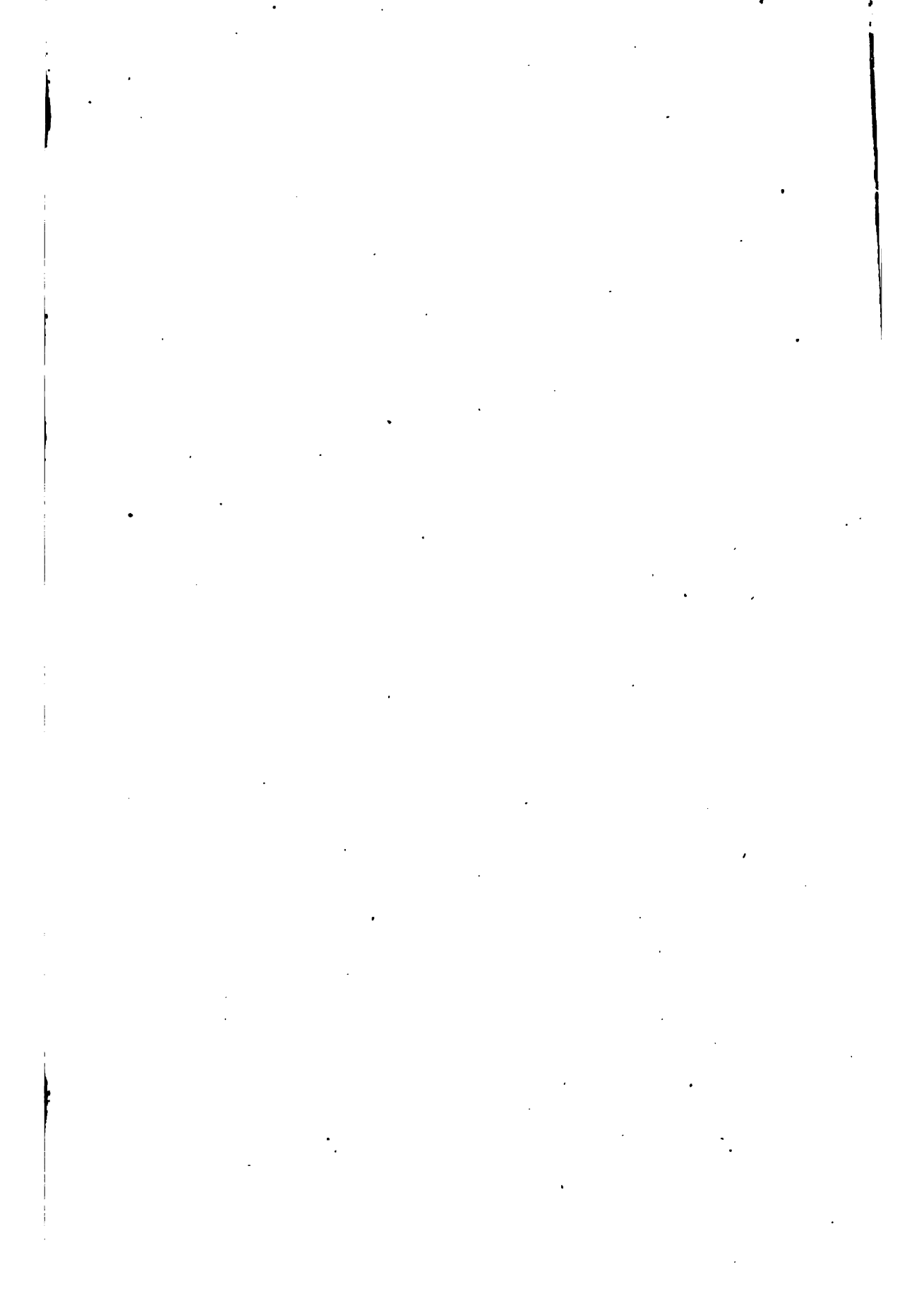
cines de cette égalité,  $\overline{IF}$  en fera l'autre. Car puisque

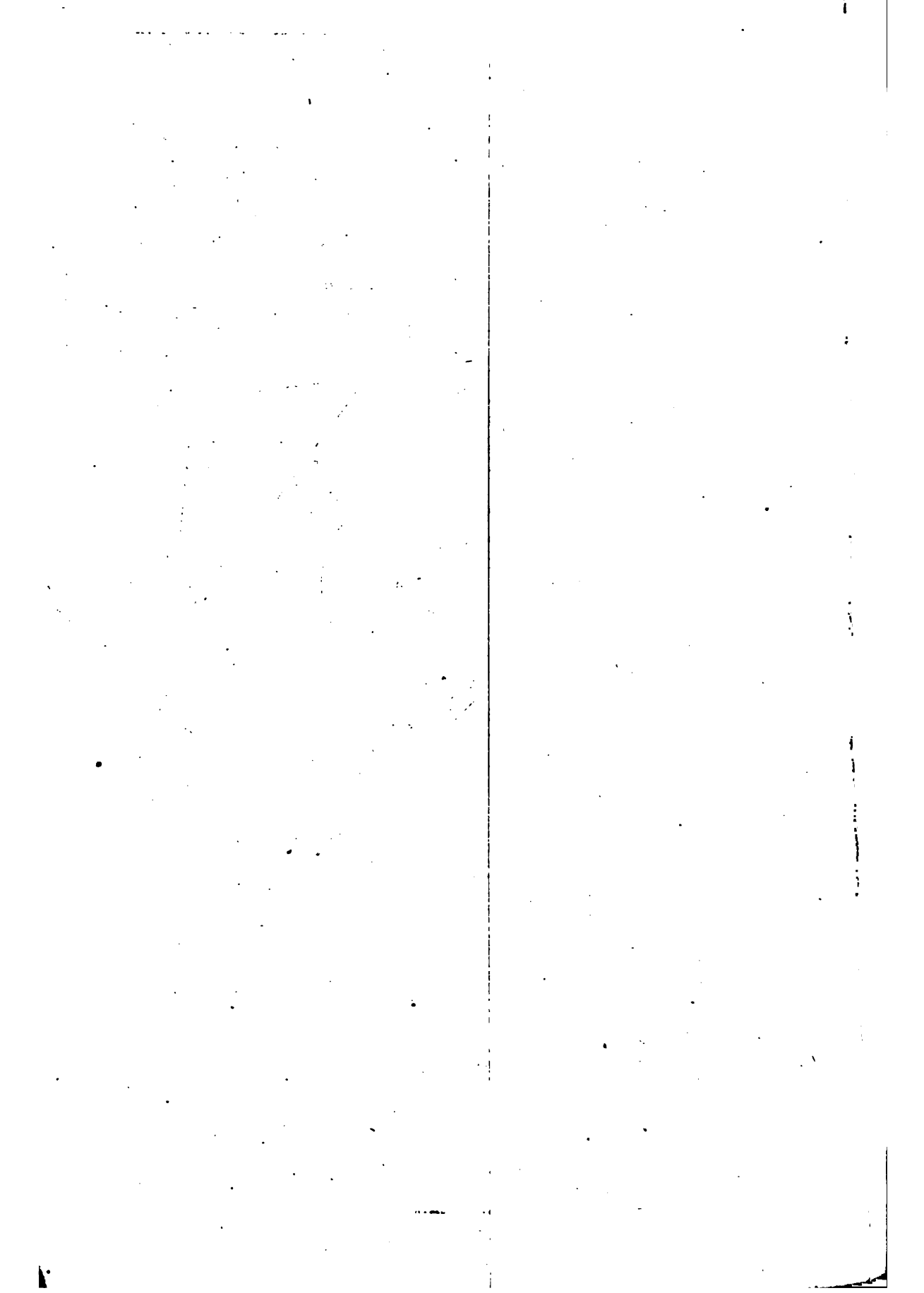
\* Art. 101.  $CI = x \sqrt{\frac{c^n}{b^n}}$ , il s'ensuit \* que  $IF = \frac{aa}{x} \sqrt{\frac{b^n}{c^n}}$ . Or on sçait

que le dernier terme d'une égalité, est le produit de ses

racines. Si donc on divise le dernier terme  $a^4 \sqrt{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$  de

l'égalité







l'égalité précédente, par le quarré  $\overline{CG}^2 (xx)$  que l'on suppose être l'une de ses deux racines; l'autre sera  $\frac{a^2}{xx} \sqrt{\frac{b^2}{c^2}}$  qui est le quarré de  $FI$ . D'où l'on voit que si l'on prend sur les deux Asymptotes les parties  $CG, CT$ , égales aux deux racines de l'égalité précédente; & qu'ayant tiré les paralleles  $GD, TF$ , aux Asymptotes, on mene par les points  $D, F$ , où elles rencontrent l'hyperbole équilatere  $EAF$ , les paralleles  $DR, FS$ , à l'axe: elles couperont sur la Parabole l'arc cherché  $RS$ .

Si  $m=n$ , l'équation generale se changera en celle-ci  $x^4 - \frac{bbcc-a^4}{c^2} xx + \frac{a^4bb}{c^2} = 0$ , dont les deux racines fourniront  $CG(x) = b = CP$ , &  $CT(x) = \frac{a^2}{c} = QE$ ; d'où il suit qu'on trouve par leur moyen un arc  $RS$ , semblablement posé de l'autre côté de l'axe, par rapport à l'arc  $MN$ . Or comme l'on sçait d'ailleurs \* que \* Art. 86. les deux arcs  $RS, MN$ , étant semblablement posés de part & d'autre de l'axe sont égaux entr'eux, cela sert à confirmer les raisonnemens que l'on vient de faire. De là il est aisé de conclure qu'un arc parabolique  $MN$  étant donné, on n'en peut trouver aucun autre  $RS$  qui soit plus proche ou plus éloigné de l'origine  $C$  de l'axe & qui lui soit égal; sans supposer la quadrature de quelque Secteur hyperbolique, ou (ce qui revient au même) la rectification de quelque arc parabolique.

Si  $m=1$  &  $n=2$ , on aura  $x^4 - \frac{2a^4bb-2ccb^4}{c^4+bbcc} xx + \frac{a^4b^4}{c^4} = 0$ ; & si  $m=2$  &  $n=3$ , ou, ce qui est la même chose, si l'arc  $RS$  doit être à l'arc  $MN$  comme 3 est à 2, on trouvera  $x^4 - \frac{3a^4-3bbccubcc-b^3}{2c^3-2ccb^3} xx + \frac{a^4b^3}{c^3} = 0$ ; & la resolution de ces égalités fournira celle du Problème. Il en est de même des autres valeurs de  $m$  &  $n$ .

M. *Bernoulli* celebre Professeur des Mathematiques à Groningue, a resolu le premier ce Problème d'une maniere differente de celle-ci. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de *Leipsc* de l'année 1698. p. 261.

## EXEMPLE VI.

Fig. 254. 437. UN angle  $BAC$  étant donné avec un point  $D$  au dedans de cet angle, décrire un cercle qui passe par le point donné  $D$ , qui touche le côté  $AB$  en quelque point  $P$ , & qui coupe sur l'autre côté  $AC$  une partie  $OC$  égale à une ligne donnée  $2a$ .

Ayant supposé le Problème résolu, on menera du point donné  $D$ , la ligne  $DA$  qui passe par le sommet  $A$  de l'angle donné, la ligne  $DP$  qui passe par le point touchant  $P$  & rencontre en  $H$  le côté  $AC$  prolongé, la ligne  $DE$  parallèle à  $AC$ , & la perpendiculaire  $DB$  sur le côté  $AB$ : & ayant divisé la partie interceptée  $OC$  ( $2a$ ) par le milieu en  $Q$ , on nommera les inconnues  $AP, x$ ;  $AQ, z$ ;  $DH, t$ ; & les données  $AE, m$ ;  $AB, g$ ;  $BD, b$ ;  $DE, f$ ;  $AD, n$ . Cela fait, on aura par la propriété du cercle,  $\overline{AP}^2 (xx) = CA \times AO$  ou  $\overline{AQ}^2 (zz) - \overline{QO}^2 (aa)$ , & partant  $zz = xx + aa$ . De plus les triangles semblables  $PED, PAH$ , donnent  $AE (m). AP (x) :: DH (t). HP = \frac{tx}{m}$ . Et  $PE (m-x). ED (f) :: AP (x). AH = \frac{fx}{m-x}$ . Donc  $HQ = z + \frac{fx}{m-x}$  &  $CH \times HO$  ou  $\overline{HQ}^2 - \overline{QO}^2 = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{f^2x^2}{m-x^2} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{f^2x^2}{m-x^2}$  (en mettant pour  $zz$  sa valeur  $xx + aa$ )  $= DH \times HP \left( \frac{tx}{m} \right)$  par la propriété du cercle, c'est à dire qu'en divisant par  $x$ , on aura cette égalité  $x + \frac{fx}{m-x} + \frac{fx^2}{m-x^2} = \frac{tx}{m}$ . Or  $PD$  ou  $DH - HP = \frac{mt-tx}{m}$ ; & (à cause du triangle rectangle  $DBP$ ) son carré  $\frac{mmt^2 - 2mttx + t^2xx}{mm} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$  en mettant pour  $bb + gg$  sa valeur  $nn$ ; d'où l'on tire  $\frac{tx}{m} = \frac{mxx - 2gmx + mnn}{m-x^2} = x + \frac{2fx}{m-x} + \frac{fx^2}{m-x^2}$ , & multipliant par  $m-x$ , &

transposant le terme  $\frac{ffx}{m-x}$ , il vient  $mx - xx + 2fx$   
 $= \frac{mxx - 2gm - fx + mm}{m-x} = \frac{mxx - mmx - nx + mm}{m-x}$ , puisque à  
 cause du triangle rectangle  $DEB$  on trouve  $ff = bb + gg$   
 $- 2gm - mm = nn - 2gm - mm$ : c'est à dire, parce  
 que la division se fait au juste,  $mx - xx + 2fx = -mx$   
 $+ nn$  ou  $2fx = xx - 2mx + nn$ . Quarrant enfin cha-  
 que membre, & mettant pour  $xx$  la valeur  $xx + aa$ ,  
 on aura cette égalité

$$\begin{aligned} x^4 - 4mx^3 + 4m^2xx - 4mnx + n^4 &= 0 \\ - 4ff & - 4aaff \\ + 2nn & \end{aligned}$$

qui est du quatrième degré, & dont les racines que l'on  
 trouvera par le moyen d'un cercle & d'une Parabole  
 donnée ou de telle autre Section conique qu'on voudra  
 doivent fournir pour  $AP(x)$  des valeurs telles que me-  
 nant  $PM$  perpendiculaire sur  $AP$ , tirant  $PD$ , & fai-  
 sant l'angle  $PDM$  égal à l'angle  $DPM$ , le point  $M$ , où  
 se rencontrent les côtés  $DM$ ,  $PM$  du triangle isoscel-  
 le  $DPM$ , soit le centre du cercle cherché, qui aura pour  
 rayon la droite  $MP$  ou  $MD$ . Ou bien si l'on prend sur  
 le côté  $AB$  la partie  $AP = x$ , & sur l'autre côté  $AC$   
 la partie  $AQ = \sqrt{xx + aa}$ , & qu'on mene sur ces cô-  
 tés les perpendiculaires  $PM$ ,  $QM$ ; le point  $M$  où elles  
 se rencontrent, sera le centre du cercle qu'on demande.

Comme rien n'est plus propre à donner de l'ouver-  
 ture à l'esprit, que de faire voir les différens chemins  
 qu'on peut suivre pour arriver à la connoissance de la  
 même verité; je vais donner une autre maniere de re-  
 soudre cette question, qui me paroît encore plus natu-  
 relle que la précédente.

Ayant supposé que le point  $M$  soit le centre  
 du cercle cherché, on mènera les perpendiculaires  
 $MP$ ,  $MQ$ , sur les côtés de l'angle donné  $BAC$ , & les  
 paralleles  $MF$ ,  $MG$ , à ces côtés; & du point donné  
 $D$ , on tirera les paralleles  $DB$ ,  $DE$ ,  $DK$ , à  $MP$ ,  
 $MF$ ,  $AB$ . On nommera ensuite les données  $DB$ ,  $b$ ;

$BE, c; DE, f; AB, g; AE, m; AD, n;$  & les inconnues  $AP, x; PM$  ou  $MD, y;$  & on aura  $PB$  ou  $DK = g - x, MK = y - b$ : ce qui donne (à cause du triangle rectangle  $MKD$ ) l'équation  $yy = gg - 2gx - 2xy + yy - 2by + bb$ , d'où l'on tire  $y = \frac{xx - 2gx + bb + gg}{2b}$

$= \frac{xx - 2gx + m}{2b}$  en mettant pour  $bb + gg$  sa valeur  $nn$ .

Or à cause des triangles semblables  $DBE, MPF$ , on a cette proportion  $DB (b). BE (c) :: PM (y). PF = \frac{cy}{b}$ , & partant  $AF$  ou  $MG = \frac{bx - cy}{b}$ ; & à cause des

triangles semblables  $DBE, MQG, DE (f). DB (b) :: MG (\frac{bx - cy}{b}). MQ = \frac{bx - cy}{f}$ ; Donc puisque par les

conditions du Problème, il faut que  $QC$  moitié de la partie interceptée  $OC$  soit égale à la ligne donnée  $a$ , & que les droites  $MC$  &  $MP$  soient rayons d'un même cercle cherché, il vient  $\overline{MC}^2 = \frac{bbxx - 2bcxy + ccy}{f}$

$+ aa = \overline{MP}^2 (yy)$ , & multipliant par  $ff$  on aura  $bbxx - 2bcxy + ccy + aaff = ffyy = bbxx - 2bcxy + ccy$ , en mettant pour  $ff$  sa valeur  $bb + cc$ , c'est à dire  $ffxx + aaff = ccxx + 2bcxy + bbxx$ , en effaçant de part & d'autre  $ccyy$ , & mettant pour  $bbxx$  sa valeur  $ffxx - ccxx$ ; ce qui donne par l'extraction de la racine quarrée,  $f\sqrt{xx + aa} = cx + by = \frac{2cx - 2gx + xx + m}{2}$

en mettant pour  $y$  sa valeur  $\frac{xx - 2gx + m}{2b}$ , & enfin si l'on met pour  $g - c$  sa valeur  $m$ , on trouvera la même égalité que ci-dessus  $2f\sqrt{xx + aa} = xx - 2mx + nn$ .

Voici encore une nouvelle maniere de resoudre cette question, qui donne d'abord une construction fort aisée; mais qui demande la description de deux Paraboles. 1°. Je cherche le lieu des points  $M$ , tels qu'ayant mené de chacun de ces points au point donné  $D$  une ligne droite  $MD$ , & sur la ligne  $AB$  donnée de position la perpendiculaire  $MP$ ; ces deux lignes  $MD, MP$ , soient toujours égales entr'elles: & je vois sans aucun calcul que c'est \*

la Parabole qui a pour foyer le point  $D$ , & pour directrice la ligne  $AB$ . 2°. Je cherche le lieu des points  $M$ , tels qu'ayant décrit de chacun de ces points un cercle qui passe par le point donné  $D$ ; ce cercle coupe sur la ligne  $AL$  donnée de position, la partie  $OC$  égale à une ligne donnée  $2a$ . Je mene à cet effet du point donné  $D$  la perpendiculaire  $DL$  sur  $AL$ , & d'un des points cherchés  $M$  que je regarde comme donné, les perpendiculaires  $MR$ ,  $MQ$ , sur  $DL$ ,  $AL$ : & ayant nommé les inconnues & indéterminées  $DR$ ,  $x$ ;  $RM$ ,  $y$ ; qui font entr'elles un angle droit  $DRM$ , & la connue  $DL$ ,  $b$ ; j'ai à cause du triangle rectangle  $MRD$  le quarré  $\overline{MD} = xx + yy$ , & à cause du triangle rectangle  $MQC$  le quarré  $\overline{MC} = \overline{MQ}^2 (bb - 2bx + xx) + \overline{QC}^2 (aa)$ . Or les lignes  $MD$ ,  $MC$ , étant rayons du même cercle sont égales entr'elles, & par conséquent  $xx + yy = bb - 2bx + xx + aa$ , ou  $yy = bb - aa - 2bx$ . Si donc l'on construit la Parabole qui est le lieu de cette équation, il est visible qu'elle passera par le centre  $M$  du cercle qu'on demande: mais la Parabole qui a pour foyer le point  $D$  & pour directrice la ligne  $AB$  devant aussi passer par ce centre, il s'ensuit que le centre du cercle cherché se trouvera dans l'intersection de ces deux Paraboles.

## EXEMPLE VII.

438. UN cercle qui a pour centre le point  $A$  & pour rayon la droite  $AM$ , étant donné, avec deux points  $E$ ,  $F$ , sur le même plan; trouver sur la circonférence au dedans de l'angle  $EAF$ , le point  $M$  tel qu'ayant mené les droites  $AM$ ,  $EM$ ,  $FM$ ; les deux angles  $AME$ ,  $AMF$ , soient égaux entr'eux.

FIG. 255.

Si les lignes  $AE$ ,  $AF$ , étoient égales entr'elles, il est visible que la ligne qui diviserait par le milieu l'angle  $EAF$ , couperoit la circonférence dans le point qu'on demande. C'est pourquoi on supposera que ces deux lignes sont inégales, & même pour éviter la confusion

que c'est la ligne  $AE$  qui est moindre que la ligne  $AF$ . Or cela posé, je refonds ce Problème en deux différentes manières.

## PREMIERE MANIERE.

Ayant supposé que le point  $M$  soit celui qu'on cherche, on mena les droites  $MB$ ,  $MD$ , qui fassent sur  $AF$ ,  $AE$ , des angles  $MBA$ ,  $MDA$ , égaux aux angles  $AMF$ ,  $AME$ , & par conséquent entr'eux; & à cause des triangles semblables  $AFM$ ,  $AMB$ , &  $AEM$ ,  $AMD$ , on aura ces deux proportions  $AF.AM::AM.AB$ . Et  $AE.AM::AM.AD$ . Donc puisque les lignes  $AF$ ,  $AE$ , sont données avec le rayon  $AM$ , les parties  $AB$ ,  $AD$ , des droites  $AF$ ,  $AE$ , le seront aussi. Maintenant, si l'on mene les droites  $MP$ ,  $MQ$ , paralleles à  $AE$ ,  $AF$ ; les triangles  $BPM$ ,  $DQM$  seront semblables, puisque les angles  $APM$ ,  $AQM$ , sont égaux, comme aussi les angles  $PBM$ ,  $QDM$ , complemens à deux droits des angles égaux,  $MBA$ ,  $MDA$ ; & partant si l'on nomme les données  $AB$ ,  $a$ ;  $AD$ ,  $b$ ; & les inconnues  $AP$  ou  $QM$ ,  $x$ ;  $PM$  ou  $AQ$ ,  $y$ ; on aura  $BP(x-a).PM(y)::DQ(y-b).QM(x)::$  ce qui donne (en multipliant les extrêmes & les moyens) cette équation

\* Art. 336.  $xx - ax = yy - by$ , ou  $yy - by - xx + ax = 0$ , dont le lieu est \* une Hyperbole équilaterale qui se construit ainsi.

Soient prises sur les lignes  $AF$ ,  $AE$ , les parties  $AB$ ,  $AD$ , troisièmes proportionnelles à  $AF$ ,  $AM$ , & à  $AE$ ,  $AM$ : soit tirée par le point  $C$  milieu de  $BD$  une ligne droite indéfinie  $CH$  parallele à  $AB$ , sur laquelle soit prise la partie  $CK = \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa}$  (la ligne  $AD(b)$  sera plus grande que  $BA(a)$ , puisqu'on a supposé que  $AE$  est moindre que  $AF$ ): soit décrite une Hyperbole équilaterale qui ait pour centre le point  $C$ , & pour la moitié d'un second diametre la droite  $CK$ , dont les ordonnées  $HM$  soient paralleles à  $AD$ . Je dis qu'elle rencontrera la circonference du cercle donné, au point cherché  $M$ .

Car menant  $CL$  parallele à  $AD$ , il est clair que les

lignes  $CH$ ,  $CL$ , diviseront par le milieu les droites  $AD$ ,  $AB$ , aux points  $O$ ,  $L$ ; puisque le point  $C$  coupe en deux parties égales la ligne  $BD$ , & qu'ainsi  $CH$  ou  $AP - AL = x - \frac{1}{2}a$ ,  $HM$  ou  $PM - AO = y - \frac{1}{2}b$ . Or par la propriété de l'Hyperbole équilatère,  $HM = CH - CK$ , c'est à dire en termes analytiques  $yy - by - \frac{1}{4}bb = xx - ax - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$ ; d'où l'on tire l'équation  $yy - by = xx - ax$ , qui étant reduite en proportion, donne  $BP(x - a). PM(y) :: DQ(y - b). QM(x)$ . Donc puisque les angles  $BPM$ ,  $DQM$ , sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont proportionnels, les triangles  $BPM$ ,  $DQM$ , seront semblables, & par conséquent l'angle  $MBP$  sera égal à l'angle  $MDQ$ , & leurs complemens à deux droits  $ABM$ ,  $ADM$ , seront égaux. Mais puisque  $AB.AM :: AM.AF$ , &  $AD.AM :: AM.AE$ , les triangles  $ABM$ ,  $AMF$ , &  $ADM$ ,  $AME$ , seront semblables. L'angle  $ABM$  sera donc égal à l'angle  $AMF$ , & l'angle  $ADM$  à l'angle  $AME$ ; & par conséquent les angles  $AMF$ ,  $AME$ , seront égaux entr'eux, puisqu'on vient de prouver que les angles  $ABM$ ,  $ADM$ , le sont.

On prouvera de même que l'Hyperbole opposée à celle-ci coupera la circonférence au dedans de l'angle opposé au sommet à l'angle  $EAF$ , en un point  $M$  tel qu'ayant mené les droites  $AM$ ,  $MF$ ,  $ME$ ; les angles  $AME$ ,  $AMF$ , seront égaux entr'eux: comme aussi que ces deux Hyperboles équilatères opposées couperont la circonférence au dedans des angles qui sont à côté de ces deux-ci, chacune en un point  $M$  tel qu'ayant mené les droites  $MA$ ,  $ME$ ,  $MF$ ; l'angle  $AME$  sera égal au complément à deux droits de l'angle  $AMF$ .

Si l'on prend sur  $CL$  la partie  $CG$  égal à  $CK$ , il est clair\* que  $CG$  sera la moitié du premier diamètre conjugué à  $CK$ , & qu'ainsi\* l'une des Asymptotes de ces deux Hyperboles sera parallèle à  $KG$ . Or dans le triangle isocelle  $GCK$ , l'angle externe  $GCO$  ou son égal  $BAD$  vaut les deux internes opposés, c'est à dire le dou-

\* Def. 16.  
III.

\* Art. 114.

ble de l'angle  $CGK$ . Donc puisque les lignes  $CG$ ,  $AD$ , sont parallèles, il s'ensuit que la ligne  $KG$  & par conséquent l'une des Asymptotes sera parallèle à la ligne qui divise par le milieu l'angle  $DAB$ . De plus il est évident que la ligne  $AD$  est une double ordonnée au second diamètre  $CK$ , puisque  $\overline{OD}^2$  ou  $\overline{OA}^2$  ( $\frac{1}{4}bb$ )  $= \overline{CO}^2$  ( $\frac{1}{4}aa$ )  $\rightarrow \overline{CK}^2$  ( $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$ ); & qu'ainsi l'une des Hyperboles équilatères opposées passe par le point  $D$ , & l'autre par le point  $A$ . Ces deux remarques donnent lieu à une nouvelle construction qui est plus simple que la précédente: la voici.

**FIG. 256.** Ayant pris sur les lignes  $AF$ ,  $AE$ , les parties  $AB$ ,  $AD$ , troisièmes proportionnelles à  $AF$ ,  $AM$ , & à  $AE$ ,  $AM$ ; on menera par le point de milieu  $C$  de la ligne  $BD$  deux droites indéfinies  $CH$ ,  $CK$ , l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à la ligne  $AP$ , qui divise par le milieu l'angle donné  $EAF$ . On décrira ensuite entre ces deux lignes comme Asymptotes, par les points  $D$ ,  $A$ , deux Hyperboles opposées, qui couperont la circonférence du cercle donné en des points  $M$  tels qu'ayant mené les droites  $MA$ ,  $ME$ ,  $MF$ ; les deux angles  $AME$ ,  $AMF$ , seront égaux entr'eux lorsque le point d'intersection  $M$  tombe dans l'angle  $EAF$  ou dans son opposé au sommet; & l'angle  $AME$  sera égal au complément à deux droits de l'angle  $AMF$  lorsqu'il tombe dans l'un ou dans l'autre des angles à côté.

On n'est arrivé à cette dernière construction qu'en supposant la première qui est fondée sur le calcul, & en faisant ensuite des remarques qui sont assez recherchées. Il est cependant facile de la démontrer tout d'un coup, si l'on fait attention à une propriété de l'Hyperbole équilatère qui se trouve dans l'article 361. (Liv. VIII.) & qui d'ailleurs se peut aisément prouver. Car si l'on mène du point  $M$  où l'Hyperbole équilatère  $DM$  rencontre la circonférence du cercle donné, aux deux extrémités  $B$ ,  $D$ , du premier diamètre  $BD$ , les droites  $BM$ ,  $DM$ ,







$B'M$ ,  $DM$ , qui rencontrent l'Asymptote  $CH$  aux points  $O$ ,  $L$ , & la ligne  $AP$  qui lui est parallèle aux points  $S$ ,  $R$ ; il est clair selon cet article, que  $MO$  est égal à  $ML$ , & qu'ainsi l'angle  $MOZ$  ou  $MSR$  ou  $BSA$  est égal à l'angle  $MLO$  ou  $DRA$ . Mais par la construction l'angle  $BAS$  est égal à l'angle  $DAR$ , puis- que la ligne  $AP$  divise par le milieu l'angle  $EAF$ . Partant les angles restans  $ABM$ ,  $ADM$ , dans les deux triangles  $ABS$ ,  $ADR$ , seront égaux entr'eux; d'où il suit que les angles  $AMF$ ,  $AME$ , le sont aussi. Et c'est ce qui étoit proposé.

On peut trouver facilement par le moyen de cette dernière construction, une égalité très-simple qui ne renferme qu'une seule inconnue, & dont la construction qui se pourra faire par telle Section conique qu'on voudra suivant les regles prescrites dans le Livre précédent, fournira la résolution du Problème. Soit menée à cet effet du point  $M$  la ligne  $MP$  parallèle à l'Asymptote  $CK$ , & qui rencontre l'autre Asymptote  $CH$  au point  $H$ ; & soient nommées les données  $AM$ ,  $a$ ;  $AK$ ,  $b$ ;  $CK$ ,  $c$ ; & les inconnues  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ . Cela posé, on aura par la propriété du cercle l'équation  $xx + yy = aa$ , & par la propriété des Hyperboles opposées\* l'autre équation  $CH \times HM (xy - cx - by + bc) = CK \times KA (bc)$ ; ce qui donne  $xy - cx - by = 0$ , d'où l'on tire  $y = \frac{cx}{x-b}$ . Mettant le quarré de cette valeur à la place de  $yy$  dans la première équation  $xx + yy = aa$ , & opérant à l'ordinaire on formera cette égalité du quatrième degré  $x^4 - 2bx^3 + b^2xx + 2aabbx - aabb = b^2$ .

$$\begin{array}{r} - + cc \\ - aa \end{array}$$

Or si l'on mene du centre  $C$  des Hyperboles perpendiculairement à  $AC$  la ligne  $CG$  qui rencontre la circonférence au point  $G$ ; les triangles rectangles  $ACG$ ,  $AKC$ , donneront  $\overline{CG} = \overline{AG} - \overline{AC} = \overline{AM} (aa) - \overline{AK} (bb) - \overline{CK} (cc)$ . C'est pourquoi nommant la donnée  $CG$ ,  $m$ ;

on changera l'égalité précédente en celle-ci  $x^4 - 2bx^3 + mmxx - 2aabx - aabb = 0$ , dans laquelle les données sont le rayon  $AM(a)$ , les lignes  $AK(b)$ ,  $CK(c)$ ,  $CG(m)$ , & l'inconnue  $x$  exprime des valeurs de  $AP$  telles que menant les perpendiculaires  $PM$ , elles rencontreront la circonférence aux points cherchés.

Pour distinguer entre les deux points où chaque perpendiculaire  $PM$  coupe la circonférence du cercle, celui qui sert à la question présente; il faut observer de mener  $PM$  du côté où l'on a supposé que tomboit le point  $M$  par rapport à la ligne  $AP$  en faisant le calcul, lorsque sa valeur  $\frac{cx}{x-b}$  qu'on a trouvée ci-dessus est positive, c'est à dire, lorsque  $x$  est en même temps vraie & plus grande que  $b$ , ou bien lorsqu'elle est fautive; & au contraire il la faut mener du côté opposé, lorsque sa valeur est négative, c'est à dire, lorsque  $x$  est en même temps vraie & moindre que  $b$ .

## SECONDE MANIÈRE.

**FIG. 257.** Ayant mené par le point cherché  $M$  que l'on regarde comme donné la droite  $MD$  perpendiculaire au rayon  $AM$ , & par le point  $D$  où elle rencontre  $AF$  la droite  $GH$  parallèle à  $AM$ , laquelle rencontre en  $H$  la ligne  $MF$ , & en  $G$  la ligne  $EM$  prolongée qui coupe en  $C$  la droite  $AF$ ; on aura à cause des triangles semblables  $FAM$ ,  $FDH$ , cette proportion:  $AM. DH :: AF. FD$ . Et à cause des triangles semblables  $CAM$ ,  $CDG$ , cette autre,  $AM. DG :: AC. CD$ . Or la ligne  $DG$  est égale à  $DH$ , puisque par la condition du Problème les angles  $AME$ ,  $AMF$ , devant être égaux, les angles  $DMH$ ,  $DMG$ , le feront aussi. Donc  $AF. FD :: AC. CD$ , &  $AF + FD. AF :: AC + CD$  ou  $AD. AC$ . Cela posé, soient menées  $EB$ ,  $MP$ , perpendiculaires sur  $AF$ , &  $MQ$  perpendiculaire sur  $EB$ : & soient nommées les données  $AM$ ,  $a$ ;  $AB$ ,  $b$ ;  $BE$ ,  $c$ ;

$AF, d$ ; & les inconnues  $AP, x$ ;  $PM, y$ . Les triangles rectangles semblables  $APM, AMD$ , donneront  $AP(x). AM(a)::AM(a). AD=\frac{aa}{x}$ . Et partant  $PD=d-\frac{aa}{x}$ ; & les triangles semblables  $EQM, MPC$ , donneront  $EQ$  ou  $EB-MP(c-y). QM$  ou  $AP-AB(x-b)::MP(y). PC=\frac{xy-by}{c-y}$ . Donc  $AC$  ou  $AP+PC=\frac{cx-by}{c-y}$ , & mettant dans la proportion précédente  $AF+FD. AF::AD. AC$  à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, on formera (en multipliant les moyens & les extrêmes) cette équation  $2cdxx-aa cx-2bdxy+aa by+aa dy=aa dc$ , qui se réduit en divisant par  $2cd$ , & en faisant (pour abréger)  $b+d=f$ , à cette autre  $xx-\frac{b}{c}yx-\frac{aa}{2d}x+\frac{aaf}{2cd}y-\frac{1}{2}aa=0$ , dont le lieu qui est une Hyperbole entre ses Asymptotes étant construit selon l'article 339. (Liv. VII.) coupera la circonférence du cercle au point cherché  $M$ .

Si l'on veut avoir une égalité qui ne renferme que l'inconnue  $x$ , on se servira de l'équation au cercle  $xx+yy=aa$ , dans laquelle mettant à la place de  $yy$  le carré de  $y$  trouvée par le moyen de l'équation précédente, on arrivera à une égalité du quatrième degré qui ne renfermera que l'inconnue  $x$ , & dont l'une des racines exprimera la valeur de la cherchée  $AP$ .

## EXEMPLE VIII.

439. **U**N cercle qui a pour centre le point  $A$  étant donné avec deux autres points  $E, F$ ; trouver sur la circonférence le point  $M$  tel qu'ayant mené les droites  $AM, MF, ME$ ; le sinus droit de l'angle  $AMF$  soit au sinus droit de l'angle  $AME$ , en la raison donnée de  $m$  à  $n$ . Fig. 258.

Je résous cette question en trois différentes manières.

. D d d ij

## PREMIÈRE MANIÈRE.

Ayant pris sur les droites données  $AF$ ,  $AE$ , les parties  $AB$ ,  $AD$ , troisièmes proportionnelles à  $AF$ ,  $AM$ , & à  $AE$ ,  $AM$ ; on menera du point cherché  $M$  que l'on regarde comme donné les droites  $MB$ ,  $MD$ , les perpendiculaires  $MG$ ,  $MH$ , sur  $AF$ ,  $AE$ , & les parallèles  $MP$ ,  $MQ$ , à  $AE$ ,  $AF$ . Ayant pris sur  $BM$  la partie  $BK$  égale à  $DM$ , on tirera du point  $K$  les droites  $KO$ ,  $KL$ , parallèles à  $MG$ ,  $MP$ , & du point donné  $D$  la perpendiculaire  $DC$  sur  $AF$ . Cela fait, les triangles semblables  $BMG$ ,  $BKO$ , donnent  $BM.BK$  ou  $DM::MG.KO$ . Or par la condition du Problème  $m.n::KO.MH$ ; puisque prenant  $DM$  pour rayon ou sinus total, les droites  $KO$ ,  $MH$ , seront les sinus droits des angles  $MBF$ ,  $MDE$ , ou de leurs compléments à deux droites  $MB A$ ,  $MD A$ , égaux par la construction aux angles  $AMF$ ,  $AME$ . Donc en multipliant par ordre les antécédens & les conséquens de ces deux proportions, on aura  $m \times BM.n \times MD::MG \times KO.KO \times MH::MG.MH::MP.MQ$ . à cause des triangles semblables  $MPG$ ,  $MQH$ . Cela posé.

On nommera les données  $AD$ ,  $a$ ;  $AC$ ,  $b$ ;  $CD$ ,  $c$ ;  $AB$ ,  $d$ ;  $AM$ ,  $x$ ; & les inconnues  $AP$  ou  $MQ$ ,  $x$ ;  $PM$  ou  $AQ$ ,  $y$ ; & les triangles semblables  $ADC$ ,  $PMG$ ,  $QMH$  donneront  $PG = \frac{by}{a}$ ,  $MG = \frac{c}{a}$ ,  $QH = \frac{bx}{a}$ ,  $HM = \frac{cx}{a}$ ,  $AG = x + \frac{by}{a}$ ,  $GB$  ou  $AB - AG = d - x - \frac{by}{a}$ ,  $DH$  ou  $AQ + QH - AD = y + \frac{bx}{a} - a$ : & à cause des triangles rectangles  $BGM$ ,  $DHM$ , on aura  $\overline{BM}^2$  ou  $\overline{BG}^2 + \overline{GM}^2 = xx + \frac{1b}{a}xy + \frac{bb}{aa}y^2 - 2dx - \frac{1bd}{a}y + dd + \frac{cc}{aa} = xx + \frac{1b}{a}xy + yy - 2dx - \frac{1bd}{a}y + dd$  en mettant pour

$bb+cc$  fa valeur  $aa$  à cause du triangle rectangle  $ACD$ ; & de même  $\overline{DM}^2 = yy + \frac{1b}{a}xy + xx - 2ay - 2bx + aa$ . Or par la propriété du cercle, le quarré  $\overline{AM}^2 (rr) = \overline{AG}^2 (xx + \frac{1b}{a}xy + \frac{bby}{aa} + \overline{GM}^2 (\frac{cyy}{aa})) = xx + \frac{1b}{a}xy + yy$  en mettant pour  $bb+cc$  sa valeur  $aa$ . Si donc l'on substitue dans les valeurs de  $\overline{BM}^2$  & de  $\overline{DM}^2$  à la place de  $yy + \frac{1b}{a}xy + xx$  cette valeur  $rr$ , & que pour abreger on fasse  $rr+dd=ff$  &  $rr+aa=gg$ , on trouvera  $BM = \sqrt{ff - 2dx - \frac{1bd}{a}y}$ , &  $DM = \sqrt{gg - 2ay - 1bx}$ . Substituant enfin ces valeurs à la place de  $BM$  & de  $DM$  dans la proportion  $m \times BM. n \times DM :: MP (y). MQ (x)$  que l'on a trouvée ci-dessus, & multipliant les extrêmes & les moyens, on formera cette équation  $m \times \sqrt{ff - 2dx - \frac{1bd}{a}y} = ny \sqrt{gg - 2ay - 1bx}$  de laquelle quarrant chaque membre, & faisant évanouir l'inconnuë  $y$  par le moyen de l'équation au cercle  $xx + \frac{1b}{a}xy + yy = rr$ , on arrivera à une égalité du sixième degré qui ne renfermera plus que l'inconnuë  $x$ , & qui étant résoluë selon les regles du Livre précédent, donnera pour  $AP (y)$  une valeur telle que menant  $PM$  parallele à  $AE$ , le point  $M$  où cette ligne rencontrera la circonference, sera celui qu'on cherche.

Si l'on suppose que  $m=n$ , il est évident que les angles  $MBF, MDE$ , seront égaux; & qu'ainsi les angles  $ABM, ADM$ , ou  $AMF, AME$ , le seront aussi. D'où l'on voit que le Problème précédent n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

## SECONDE MANIERE.

Ayant joint les deux points donnés  $E, F$ , par une

Fig. 259.

D d d ij

ligne droite, on tirera du centre donné  $A$  les droites  $AD$ ,  $AP$ , l'une perpendiculaire & l'autre parallèle à cette ligne, & par le point cherché  $M$  que l'on regarde comme donné la parallèle  $PQ$  à  $AD$ , on menéra aussi du même point  $M$ , le rayon  $AM$  qui rencontre  $EF$  en  $O$ , & les droites  $EM$ ,  $FM$ , sur lesquelles on abaissera des points  $O$ ,  $F$ ,  $E$ , les perpendiculaires  $OG$ ,  $OH$ , &  $FC$ ,  $EB$ . Cela fait, les triangles semblables  $EOG$ ,  $EFC$ , &  $FEB$ ,  $FOH$ , donneront  $EO. EF :: OG. FC$ . Et  $EF. FO :: EB. OH$ , & partant  $EO \times EF. EF \times FO$  ou  $EO. FO :: OG \times BE. CF \times OH$ , c'est à dire en raison composée de  $OG$  à  $OH$ , ou de  $m$  à  $n$  (puisque en prenant  $MO$  pour le rayon ou sinus total, les droites  $OG$ ,  $OH$ , sont les sinus droits des angles  $EMO$ ,  $FMO$ , compléments à deux droits des angles  $AME$ ,  $AMF$ ), & de  $BE$  à  $CF$  ou de  $EM$  à  $MF$  à cause des triangles rectangles semblables  $BME$ ,  $CMF$ . On aura donc  $EO. FO :: m \times EM. n \times MF$ . Cela posé.

On nommera les données  $AD$  ou  $PQ$ ,  $a$ ;  $ED$ ,  $b$ ;  $DF$ ,  $c$ ;  $AM$ ,  $r$ ; & les inconnues  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; & on aura à cause des triangles semblables  $APM$ ,  $ADO$ , cette proportion,  $MP(y). AP(x) :: AD(a). DO = \frac{ax}{y}$ . Et partant  $EO = \frac{by+ax}{y}$ ,  $FO = \frac{cy+ax}{y}$ . Or les triangles rectangles  $EMQ$ ,  $FMQ$ , donnent  $\overline{EM}^2 = \overline{EQ}^2 (bb - 2bx + xx) + \overline{MQ}^2 (aa - 2ay + yy) = ff + 2bx - 2ay$  (en mettant pour  $xx + yy$  la valeur  $rr$  à cause du triangle rectangle  $APM$ , & faisant pour abréger  $aa + bb + rr = ff$ ) & de même  $\overline{FM}^2 = \overline{FQ}^2 (cc - 2cx + xx) + \overline{MQ}^2 (aa - 2ay + yy) = gg - 2cx - 2ay$  en mettant pour  $xx + yy$  la valeur  $rr$ , & faisant pour abréger  $aa + cc + rr = gg$ . Si dans la proportion précédente  $EO. FO :: m \times EM. n \times MF$ , on met à la place de ces lignes les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, & qu'on multiplie les extrêmes & les moyens,







on formera cette équation  $bny + anx \sqrt{gg - 2cx - 2ay} = mc y - max \sqrt{ff} + 2bx - 2ay$ , de laquelle quarrant chaque membre & faisant évanouir l'inconnue  $y$  par le moyen de l'équation au cercle  $xx + yy = rr$ , on arrivera encore à une égalité du sixième degré, dont la résolution fournira pour  $AP(x)$  une valeur telle que menant la perpendiculaire  $PM$ , elle ira couper la circonférence au point cherché  $M$ .

C'est à peu près de cette façon que M. Descartes résout cette question dans la soixante-cinquième de ses Lettres Tom. 3. Elle lui avoit été proposée par M. de Roberval, d'une manière qui paroît différente de celle-ci, mais qui dans le fond revient à la même chose.

### TROISIÈME MANIÈRE.

Soient décrits des diamètres  $AE$ ,  $AF$ , deux cercles FIG. 160.  
 $ART$ ,  $AST$ , sur lesquels soient portées depuis le point  $A$  deux cordes quelconques  $AR$ ,  $AS$ , qui soient toujours entr'elles en la raison donnée de  $m$  à  $n$ ; & soient tirées les droites  $ER$ ,  $FS$ , qui s'entrecoupent au point  $M$ . Je dis que la ligne courbe  $AM$ , qui est le lieu de tous les points  $M$  ainsi trouvés, coupera le cercle donné (dont le centre est en  $A$ ) au point cherché  $M$ .

Car tirant  $AM$  & le prenant pour rayon ou sinus total, il est clair que la corde  $AR$  est le sinus droit de l'angle  $AME$ , & la corde  $AS$  le sinus droit de l'angle  $AMF$ .

Il est à propos de remarquer 1°. Que cette construction a cela de particulier, qu'elle ne réussit pas seulement lorsqu'il s'agit de trouver le point  $M$  sur la circonférence d'un cercle dont le centre est en  $A$ , mais encore sur telle ligne courbe qu'on voudra. 2°. Qu'ayant trouvé deux points de ce lieu de la manière que l'on vient d'enseigner, les plus proches que l'on pourra de la ligne courbe donnée, il suffit d'en tracer la portion qui joint ces deux points; ce qui rend la pratique de

cette construction fort aisée. 3°. Que le lieu de tous les points  $M$  ainsi trouvés est du quatrième degré, comme il est facile de voir par le calcul de la seconde manière, en observant de ne point substituer dans les valeurs de  $EM$  &  $FM$  à la place de  $xx + yy$  le quarré  $rr$  que l'on trouve par le lieu au cercle ce qui donnera pour l'é-

quation de ce lieu  $nby + max\sqrt{c-x^2+a-y^2} = mcy - max\sqrt{b+x^2+a-y^2}$ , dont les inconnues  $x$  &  $y$  montent au quatrième degré, lorsqu'elle est délivrée d'incommensurables. 4°. Que ce n'est pas une faute legere en Geometrie, selon M. Descartes, d'employer une ligne courbe trop composée pour résoudre un Problème; de sorte que selon lui, on doit préférer à cette dernière solution les deux précédentes, où les deux lieux qu'on a trouvés, & qui détermineroient par leur intersection avec la circonference donnée, le point cherché, ne sont que du troisième degré. Il me paroît néanmoins que la facilité d'une construction & la simplicité peuvent récompenser en quelque sorte ce defaut, & c'est ce qu'on verra encore dans l'exemple qui suit.

## E X E M P L E IX.

FIG. 261. 440. DIVISER un triangle scalene donné  $ABC$  en quatre parties égales, par deux lignes droites  $DE$ ,  $FG$ , qui s'entrecoupent à angles droits au point  $H$ .

Si l'on fait attention sur la nature de ce Problème, on verra 1°. Que deux des extrémités  $D$ ,  $F$ , des deux droites  $DE$ ,  $FG$ , se trouvent nécessairement sur l'un des côtés  $AC$  du triangle donné  $ABC$ , & que leurs deux autres extrémités  $E$ ,  $G$ , se trouvent chacune sur chacun des deux autres côtés  $BC$ ,  $BA$ . 2°. Que les deux points cherchés  $D$ ,  $F$ , doivent avoir deux conditions, dont la première est que les lignes  $DE$ ,  $FG$ , qui divisent chacune le triangle  $ABC$  en deux parties égales, s'entrecoupent à angles droits en un point  $H$ .

$H$ ; & la seconde qu'elles forment avec les deux autres côtés du triangle donné, un quadrilatère  $BGHE$  qui soit la quatrième partie du triangle  $ABC$ . Cela posé.

Soient menées sur le côté  $AC$  les perpendiculaires  $GI$ ,  $BK$ ,  $EL$ , & soient nommées les données  $AC$ ,  $2a$ ;  $BK$ ,  $b$ ;  $AK$ ,  $c$ ;  $KC$ ,  $d$ ; & les inconnues  $AF$ ,  $x$ ;  $CD$ ,  $y$ . Puisque le triangle  $AGF$ , ou  $GI \times \frac{1}{2} AF$  doit être la moitié du triangle  $ABC$  ( $ab$ ), il s'ensuit que  $GI = \frac{ab}{x}$ ; & par la même raison  $EL = \frac{ab}{y}$ . Or les triangles semblables  $CBK$ ,  $CEL$ , &  $ABK$ ,  $AGI$ , donnent  $BK(b) : EL(\frac{ab}{y}) :: CK(d) : CL - \frac{ad}{y}$ . Et  $BK(b) : GI(\frac{ab}{x}) :: AK(c) : AI = \frac{ac}{x}$ . Et partant  $DL$  ou  $CD - CL = y - \frac{ad}{y}$ ,  $FI$  ou  $AF - AI = x - \frac{ac}{x}$ . Mais les triangles rectangles  $DEL$ ,  $FGI$ , sont semblables entr'eux; puisque chacun d'eux est semblable au même triangle  $FDH$ , qui est rectangle en  $H$  selon la condition du Problème qui demande que les deux lignes  $DE$ ,  $FG$ , s'entrecoupent à angles droits. On aura donc  $EL(\frac{ab}{y}) : LD(\frac{y-ad}{y}) :: FI(\frac{x-ac}{x}) : IG(\frac{ab}{x})$ ; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, cette équation  $xxyy - acyy - adxx + aacd = aabb$ , ou  $xx - acxy - ad = aabb$ , qui renferme la première condition du Problème; de sorte qu'il ne reste plus qu'à accomplir la seconde; savoir que le trapèze  $BGHE$  soit le quart du triangle donné  $ABC$ .

Pour en venir à bout. Du point d'intersection  $H$  des deux droites  $DE$ ,  $FG$ , soient menées aux trois angles du triangle  $ABC$ , les lignes  $HA$ ,  $HC$ ,  $HB$ ; & on aura 1°.  $FD(x+y-2a) : AF(x) :: FHD(\frac{1}{2}ab) : FHA = \frac{abx}{4x+4y-2a}$ . Et partant le triangle  $AHG$  ou le triangle  $FGA$  moins le triangle  $FHA = \frac{1}{2}ab - \frac{abx}{4x+4y-2a}$ .  
Ecc

2°.  $AI\left(\frac{ac}{x}\right).IK\left(\frac{cx-ac}{x}\right)::AG.GB::AHG\left(\frac{abx+aby-4aab}{4x+4y-8a}\right).$   
 $GHB = \frac{bxx-1abx+1bxy-1aby+4aab}{4x+4y-8a}$ . On trouvera par un  
 raisonnement semblable que le triangle  $HEB =$   
 $= \frac{byy-1aby+1bxy-1abx+4aab}{4x+4y-8a}$ . Maintenant si l'on ajoute  
 ensemble les triangles  $HGB, HEB$ , on formera le  
 quadrilatère  $HGBE$  qui doit être égal à la quantité  $\frac{1}{4}ab$   
 quatrième partie du triangle  $ABC$ : ce qui donne pour  
 la seconde équation  $xx+yy+4xy-8ax-8ay$   
 $+10aa=0$ .

Si l'on fait évanouir par le moyen de ces deux équations l'inconnue  $y$ , on arrivera à une égalité du huitième degré qui renfermera toutes les conditions du Problème, & dans laquelle il n'y aura plus qu'une seule inconnue  $x$ ; de sorte que toute la difficulté est réduite à trouver les racines de cette égalité. Et c'est ce qu'on peut faire par le moyen de deux lieux du troisième degré, comme l'on a enseigné dans les articles 417, & 418 (Liv. précéd.) Mais comme la construction de ces lieux devient fort embarrassée & d'une longueur insupportable dans la pratique, à cause de la multitude des termes de leurs équations, il est beaucoup plus naturel de construire séparément les lieux des deux équations que l'on vient de former, quoique l'un d'eux soit du quatrième degré & par conséquent plus composé, car l'autre n'étant que du second récompense ce deffaut, & d'ailleurs la facilité de la construction doit déterminer en sa faveur : voici comment elle se fait.

FIG. 162.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies  $AB, AC$ , qui font entr'elles un angle droit  $BAC$ ; on prolongera  $BA$  en  $E$ , en sorte que  $AE=Vac$ , &  $CA$  en  $F$ , en sorte que  $AF=Vad$ . Ayant pris sur  $AC$  une partie quelconque  $AP$ , on décrira du centre  $E$  de l'intervalle  $AP$  un arc de cercle qui coupe  $AC$  en  $G$ ; & ayant pris  $AH$ , en sorte que le rectangle  $HA \times AG$  soit égal au triangle donné  $BAC$ , on prendra sur  $AB$  la partie

$AQ = FH$ . On mènera ensuite les droites  $PM$ ,  $QM$ , parallèles à  $AB$ ,  $AC$ , lesquelles s'entrecoupent en un point  $M$ ; & ayant trouvé en la même sorte une infinité d'autres points tels que  $M$ , on fera passer par tous ces points une ligne courbe  $KML$ . Cela fait, on prendra sur la diagonale  $AD$  du carré  $ABDC$ , qui a pour côté la ligne  $AC$  égal au côté  $AC$  du triangle donné  $ABC$ , les parties  $AT = \frac{1}{2} AD$ , &  $DS = \frac{1}{2} AD$ ; & on décrira du premier axe  $TS$  qui soit à son paramètre comme 1 est à 3, une Hyperbole  $OSR$ . Je dis à présent que si l'on mène du point  $M$  où je suppose qu'elle rencontre la ligne courbe  $KML$  au dedans du carré  $ABDC$ , la perpendiculaire  $MP$  sur  $AC$ , & qu'on prenne sur le côté  $AC$  du triangle  $ABC$ , les parties  $AF = AP$ , &  $CD = PM$ ; les points  $F$ ,  $D$ , seront tels qu'ayant mené (ce qui est facile) les deux droites  $FG$ ,  $DE$ , qui divisent chacune le triangle  $ABC$  en deux parties égales; elles s'entrecouperont à angles droits, & le partageront en quatre parties égales.

Car nommant  $AP$ ,  $x$ ;  $PM$ ,  $y$ ; on aura à cause des triangles  $EAG$ ,  $FAH$ , rectangles en  $A$ , le carré  $\overline{AG}^2 = \overline{EG}^2 (xx) - \overline{AE}^2 (ac)$ , & le carré  $\overline{AH}^2 = \overline{FH}^2 (yy) - \overline{AF}^2 (ad)$ . Or puisque par la construction le rectangle  $HA \times AG$  est égal au triangle donné  $BAC(ab)$ , il s'ensuit que  $\overline{HA} \times \overline{AG} (yy - ad \times xx - ac) = aabb$ . La ligne courbe  $KML$  sera donc le lieu de cette équation qui est la première des deux que l'on vient de trouver; & par conséquent sa propriété sera telle que si l'on mène d'un de ses points quelconques  $M$  pris au dedans du carré  $ABDC$ , une perpendiculaire  $MP$  sur  $AC$ , & qu'on prenne sur le côté  $AC$  du triangle donné  $ABC$ , les parties  $AF = AP$ , &  $CD = PM$ ; les droites  $FG$ ,  $DE$  qui divisent chacune par le milieu le triangle  $ABC$ , s'entrecouperont à angles droits au point  $H$ .

De plus si d'un point quelconque  $M$  de l'Hyperbole  $OSR$ , on mène la perpendiculaire  $MV$  sur son premier

axe  $TS$ , & qu'on prolonge  $PM$  jusqu'à ce qu'elle rencontre la diagonale  $AD$  au point  $X$ ; les triangles rectangles & isocèles  $APX$ ,  $MVX$ , donneront  $1.\sqrt{2}::AP$  ou  $PX(x)$ .  $AX=x\sqrt{2}$ , &  $\sqrt{2}.1::MX(x-y)$ .  $MV$  ou  $VX=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ ; & partant  $AV$  ou  $AX-XV=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ . Or par la construction  $AD=2a\sqrt{2}$  puisque  $AC=2a$ , & par conséquent  $TS$  ou  $DT-DS=\frac{2}{3}a\sqrt{2}$ . On aura donc  $TV$  ou  $AV-AT=\frac{x+y-2a}{\sqrt{2}}$ , &  $VS$  ou  $TV-TS=\frac{3x+3y-10a}{3\sqrt{2}}$ , & par la propriété de l'Hyperbole  $TV \times VS \left( \frac{3xx+6xy+3yy-16ax-16ay+10aa}{6} \right) \cdot \overline{MV}^2 \left( \frac{xx-2yx+yy}{2} \right)::1.3$ , c'est à dire, comme le premier axe  $TS$  est à son parametre: ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation  $xx+yy+4xyy-8ax-8ay+10aa=0$ . L'Hyperbole  $OSR$  en sera donc le lieu, & jouira par conséquent de cette propriété; sçavoir que si l'on mène d'un de ses points quelconques  $M$  pris au dedans du quarré  $ABDC$ , une perpendiculaire  $MP$  sur  $AC$ , & qu'on prenne sur le côté  $AC$  du triangle donné  $ABC$ , les parties  $AF=AP$ , &  $CD=PM$ ; les droites  $FG$ ,  $DE$ , qui divisent chacune par le milieu le triangle  $ABC$ , le couperont en quatre parties égales.

Maintenant puisque le point  $M$  se trouve en même temps sur la ligne courbe  $KML$ , & sur l'Hyperbole  $OSR$ ; il s'ensuit que les points  $D$ ,  $F$ , pris sur le côté  $AC$  du triangle donné, auront aussi en même temps les deux conditions requises. Et c'est ce qui étoit proposé.

S'il arrivoit que les deux courbes  $OSR$ ,  $KML$ , ne se rencontraient point au dedans du quarré  $ABDC$ , ce seroit une marque infailible qu'on auroit fait une supposition fautive, sçavoir que les deux extrémités  $D$ ,  $F$ , se rencontrent sur le côté  $AC$ . C'est pourquoi il fau-



droit les supposer sur l'un des deux autres côtés, & recommencer le calcul, en faisant des raisonnemens semblables aux précédens, pour avoir une construction par rapport à ce nouveau côté. Mais si l'on fait les trois remarques suivantes, il sera aisé de prévoir lequel des trois côtés on doit prendre pour celui sur lequel tombent les deux extrémités  $D, F$ , afin d'avoir sûrement une solution, & de n'être pas obligé de recommencer.

La première est que  $\overline{CL}^2 = \frac{aabb}{4aa-ac} + ad$ , &  $\overline{BK}^2 = \frac{aabb}{4aa-ad} + ac$ ; ce qui se voit en mettant dans  $yy = \frac{aabb}{4aa-ad} + ad$  à la place de  $AP(x)$  sa valeur  $AC(2a)$ , & dans  $xx = \frac{aabb}{4aa-ac} + ac$  à la place de  $AQ(y)$  sa valeur  $AB(2a)$ . La seconde consiste en ce que  $CR = \sqrt{2aa} = BO$ ; ce qui se trouve en mettant dans l'autre équation  $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$  dont le lieu est l'Hyperbole  $OSR$ , d'abord à la place de  $AP(x)$  sa valeur  $AC(2a)$ , & ensuite à la place de  $AQ(y)$  sa valeur  $AB(2a)$ . La troisième se tire de ce qu'en supposant  $AK(c)$  moindre que  $CK(d)$  comme on le fait ici, il s'ensuit que  $\overline{BK}^2 \left( \frac{aabb}{4aa-ad} + ac \right)$  est moindre que  $\overline{CL}^2 \left( \frac{aabb}{4aa-ac} + ad \right)$ . Or cela posé, si l'on veut que  $\overline{BK}^2 \left( \frac{aabb}{4aa-ad} + ac \right)$  soit moindre que  $\overline{BO}^2 (2aa)$ , on trouvera en mettant pour  $d$  sa valeur  $2a - c$  & opérant à l'ordinaire que  $bb + cc$  doit être moindre que  $4aa$ , c'est à dire, que le côté  $AB$  du triangle donné  $ABC$  doit être moindre que le côté  $AC$ : & si l'on veut que le carré  $\overline{CL}^2 \left( \frac{aabb}{4aa-ac} + ad \right)$  soit plus grand que  $\overline{CK}^2 (2aa)$ , on trouvera en mettant pour  $c$  sa valeur  $2a - d$  & opérant à l'ordinaire que le côté  $BC (\sqrt{bb + dd})$  doit surpasser le côté  $AC(2a)$ . Mais il est visible que  $BK$  étant moindre que  $BO$  &  $CL$  plus grande que  $CK$ , les deux lignes courbes  $KML, OMR$ ,

se coupent nécessairement au dedans du quarré  $ABDC$ . D'où il suit que si le triangle donné  $ABC$  a tous les angles aigus, & qu'on prenne pour le côté  $AC$  sur lequel on suppose que les deux points  $F, D$ , se rencontrent, celui des trois dont la grandeur est moyenne entre les deux autres & pour le côté  $AB$  le plus petit, le Problème aura toujours nécessairement une solution, puisqu'alors (*fig. 261.*) le point  $K$  se trouvera entre les points  $A, C$ , & que  $AK$  est moindre que  $AC$ , comme l'on a supposé en faisant le calcul sur lequel tout ce raisonnement est fondé. On trouvera en la même sorte que si le triangle donné est rectangle ou obtus-angle, & qu'on prenne pour le côté  $AC$  sur lequel doivent tomber les deux extrémités  $D, F$ , le côté moyen, on aura toujours une solution; de sorte que cette remarque est generale pour toutes sortes de triangles.

On voit dans la figure 262. que l'Hyperbole  $OSR$  & la courbe  $KML$  se coupent non seulement dans un point  $M$ , au dedans du quarré  $ABDC$ , comme le demande le Problème; mais encore en un autre point  $M$  au dehors de ce quarré. Or si l'on veut sçavoir quelle peut être l'utilité de cet autre point, on trouvera qu'il donne une des résolutions du Problème suivant, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier.

**FIG. 263.** Trouver sur le côté  $AC$  du triangle donné  $ABC$ , deux points  $F, D$ , tels qu'ayant mené les droites  $FG, DE$ , qui font avec les deux autres côtés  $AB, BC$ , les triangles  $FGA, DEC$ , égaux chacun à la moitié du triangle  $ABC$ : les lignes  $FG, DE$ , s'entrecoupent à angles droits au point  $H$ , & le quadrilatre  $BGHE$  soit égal au quart du triangle  $ABC$ .

**FIG. 263. & 262.** Car lorsque le point d'intersection  $M$  tombe au dedans du quarré  $ABDC$ , il est clair que les lignes  $AP, PM$  seront chacune moindre que le côté  $AC$ , & qu'ainsi les points  $F, D$ , qu'elles déterminent tomberont tous deux entre les points  $A, C$ ; ce qui refoud le Problème énoncé comme l'on a fait au commencement. Mais

lorsque le point  $M$  tombe au dehors du quarré, comme alors l'une des lignes  $AP$ ,  $PM$  est moindre que son côté  $AC$ , & l'autre plus grande; il s'ensuit que l'un des points  $F$ ,  $D$ , tombe sur le côté  $AC$  du triangle donné, & l'autre sur ce même côté prolongé; ce qui donne une autre solution du Problème énoncé comme l'on vient de faire en dernier lieu. FIG. 23. & 24.

## EXEMPLE X.

441. UNE Section conique  $MAN$  étant donnée, avec un point  $S$  hors de son plan pour le sommet du cone dont elle est la Section; on demande la position du cercle  $MAN$  qui en est la base.

Je distingue cette question en deux differens cas, dont le premier est lorsque la Section donnée est une Parabole, & le second lorsque c'est une Ellipse ou une Hyperbole.

*Premier cas.* La question se reduit à trouver sur la Parabole, le point  $A$  tel qu'ayant mené de ce point le diametre  $AP$  avec la ligne  $AS$ ; du point  $S$  la ligne  $SD$  parallele  $AP$ ; & d'un point quelconque  $P$  du diametre  $AP$ , une ordonnée  $PM$  à ce diametre dans le plan de la Parabole, & une perpendiculaire  $aD$  à cette ordonnée dans le plan du triangle  $DSA$ , qui rencontre les côtés  $SA$ ,  $SD$ , aux points  $a$ ,  $D$ : le quarré de  $PM$  soit égal au rectangle  $aP \times PD$ . Car décrivant dans le plan  $aPM$  un cercle qui ait pour diametre  $aD$ , il est clair qu'il passera par le point  $M$ , puisque l'angle  $APM$  est droit, & que  $PM^2 = aP \times PD$ , qui est la propriété essentielle du cercle; c'est pourquoi menant le diametre  $PA$ , & tirant de l'extrémité  $D$ , du diametre  $Da$  du cercle une parallele  $DS$  à  $PA$ , qui rencontre  $aA$  menée de son autre extrémité  $a$  par l'origine  $A$  du diametre  $AP$ , en un point  $S$ , le cone qui a pour sommet ce point, & pour base le cercle  $MAN$ , formera \* par \* *Art. 269.* la rencontre avec le plan  $APM$  la Parabole même

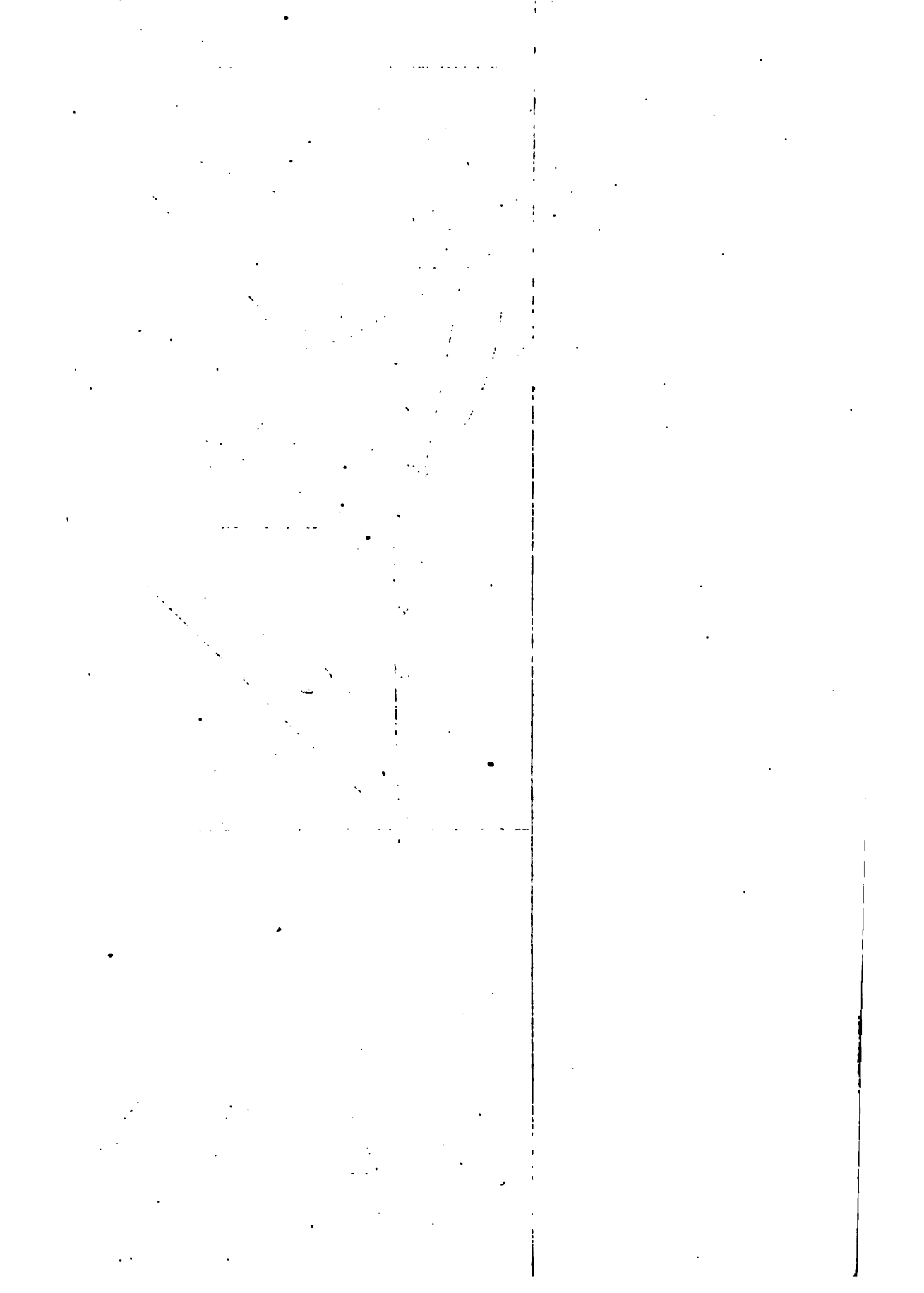
donnée  $MAN$ . Voici comment on peut trouver le point  $A$ .

Soit  $v$  le parametre inconnu du diametre  $AP$ , & l'on aura par la propriété de la Parabole,  $\overline{PM}^2 = AP \times v$ ; mais pour satisfaire au Problème, il faut que  $\overline{PM}^2 = aP \times PD$ . Donc  $aP \times PD = AP \times v$ ; ce qui donne cette proportion  $AP. Pa :: PD. v$ , qui se change en menant  $AO$  parallele à  $Da$  en cette autre  $SO. AO :: PD$  ou  $AO. v$ , & partant  $SO \times v = \overline{AO}^2$ .

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques de ces lignes, je mene du point donné  $S$  sur le plan de la Parabole la perpendiculaire  $SF$ , & du point  $F$  où elle rencontre ce plan, sur l'axe  $BG$  la perpendiculaire  $FG$ , qui rencontre le diametre  $AP$  en  $H$ . Je tire du point  $A$  l'ordonnée  $AK$  à l'axe, & la perpendiculaire  $AQ$  à la tangente  $AL$ , lesquelles rencontrent en  $E$  &  $Q$  la ligne  $FQ$  menée par le point  $F$  parallelement à l'axe. J'éleve enfin du point  $Q$  une perpendiculaire  $QO$  sur le plan de la Parabole, qui rencontrera  $SD$  dans le même point  $O$ , où la ligne  $AO$  parallele à  $aD$  la rencontre. Car la tangente  $AL$  étant parallele à l'ordonnée  $PM$  qui est perpendiculaire sur  $aD$ , l'angle  $LAO$  sera droit aussi-bien que l'angle  $LAQ$ , & ainsi le plan  $QAO$  sera perpendiculaire sur  $AL$ , & sur le plan de la Parabole qui passe par cette ligne; c'est pourquoi la ligne  $QO$  perpendiculaire à ce plan se trouvera dans le plan  $QAO$ , & rencontrera par conséquent la ligne  $SD$  dans le même point  $O$ , où le plan  $QAO$ , c'est à dire, la ligne  $AO$  parallele à  $aD$  la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux  $FS, QO$ , sont dans le plan de la Parabole. Cela posé.

Je nomme les données  $SF$  ou  $QO$ ,  $a$ ;  $FG$ , ou  $KB$ ,  $b$ ;  $GB$ ,  $c$ ; le parametre de l'axe,  $p$ ; & les inconnues  $BK$ ,  $x$ ;  $KA$  ou  $GH$ ,  $y$ ; & j'ai à cause des triangles semblables  $AKT, AEQ$ , cette proportion  $AK(y). KT(\frac{1}{2}p) :: AE(b+y). EQ = \frac{b}{y} + \frac{1}{2}p$ : ce qui donne à cause





cause des triangles  $AEQ$ ,  $AQO$ , rectangles en  $E$  &  $Q$ , le quarré  $AO$  ou  $AE + EQ + QO = \frac{bby}{4y} + \frac{by}{2y} + \frac{1}{2}pp + bb + 2by + yy + aa$ . Or le parametre du diametre  $AP$  ſçavoir  $v = p + 4x = p + \frac{4y}{p}$ , en met. \* *Art. 17.*

tant pour  $x$  la valeur  $\frac{y}{p}$ ; &  $SO$  ou  $FQ$  ou  $GB + BK + EQ = c + x + \frac{b}{2y} + \frac{1}{2}p = c + \frac{y}{p} + \frac{b}{2y} + \frac{1}{2}p$ .

Mettant donc ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles expriment dans l'égalité  $AO = SO \times v$ , on trouvera  $\frac{bby}{4y} + \frac{by}{2y} + \frac{1}{2}pp + bb + 2by + yy + aa = cp + yy + \frac{bby}{2y} + \frac{1}{2}pp + \frac{4yy}{p} + \frac{4y^2}{p} + 2by + 2yy$ , c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quantités qui ſe trouvent les mêmes, ſubſtituant pour  $yy$  la valeur  $px$ , & operant enfuite à l'ordinaire;

$$\begin{aligned} x^2 + cx + \frac{1}{2}cp + \frac{1}{18}bbp &= 0 \\ + \frac{1}{2}p &- \frac{1}{2}aa \\ &- \frac{1}{2}bb \\ &+ \frac{1}{18}pp \end{aligned}$$

dont la vraie racine que l'on peut trouver par le moyen \* \* *Art. 387.* de la Parabole même donnée, exprimera la valeur de l'inconnue  $BK$ , qui ſert à déterminer le point  $A$  tel qu'on le demande.

*Second cas.* Toute la difficulté conſiſte à trouver ſur *Fig. 265.* l'Hyperbole donnée  $MAN$ , le point  $A$  tel qu'ayant mené le diametre  $AB$  avec les lignes  $SAa$ ,  $BSb$ ; & par un de ſes points quelconques  $P$ , du diametre  $AB$  une ordonnée  $PM$  dans le plan de l'Hyperbole, & une perpendiculaire  $ab$  à cette ordonnée dans le plan du triangle  $aSb$ ; on ait le quarré  $PM$  égal au rectangle  $aP \times Pb$ . Cela ſe prouve de même que dans la Parabole, & voici ce qu'il faut faire pour trouver le point  $A$ .

Soit  $v$  le diametre conjugué au diametre  $AB$ , & ſoient menées dans le plan du triangle  $aSb$ , les lignes  $AO$  parallele à  $ab$ , &  $OZ$  parallele à  $AB$  qui rencon-

ger  $dd + ff = mm$ ,  $bb + cc = nn$ ,  $aa + dd + cc = rr$ ,  
 en cette autre  $bbm^4x^4 - mnmnd^4xx + ccmmd^4$   
 $= mmxx - ddr \times \frac{m^4}{dd} x^4 - m^4xx$  qui se réduit enfin en  
 faisant  $xx = dz$  à cette égalité du troisième degré

$$\left. \begin{aligned} & -d \\ & z - \frac{dr}{mm} \\ & - \frac{dbb}{mm} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} & + \frac{ddr}{mm} \\ & z - \frac{cc}{m^4} \end{aligned} \right\} \quad z - \frac{cc}{m^4} = 0$$

dont l'une des racines, sçavoir celle qui est plus grande que  $d$ , est telle que prenant une moyenne proportionnelle entre cette racine &  $d$  moitié du premier axe; cette moyenne proportionnelle exprime la valeur de  $CK$  qui sert à déterminer le point cherché  $A$ . On pourra se servir de l'Hyperbole même donnée pour trouver les racines de cette égalité, par le moyen des articles 396, & 399. du Livre précédent.

Lorsque  $CG(c) = 0$ , c'est à dire, lorsque le point  $F$  tombe sur le second axe; il est visible que cette égalité se change en une autre du second degré; puisque le dernier terme étant nul, elle se divise par  $z$ . Mais lorsque  $FG(b) = 0$ , ce qui arrive lorsque le point  $F$  tombe sur le premier axe; le terme  $\frac{dbbxz}{mm}$  s'efface dans l'égalité précédente, & un qui est  $bb + cc$  devient  $cc$ ; ce qui fait qu'elle se peut diviser par  $z - d$ , & qu'elle se réduit par conséquent à celle-ci  $zz - \frac{dr}{mm}z + \frac{cd^4}{m^4} = 0$ , qui n'est encore que du second degré. Enfin si l'on fait dans cette dernière égalité  $0 = 0$ ; ce qui doit arriver lorsque le point  $F$  tombe sur le centre  $C$ , puisqu'alors les lignes  $b$  &  $c$  deviennent chacune nulles, on aura  $z = \frac{dr}{mm}$ .

& partant  $dz$  ou  $xx = \frac{ddr}{mm}$ , &  $x = \frac{dr}{m} = d\sqrt{\frac{aa + dd}{dd + ff}}$ .

Il est inutile d'avertir que le Problème se résoud par







la même voie dans l'Ellipse, n'y ayant de changement que dans quelques signes. Mais on peut toujours rapporter, si l'on veut, ce second cas au premier, de la manière qui suit.

Ayant mené par un point quelconque  $B$  de l'une des Hyperboles données, une tangente  $BG$ ; & ayant fait passer par cette tangente, & par le sommet donné  $S$ , un plan  $GBS$ : soit mené par tout où l'on voudra, un autre plan  $HKL$  parallèle à celui-ci. Je dis qu'il formera dans la surface conique, décrite par une ligne droite indéfinie attachée en  $S$ , & mûe autour de l'Hyperbole opposée  $MAN$ , une ligne courbe  $HKL$  qui sera une Parabole; de sorte que toute la difficulté est réduite au cas précédent. Car supposant que le cercle  $DHMNZ$  soit la base du cône, qui a pour sommet le point  $S$ , & pour Section l'Hyperbole  $MAN$  avec son opposée, il est clair que le plan  $GBS$  touchant les deux surfaces coniques opposées qui ont pour base ce cercle, dans le côté  $BSD$ , formera dans le plan de la base, une ligne droite  $DE$  qui touchera cette base en un point  $D$ . Or comme cette ligne est la directrice par rapport à la Section  $HKL$ , il s'ensuit selon la définition dixième du Livre VI. que cette Section sera une Parabole.

Ce Problème a été très-célebre du temps de M. Descartes, & l'on en a trouvé une solution parmi ses Manuscrits, qui est imprimée à la fin de la 75<sup>e</sup> Lettre du 3<sup>e</sup> tome. Si l'on veut se donner la peine de comparer sa solution avec la mienne, on verra que non seulement elle est moins naturelle puisqu'elle ne va pas droit au but, mais encore qu'elle est beaucoup plus embarrassée. Aussi ne donne-t'il point l'analyse du cas où la Section est une Ellipse ou une Hyperbole; & il se contente d'affirmer que l'égalité qui renferme les conditions du Problème, ne doit pas passer le quatrième degré.

## LEMME I.

FIG. 266.

267. 268.

442. Si par l'extrémité  $B$  d'un diamètre  $AB$ , l'on mène une corde quelconque  $BD$  qui termine l'arc  $AD$  moindre que la demie circonférence; & qu'ayant pris par tout où l'on voudra deux arcs contigus  $EF$ ,  $FG$ , égaux chacun à l'arc  $AD$ , on tire les cordes  $BE$ ,  $BF$ ,  $BG$ : je dis que la corde du milieu  $BF$  est à la somme ou à la différence de ses deux voisines  $BE$ ,  $BG$ , comme le rayon  $CB$  est à la corde  $BD$ : sçavoir à la somme lorsque l'origine commune  $B$  des cordes  $BD$ ,  $BE$ ,  $BF$ ,  $BG$ , ne tombe sur pas un des deux arcs  $EF$ ,  $FG$ ; & au contraire à la différence, lorsqu'il tombe sur l'un ou l'autre de ces deux arcs.

Car soit du centre  $F$ , & du rayon  $FB$ , décrit un arc de cercle qui coupe la corde  $BG$  prolongée, s'il est nécessaire, au point  $H$ , pour avoir une triangle isocelle  $BFH$ , qui sera semblable au triangle isocelle  $DCB$ ; puisque l'angle  $FBH$  a pour mesure la moitié de l'arc  $FG$  égal à l'arc  $AD$ , dont la moitié est aussi la mesure de l'angle  $CBD$ . On aura donc  $FB. BH :: CB. BD$ , de sorte qu'il ne reste qu'à démontrer que la ligne  $BH$  est la somme des deux cordes  $BE$ ,  $BG$ , dans le premier cas, & leur différence dans le second. Pour le faire.

FIG. 266.

Soient tirées les cordes  $BF$ ,  $FG$ , & on aura deux triangles  $BEF$ ,  $FHG$ , qui seront semblables & égaux. Car dans le premier cas l'angle  $FHB$  ou  $FHG$ , est égal à l'angle  $FBH$  qui vaut l'angle  $FBE$ , puisque les arcs  $FG$ ,  $FE$ , sont égaux; & de plus l'angle  $BEF$  est égal à l'angle  $FGH$ , puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc  $BF$ ; & partant l'angle  $G FH$  est égal à l'angle  $EFB$ . Or les côtés  $FE$ ,  $FG$ , &  $FB$ ,  $FH$ , sont égaux entr'eux. Le côté  $GH$  sera donc égal au côté  $BE$ . Donc &c.

FIG. 267.

268.

On prouvera à peu près de même dans le second cas que les triangles  $FHG$ ,  $FBE$ , sont semblables & égaux; & qu'ainsi la ligne  $BH$  est la différence des deux cordes  $BG$ ,  $BE$ .

## LEMME II.

443. SOIT une Table dont le premier rang parallèle renfermant le nombre 2, & le second la lettre  $x$ ; le troisième  $xx-2$  soit le produit du second par  $x$ , moins le premier, le quatrième  $x^3-3x$  soit le produit du troisième par  $x$ , moins le second, le cinquième  $x^4-4xx+2$  soit le produit du quatrième par  $x$  moins le troisième, & ainsi de suite à l'infini. Soit de plus un arc de cercle quelconque  $AR$  divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points  $D, E, F, G$ , &c. FIG. 269. Je dis que si le premier rang 2 de la Table exprime la valeur 270. du diamètre  $BA$ , & le second rang  $x$  celle de la première corde  $BD$ ; le troisième rang  $xx-2$  exprimera la valeur de la seconde corde  $BE$ , le quatrième rang  $x^3-3x$  celle de la troisième corde  $BF$ , & ainsi de suite jusqu'à la dernière  $BR$ ; en observant que ces cordes deviennent négatives, lorsqu'elles passent de l'autre côté du point  $B$ .

1 <sup>re</sup>	2	Table pour la division des arcs de cercle en parties égales.
2 <sup>e</sup>	$1x$	
3 <sup>e</sup>	$1xx-2$	
4 <sup>e</sup>	$1x^3-3x$	
5 <sup>e</sup>	$1x^4-4xx+2$	
6 <sup>e</sup>	$1x^5-5x^3+5x$	
7 <sup>e</sup>	$1x^6-6x^4+9xx-2$	
8 <sup>e</sup>	$1x^7-7x^5+14x^3-7x$	
9 <sup>e</sup>	$1x^8-8x^6+20x^4-16xx+2$	
10 <sup>e</sup>	$1x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x$	
11 <sup>e</sup>	$1x^{10}-10x^8+35x^6-50x^4+25xx-2$	
12 <sup>e</sup>	$1x^{11}-11x^9+44x^7-77x^5+55x^3-11x$	
13 <sup>e</sup>	$1x^{12}-12x^{10}+54x^8-112x^6+105x^4-36xx+2$	
14 <sup>e</sup>	$1x^{13}-13x^{11}+65x^9-156x^7+182x^5-91x^3+13x$	

Car  $r$ . Lorsque l'arc  $AR$  est moindre que la demie FIG. 269. circonférence  $ADB$ ; si l'on multiplie une corde quelconque  $BF$  par  $x$ ; & qu'on retranche de ce produit la corde  $BE$  qui la précède, on aura la corde  $BG$  qui la suit immédiatement, puisque selon le Lemme précé-

dent  $CB(1)$ .  $BD(x) :: BF, BE \rightarrow BG = xBF$ , & partant  $BG = xBF - BE$ . Donc &c.

FIG. 279.

2°. Lorsque l'arc  $AR$  est plus grand que la demie circonférence  $ADB$ ; il est visible que l'origine commune  $B$  de toutes les cordes se trouvera nécessairement sur l'une des parties égales comme  $GH$ , dans lesquelles l'arc  $AR$  est divisé. Or l'on prouvera comme dans le premier cas que le troisième rang de la Table exprime la valeur de  $BE$ , le quatrième celle de  $BF$ , & ainsi de suite jusqu'à  $BG$ ; mais il reste à démontrer que le rang qui suit celui qui exprime la corde  $BG$ , n'exprimera point la valeur de  $\rightarrow BH$ , mais celle de  $\rightarrow BH$ ; & de même que le rang qui suit ce dernier exprime la valeur de  $\rightarrow BI$ , & ainsi de suite jusqu'à  $\rightarrow BR$ .

Selon la formation de la Table, le rang qui suit celui qui exprime  $BG$  est  $xBG - BF$ . Or par le Lemme  $CB(1)$ .  $BD(x) :: BG, BF \rightarrow BH$ , & partant  $\rightarrow BH = xBG - BF$ ; c'est à dire que  $\rightarrow BH$  vaut le rang parallèle de la Table qui suit immédiatement celui qui exprime la valeur de  $BG$ . Mais selon la formation de la même Table, le rang qui suit celui qui vaut  $\rightarrow BH$  est  $\rightarrow xBH - BG$  valeur de  $BI$ , puisque selon le Lemme  $xBH = BI - BG$ ; & de même le rang qui suit celui qui vaut  $\rightarrow BI$  est selon la formation de cette même Table  $\rightarrow xBI - BH$  valeur de la corde négative  $\rightarrow BL$ , puisque selon le Lemme  $xBI = BL - BH$ . Or il est visible qu'il en est de même de toutes les cordes qui suivent  $BL$  jusqu'à  $BR$ ; & c'est ce qui restoit à démontrer.

#### COROLLAIRE I,

FIG. 269.  
270.

444. DE LA il est évident que si l'arc  $AR$  est divisé en cinq parties égales, le sixième rang de Table  $x^5 - 5x^4 + 5x^3$  exprimera la valeur de la corde  $BR$  qui soutient l'arc  $BR$  différence de l'arc  $AR$  & de la demie circonférence  $ADB$ ; que s'il étoit divisé en sept parties égales, le huitième rang seroit la valeur de  $BR$ ; &c.

& en general qu'il faut augmenter d'une unité le nombre des parties égales, afin d'avoir le rang de la Table qui vaut  $BR$ : en observant que le rayon  $CB=1$ , que la premiere corde  $BD=x$ , & que la dernière corde  $BR$  est negative lorsque l'arc  $AR$  est plus grand que la demie circonference.

## COROLLAIRE II.

445. ON voit par la composition de cette Table ,  
 1°. Que le nombre 2 est le premier terme de chaque rang perpendiculaire. 3°. Que les coefficients de tous les autres termes du premier rang perpendiculaire sont égaux à l'unité. 3°. Que le coefficient d'un terme quelconque de tel rang perpendiculaire qu'on voudra, est toujours égal au coefficient d'un pareil terme dans le rang perpendiculaire à gauche, plus au coefficient du terme qui est au dessus de lui: c'est à dire, par exemple, que le coefficient 14. du quatrième terme  $14x^3$  du troisième rang perpendiculaire, est égal au coefficient 5 du quatrième terme  $5x^3$  du deuxième rang perpendiculaire qui est le rang à gauche, plus au coefficient 9 du terme  $9xx$  qui est au dessus du terme  $14x^3$ .

## REMARQUE.

446. SI l'on continuoît à diviser la circonference FIG. 170.  
 en parties égales aux arcs  $AD$ ,  $DE$ , &c. au de là du point  $R$ ; il est clair que les rangs paralleles de la Table qui suivent celui qui exprime  $-BR$  continueroient à exprimer par ordre toutes les cordes négatives qui suivroient  $BR$ , jusqu'à ce que repassant le point  $B$  elles redeviendroient encore negatives, & ainsi de suite alternativement positives & negatives, autant de fois qu'elles passeroient le point  $B$  jusqu'à l'infini.

## EXEMPLE I.

447. COUPER un arc de cercle donné  $AR$ , en autant de parties égales  $AD, DE, EF, FG$ , &c. qu'on voudra.

FIG. 269.  
270.

Ayant mené le diamètre  $AB$  & la corde  $BR$ , & nommé le rayon donné  $CA$  ou  $CB$ ,  $1$ ; la corde donnée  $BR$ ,  $a$ ; on formera une égalité dont le premier membre sera le rang parallèle de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales, & le second sera  $\mp a$ ; sçavoir  $+a$  lorsque l'arc  $AR$  est moindre que la demie circonférence, &  $-a$  lorsqu'il est plus grand. Or il est visible selon l'article 443. que la résolution de cette égalité doit fournir pour l'une de ses racines  $x$ , une valeur  $BD$  telle qu'ayant décrit du point  $B$  comme centre & de l'intervalle  $BD$  un arc de cercle, il coupera sur l'arc donné  $AR$  la première des parties égales cherchées  $AD$ .

Qu'il faille, par exemple, diviser l'arc donné  $AR$  en trois parties égales; on trouvera  $x^3 - 3x = \mp a$ , dont l'une des racines  $BD$  terminera la première des trois parties égales qu'on demande. S'il falloit diviser l'arc  $AR$  en cinq parties égales, on auroit  $x^5 - 5x^3 + 5x = \mp a$ ; & de même, s'il falloit diviser en sept, il viendrait  $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = \mp a$ : de sorte que toute la difficulté se réduit à trouver les racines de ces égalités. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Livre précédent. Donc &c.

Il est à remarquer que ces égalités sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des parties égales est un nombre premier. Mais lorsqu'il est composé de deux ou plusieurs nombres premiers, on divisera d'abord l'arc donné en autant de parties égales que l'un de ces nombres a d'unités, & ensuite la première de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres premiers, dont le produit for-



me le nombre donné; ce qui donnera enfin la première des parties égales qu'on cherche: si l'on veut, par exemple, diviser l'arc  $AR$  en trente parties égales, il faudra d'abord le diviser en cinq, ensuite la première de ces cinq parties en trois, & enfin la première de ces trois en deux, pour avoir la trentième partie qu'on demande, & cela parce que  $30 = 5 \times 3 \times 2$ .

## REMARQUE I.

448. DEUX points donnés  $A, R$ , sur la circonférence d'un cercle en déterminent non seulement deux arcs, dont l'un  $AR$  est moindre que la demie circonférence, & l'autre  $ABR$  plus grand; mais encore une infinité de portions, dont les unes sont la circonférence entière plus l'arc  $AR$ , deux fois la circonférence plus l'arc  $AR$ , trois fois la circonférence plus l'arc  $AR$  &c. & les autres sont la circonférence entière plus l'arc  $ABR$ , deux fois la circonférence plus l'arc  $ABR$ , trois fois la circonférence plus l'arc  $ABR$  &c; dont la raison est que la circonférence d'un cercle rentrant en elle-même, on peut considérer cette ligne courbe comme faisant une infinité de revolutions autour d'elle-même, Si donc l'on nomme l'arc  $AR$ ,  $d$ ; la circonférence entière  $c$ ; l'arc  $ABR$  sera  $c-d$  & l'on aura ces deux suites,

$$1^{\circ}. d, c+d, 2c+d, 3c+d, 4c+d, 5c+d, 6c+d, 7c+d, 8c+d, \&c.$$

$$2^{\circ}. c-d, 2c-d, 3c-d, 4c-d, 5c-d, 6c-d, 7c-d, 8c-d, \&c.$$

qui expriment par ordre toutes les portions de circonférences terminées par les deux points  $A, R$ . Cela posé.

Si l'arc  $AD$  est une aliquote quelconque de l'arc  $AR$  moindre que la demie circonférence; & qu'ayant inscrit dans le cercle un polygone  $DEFGH$  &c. d'un pareil nombre de côtés à commencer par le point  $D$ , on tire de l'extrémité  $B$  du diamètre  $AB$  aux angles du polygone les cordes  $BD, BF, BG, BH$  &c:

Ggg ij

je dis qu'elles terminent des aliquotes pareilles de tous les termes de ces deux suites, dont l'origine fixe est toujours au point *A*.

**Fig. 271.** Car, soit pour fixer les idées l'arc  $AD = \frac{1}{5}d$ ; il est clair que l'arc  $ADE = \frac{c+d}{5}$ , l'arc  $ADEF = \frac{2c+d}{5}$ , l'arc  $ADEFG = \frac{3c+d}{5}$  l'arc  $ADEFGH = \frac{4c+d}{5}$  qui sont les cinquièmes parties ou les aliquotes pareilles des cinq premiers termes de la première suite. Or si l'on divise tel autre de ses termes qu'on voudra par 5, il est visible que le quotient renferme au juste un certain nombre de fois la circonférence entière plus une des cinq fractions précédentes. Donc puisque la corde qui termine un arc, dont l'origine est en *A*, est la même que celle qui termine cet arc plus la circonférence répétée autant de fois qu'on veut, il s'ensuit que les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH*, terminent les cinquièmes parties de tous les termes de la première suite. On prouvera de la même manière que les arcs *AH*, *AHG*, *AHGF*, *AHGFE*, *AHGFED* sont les cinquièmes parties des cinq premiers termes de la seconde suite, & qu'ainsi les cordes *BH*, *BG*, *BF*, *BE*, *BD*, terminent les cinquièmes parties de tous les termes de la seconde suite. Mais il est visible que cette démonstration se peut appliquer à telle autre aliquote qu'on voudra de l'arc *AR*. Donc &c.

**Fig. 273.**  
274.

De là il suit que si l'on réunit les deux suites précédentes en une seule  $d, c \mp d, 2c \mp d, 3c \mp d$  &c, les deux cordes voisines de part & d'autre de la plus grande ou première *BD* qui termine l'aliquote *AD* de l'arc *AR* moindre que la demie circonférence, termineront des aliquotes pareilles du second terme  $c \mp d$  de la suite; que les deux cordes voisines de celles-ci termineront des aliquotes pareilles du troisième terme  $2c \mp d$  de la suite; & ainsi à l'infini de deux en deux jusqu'aux dernières lorsque l'aliquote est impaire, & jusqu'à la dernière lorsqu'elle est paire. Ainsi lorsque l'arc  $AD = \frac{1}{5}AR$ ; les cordes *BE*, *BH*, terminent les deux arcs *ADE*, *AH*,

cinquièmes parties du second terme  $c \mp d$  de la suite, c'est à dire de la circonference plus l'arc  $AR$ , & de la circonference moins cet arc; les deux cordes  $BF$ ,  $BG$ , voisines de celles-ci termineront deux arcs  $ADEF$ ,  $AHG$ , qui sont les cinquièmes parties du troisième terme  $2c \mp d$  de la suite: & de même lorsque l'arc  $AD = \frac{1}{6} AR$ ; les deux cordes  $BE$ ,  $BK$ , voisines de part & d'autre de la première ou plus grande  $BD$  terminent les deux arcs  $ADE$ ,  $AK$ , qui sont les sixièmes parties du second terme  $c \mp d$ ; les deux cordes  $BF$ ,  $BH$ , voisines de ces deux-ci terminent les deux arcs  $ADEF$ ,  $AKH$ , sixièmes parties du troisième terme  $2c \mp d$ ; & enfin la dernière corde  $BG$  termine les deux arcs  $ADEFG$ ,  $AKHG$ , sixièmes parties du quatrième terme  $3c \mp d$ .

On entend dans les remarques suivantes par *cordes impaires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la première ou plus grande  $BD$ , se trouvent dans des lieux impairs à commencer par cette plus grande; & par *cordes paires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la même  $BD$ , se trouvent dans des lieux pairs. Ainsi lorsque l'arc  $AD = \frac{1}{3} AR$ ; les cordes  $BD$ ,  $BF$ ,  $BG$ , sont des cordes impaires, & les cordes  $BE$ ,  $BH$ , des cordes paires: & de même lorsque l'arc  $AD = \frac{1}{6} AR$ ; les cordes  $BD$ ,  $BF$ ,  $BH$ , sont des cordes impaires, & les côtés  $BE$ ,  $BK$ ,  $BG$ , sont des cordes paires.

## REMARQUE II.

449. Si l'arc  $AD$  est une aliquote quelconque de l'arc  $AR$  moindre que la demie circonference  $ARB$ ; & qu'ayant inscrit dans le cercle à commencer par le point  $D$ , un polygone  $DEFGH$  &c. d'un pareil nombre de côtés, on tire de l'extrémité  $B$  du diamètre  $AB$  aux angles du polygone les cordes  $BD$ ,  $BE$ ,  $BF$ ,  $BG$ ,  $BH$  &c: je dis que les cordes impaires lorsque l'arc  $AD$  est une aliquote impaire de l'arc  $AR$ , & leurs quar-

FIG. 273  
274

G g g i j

rés lorsqu'il en est une aliquote paire, expriment les racines vraies de l'égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur positive  $+a$ , le rang parallele de la Table dont l'exposant surpasse d'une unité le nombre des côtés du polygone ; & que les cordes paires dans le premier cas, & leurs quarrés dans le second, expriment les racines vraies de l'autre égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur negative  $-a$ , le même rang parallele de la Table.

FIG. 171. Soit, par exemple, l'arc  $AD = \frac{1}{2} AR$  ; je dis que les  
273- cordes impaires  $BD, BF, BG$ , sont les racines vraies de l'égalité  $x^3 - 5x^2 + 5x = a$ , & que les cordes paires

FIG. 172.  $BE, BH$ , sont les racines vraies de l'autre égalité  
274-  $x^3 - 5x^2 + 5x = -a$ . Si l'arc  $AD = \frac{1}{2} AR$  ; les quarrés des cordes impaires  $BD, BF, BH$ , seront les racines vraies de l'égalité  $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = a$ , & les quarrés des cordes paires  $BE, BK, BG$ , seront les racines vraies de l'autre égalité  $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = -a$ .

Car si l'on propose de diviser la circonference entiere repetée un certain nombre de fois plus ou moins l'arc  $AR$ , en parties égales dont la premiere soit moindre que la demie circonference, il est clair selon l'article 444. qu'on formera la même Table que pour la division de l'arc  $AR$  : en observant que les cordes doivent changer necessairement une fois de signe (avant que d'arriver à la derniere  $BR$ ) lorsque la circonference n'est repetée qu'une fois, par ce que l'origine commune  $B$  de toutes se trouve sur l'une des parties égales ; que les cordes doivent changer deux fois de signes, lorsque la circonference est repetée deux fois, parce que l'origine  $B$  se trouve necessairement sur deux des parties égales, qu'elles doivent changer trois fois, lorsque la circonference est repetée trois fois, parce que l'origine  $B$  se trouve sur trois parties égales, & ainsi de suite. La corde  $BR$  sera donc positive lorsqu'il s'agit de diviser en parties égales l'arc  $AR$  & la circonference repetée un nombre pair de fois plus ou moins l'arc  $AR$  ; & negative lorsque la circonference

ce est répétée un nombre impair de fois : c'est à dire que dans le premier cas on doit éгалer le rang parallèle de la Table à la grandeur positive  $+\alpha$ . Et par conséquent les cordes impaires ou leurs quarrés seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est  $-\alpha$ . *Ce qu'il falloit &c.*

## REMARQUE III.

450. LES mêmes choses étant posées, si l'arc  $AD$  FIG. 272. est un aliquote impaire de l'arc  $AR$  ; il est clair par l'inf- 273. pection de la Table, que tous les termes pairs, c'est à dire, le deuxième, quatrième, sixième &c, excepté le dernier terme  $\alpha$ , manquent toujours dans les deux égalités qu'on trouve selon la remarque précédente. Or l'on sçait en Algebre, qu'en changeant de signes les termes pairs d'une égalité, on ne fait qu'en changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où il suit que les cordes paires qui sont des racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est  $-\alpha$ , deviendront des racines fausses de l'autre égalité dont l'un des membres est  $+\alpha$ . Par exemple si l'arc  $AD = \frac{1}{2} AR$  ; les cordes impaires  $BD, BF, BG$ , seront les racines vraies de l'égalité  $x^2 - 3x^2 + 3x = \alpha$ , & les cordes paires  $BE, BH$ , en seront les racines fausses.

On peut tirer de ces deux dernières Remarques plusieurs Theorèmes la plupart entièrement nouveaux, touchant l'inscription des polygones réguliers ; si l'on fait attention que la grandeur connue du second terme d'une égalité renferme la somme de ses racines, que celle du troisième terme renferme la somme des plans alternatifs de ses racines, que celle du quatrième terme renferme la somme des solides alternatifs &c, & enfin que le dernier terme est égal au produit de toutes les racines les unes par les autres. J'en mettrai ici quatre des principaux, après avoir fait la remarque suivante qui peut être de quelque utilité.

## REMARQUE IV.

FIG. 271.  
273.

451. LES mêmes choses étant posées que dans la Remarque précédente, où l'on veut que l'aliquote  $AD$  de l'arc  $AR$  soit impaire; je dis qu'entre les cordes renfermées dans la demie circonférence  $ARB$  qui contient l'arc  $AR$ , la dernière ou plus petite  $BF$  soutend un arc  $BF$  qui est à l'arc  $BR$ , en même raison que l'arc  $AD$  à l'arc  $AR$ .

Car soit l'arc  $AD$  la cinquième partie de l'arc  $AR$ , & par conséquent l'arc  $DE$  la cinquième partie de la circonférence; il est clair que la demie circonférence  $ARB$  contiendra deux fois & demie l'arc  $DE$ , c'est à dire, deux fois l'arc  $DE$  ou bien l'arc  $DEF$  plus la cinquième partie de la demie circonférence. Donc l'arc  $AD$  plus l'arc  $BF$  vaut la cinquième partie de la demie circonférence  $ARB$ . Donc puisque  $AD$  est la cinquième partie de l'arc  $AR$ , il s'ensuit que  $BF$  sera aussi la cinquième partie de l'arc  $BR$  complément à deux droits de l'arc  $AR$ . Mais ce que l'on vient de démontrer subsiste avec la même force, soit que l'arc  $AD$  soit la cinquième partie de l'arc  $AR$ , ou bien une autre aliquote quelconque impaire. On a donc eu raison de dire en general &c.

De là on voit que si l'on nomme  $b$  la corde  $BR$  d'un arc quelconque  $BR$  moindre que la demie circonférence; dont le rayon est 1, & que l'on forme une égalité dont l'un des membres soit  $b$ , & l'autre le rang parallèle de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales dans lesquelles l'arc  $BR$  doit être divisé: cette égalité aura pour l'une de ses racines la corde  $BF$  de la première de ses parties, & par conséquent pour une autre de ses racines, la corde  $BG$  de la première d'un pareil nombre de parties égales de l'arc  $BAR$  complément à quatre droits de l'arc  $BR$ .

THEOR. I

## THEOREME I.

452. SI l'on inscrit au dedans d'un cercle un polygone régulier quelconque DEFGH &c d'un nombre impair de côtés ; & qu'on tire d'un point quelconque B de la circonférence à tous les angles du polygone des cordes BD, BE, BF, BG, BH, &c : je dis ,

1°. Que la somme des cordes impaires BD, BF, BG &c , à commencer par la plus grande BD sera toujours égale à la somme des cordes paires BE, BH &c ; c'est à dire que la plus petite corde  $BF - BE + BD - BH + DG \text{ &c} = 0$ .

Car menant le diamètre BA, & prenant l'arc AR qui contienne l'arc AD autant de fois que le polygone a de côtés, il est clair comme l'on vient de voir que si l'on nomme la corde BR,  $a$  ; & le rayon CA ou CB,  $r$  ; les cordes impaires BD, BF, BG &c, seront les racines vraies, & les cordes paires BE, BH &c, les racines fausses de l'égalité qui a pour l'un de ses membres  $+a$ . Or puisque le second terme, qui selon qu'on démontre en Algèbre contient la somme des racines, manque toujours dans cette égalité, il s'ensuit &c.

2°. Que si l'on mène le diamètre BA, & qu'ayant pris l'arc AR qui contienne l'arc AD autant de fois que le polygone a de côtés, on tire la corde BR : le produit  $BD \times BE \times BF \times BG \times BH \text{ &c}$  de toutes les cordes BD, BE, BF, BG, BH &c les unes par les autres, sera toujours égal au produit de la corde BR par une puissance du rayon CA qui ait pour exposant le nombre des cordes  $-1$ .

Car ce dernier produit vaut le membre  $a$  ; puisque  $BR = a$ , & qu'on prend dans la Table pour l'unité le rayon CA. Or comme le terme  $a$  est toujours le dernier terme de l'égalité qui a pour ses racines toutes les cordes BD, BE, BF, BG, BH &c, & que le dernier terme d'une égalité contient toujours selon ce qu'on démontre en Algèbre le produit de toutes ses racines ; il s'ensuit &c,

## THEOREME II.

FIG. 273. 453. Si l'on divise une demie circonférence AEB en un nombre quelconque impair de parties égales, dont les deux premières soient l'arc AE, les quatre premières l'arc AEF, & ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la dernière; & qu'on tire les cordes BE, BF &c: je dis.

1°. Que la première de ces cordes BE, moins la seconde BF, plus la troisième, moins la quatrième &c, jusqu'à la dernière inclusivement; est toujours égale au rayon.

2°. Que le produit  $BE \times BF$  &c de toutes les cordes les unes par les autres, est égale à une puissance convenable du rayon. Ainsi dans cet exemple où le nombre des divisions est 5, & où il n'y a par conséquent que deux cordes. BE, BF; on aura

$$1^\circ. BE - BF = CA. \quad 2^\circ. BE \times BF = CA^2.$$

Car inscrivant dans le cercle entier le polygone régulier EFGH dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions à commencer par le point A; & tirant de l'autre extrémité B du diamètre AB à tous les angles de ce polygone des cordes BD, BE, BH, BF, BG &c; il est clair 1°. Que la plus grande de ces cordes BD est égale au diamètre BA, & qu'ainsi l'arc AD étant nul ou zéro, l'arc AR le sera aussi; d'où l'on voit que la corde BR sera aussi égale au diamètre BA. 2°. Que les cordes BE, BH, BF, BG &c, étant prises deux à deux sont égales entr'elles. Or cela posé, si l'on applique le Theorème précédent à ce cas particulier on en verra naître celui-ci. Donc &c.

## THEOREME III.

FIG. 272. 454. Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un polygone régulier quelconque DEFGHK &c, dont le nombre des côtés soit pair; & que d'un point quelconque B de la circonférence, on tire à tous les angles de ce polygone des cordes BD, BE, BF, BG, BH, BK &c: je dis.

1°. Que la somme tant des carrés des cordes impaires BD,



*BF, BH, que des cordes paires BE, BG, BK, est égale au carré du rayon CB pris autant de fois que le polygone a de côtés.*

Car menant le diamètre  $BA$ , & prenant l'arc  $AR$  qui contienne l'arc  $AD$  autant de fois que le polygone a de côtés; il est clair\* qu'en nommant la corde  $BR, a$ ; \* *Art. 449.* & le rayon  $CA$  ou  $CB, 1$ ; les carrés des cordes impaires  $BD, BF, BH$  &c, seront les racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est  $+a$ ; & que les carrés des cordes paires  $BE, BG, BK$  &c, seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est  $-a$ . Or le coefficient du second terme de chacune de ces deux égalités qui contient la somme de leurs racines, est toujours égal au carré du rayon pris autant de fois que le polygone a de côtés, comme l'on voit dans la Table. Donc &c.

2°. *Que si l'on mène le diamètre BA, & qu'ayant pris l'arc AR qui contienne autant de fois l'arc AD que le polygone a de côtés, on tire la corde BR: le produit  $\overline{BD} \times \overline{BF} \times \overline{BH}$  &c des carrés des cordes impaires, est égal au produit de  $BA + BR$  par une puissance convenable du rayon, sçavoir  $BA + BR$  lorsque le nombre des côtés du polygone est simplement pair, &  $BA - BR$  lorsqu'il est pairément pair, c'est à dire, divisible par 4; & le produit  $\overline{BE} \times \overline{BG} \times \overline{BK}$  &c des cordes paires, est égal au produit de  $BA + BR$  par la même puissance du rayon, sçavoir  $BA - BR$  dans le premier cas &  $BA + BR$  dans le second.*

Car nommant  $BR, a$ ; & le rayon  $CA, 1$ ; il est clair que les carrés des cordes impaires  $BD, BF, BH$  &c, sont les racines d'une égalité qui a toujours pour dernier terme  $2 + a$  c'est à dire  $BA + BR$ ; & de plus que les carrés des cordes paires  $BE, BG, BK$  &c, sont les racines de l'autre égalité qui a toujours pour dernier terme  $2 - a$  c'est à dire  $BA - BR$ . Or comme le dernier terme d'une égalité contient toujours le produit de toutes ses racines, il s'ensuit &c.

## COROLLAIRE.

455. **D**E LA il est évident. 1°. Que la somme des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires, est égal au quarré du rayon multiplié par le double du nombre des côtés du polygone, c'est à dire ici que  $\overline{BF} + \overline{BE} + \overline{BD} + \overline{BK} + \overline{BH} + \overline{BG} = 12 \overline{CA}$ . 2°. Que la différence des quarrés des cordes impaires avec les quarrés des cordes paires, est toujours égale à zero, c'est à dire, que  $\overline{BF} - \overline{BE} + \overline{BD} - \overline{BK} + \overline{BH} - \overline{BG} = 0$ . 3°. Que le produit des quarrés des cordes impaires plus celui des quarrés des cordes paires, est égal au quadruple d'une puissance pareille du rayon; c'est à dire, que  $\overline{BF} \times \overline{BD} \times \overline{BH} + \overline{BE} \times \overline{BK} \times \overline{BG} = 4 \overline{CA}^2$ . 4°. Que la différence de ces deux produits, est égale au double de la corde  $BR$  multipliée par une puissance convenable du rayon; en observant que le produit du quarré des cordes impaires, surpasse celui des quarrés des cordes paires, lorsque le nombre des côtés du polygone est simplement pair, & au contraire qu'il est moindre, lorsqu'il est parement pair: c'est à dire ici, que  $\overline{BF} \times \overline{BD} \times \overline{BH} - \overline{BE} \times \overline{BK} \times \overline{BG} = 2 \overline{BR} \times \overline{CA}$ . 4°. Que le produit des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires les uns par les autres sera toujours égal au produit de  $\overline{BA} - \overline{BR} = \overline{BA} + \overline{BR} \times \overline{BA} + \overline{BR} = \overline{AR}^2$  à cause de l'angle droit  $ARB$ , par une puissance convenable du rayon: c'est à dire, en extrayant de part & d'autre les racines quarrées, que le produit de toutes les cordes est égal au produit de la corde  $AR$  par une puissance du rayon moindre d'une unité que le nombre des cordes; par exemple ici,  $\overline{BF} \times \overline{BE} \times \overline{BD} \times \overline{BK} \times \overline{BH} \times \overline{BG} = \overline{AR} \times \overline{CA}$ .

## THEOREME IV.

FIG. 275. 456. **S**I l'on divise une demie circonference  $ADB$  en un nombre quelconque pair de parties égales, dont la première

soit l'arc AD, les trois premières l'arc ADE, les cinq premières l'arc ADEF, & ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la dernière; & qu'on tire les cordes BD, BE, BF &c: je dis.

1°. Que la somme des quarrés de ces cordes est égale au quarré du rayon pris autant de fois qu'il y a de divisions. C'est à dire ici, où le nombre des divisions est 6, que  $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 = 6 \overline{CA}^2$ .

2°. Que le produit des quarrés de ces cordes les uns par les autres, vaut le double de la puissance convenable du rayon. Ainsi  $\overline{BD}^2 \times \overline{BE}^2 \times \overline{BF}^2 = 2 \overline{CA}^6$ , & par conséquent  $\overline{BD} \times \overline{BE} \times \overline{BF} = \overline{CA}^3 \times \sqrt{2}$ .

Car inscrivant dans le cercle entier un poligone regulier  $DEFGHK$ , dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions, à commencer par la première D; & tirant de l'extrémité B du diametre AB, à tous les angles de ce poligone, des cordes BD, BK, BE, BH, BF, FG: il est clair que les cordes BD, BK, BE, BH, BF, BG &c, étant prises deux à deux sont égales entr'elles; & partant que si l'on applique les articles premier & troisième du Corollaire précédent à ce cas particulier, on en verra naître ce Theorème.

## EXEMPLE XII.

457. INSCRIRE dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque, dont le nombre des côtés soit donné.

On peut regarder ce Problème, comme n'étant qu'un cas particulier de l'exemple précédent. Car si l'on suppose que la corde BR devienne nulle ou zero, il s'ensuit que l'arc AR qu'elle termine deviendra la demie circonference. Or si l'on propose de diviser la circonference entiere en un nombre quelconque de parties égales; il est évident qu'en divisant la demie circonference dans ce même nombre, & prenant la seconde corde au

H h h iij

Fig. 275.

lieu de la première, elle terminera la première des parties demandées. Par exemple, si l'on divise la demie circonférence  $ADB$  en sept parties égales  $AD, DE, EF, FG, GH, HI, IB$ ; la seconde corde  $BE$  terminera l'arc  $AE$  qui est la septième partie de la circonférence entière. D'où l'on voit qu'en égalant à zéro le rang parallèle de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des côtés du polygone, on formera une égalité dont la plus grande des racines  $x$  exprimera la valeur de la corde  $BD$  qui termine l'arc  $AD$  moitié de l'arc cherché  $AE$ . Mais \*  $CB(1) \cdot BD(x) :: BD(x) \cdot BE + BA$ , & par conséquent si l'on nomme la seconde corde  $BE, z$ ; on aura  $xx = z + 2$ . Si donc l'on fait évanouir par le moyen de cette égalité l'inconnue  $x$  dans la précédente, on en formera une nouvelle dont la plus grande racine  $z$  exprimera la corde  $BE$  qui termine l'arc cherché  $AE$ . Ainsi dans notre exemple, en égalant à zéro le huitième rang parallèle & divisant par  $x$ , je trouve cette égalité  $x^8 - 7x^6 + 14xx - 7 = 0$ , dans laquelle mettant à la place de  $xx$  sa valeur  $z + 2$ , à la place de  $x^4$  le quarré de cette valeur &c. je la change en cette autre  $z^4 - 2z^3 - 2z + 1 = 0$ , dont la plus grande des racines  $z$  exprime la valeur de la corde  $BE$  qui termine l'arc  $AE$  septième partie de la circonférence entière.

\* Art. 442.

Voici maintenant une manière générale de trouver immédiatement toutes ces égalités lorsque le nombre des côtés du polygone est impair qui est le seul cas nécessaire; puisque s'il étoit pair, on le réduiroit toujours en le divisant par 2, autant de fois qu'il seroit possible, en un nombre impair dans lequel ayant partagé la circonférence, on auroit par la bisection d'une des parties égales, réitérée autant qu'il seroit nécessaire, l'arc qu'on demande.

Soit construite une Table dans laquelle le premier rang parallèle étant 1, & le second  $z - 1$ ; le troisième  $zz - z - 1$  soit égal au produit du second par  $z$ , moins le premier; le quatrième  $z^4 - 2z^3 - 2z + 1$  soit égal au pro-

duit du troisième par  $z$ , moins le second ; & ainsi à l'infini. Soit formée une égalité dont l'un des membres étant zero, l'autre soit le rang parallèle de la Table, qui ait pour exposant la plus grande moitié du nombre des côtés du polygone. Je dis que la plus grande des racines  $z$  de cette égalité, terminera un arc qui aura pour corde, le côté cherché du polygone.

1 <sup>re</sup>	1	Table pour l'inscription des polygones réguliers dans le cercle.
2 <sup>e</sup>	$z - 1$	
3 <sup>e</sup>	$z^2 - z - 1$	
4 <sup>e</sup>	$z^3 - z^2 - 2z - 1$	
5 <sup>e</sup>	$z^4 - z^3 - 3z^2 - 2z - 1$	
6 <sup>e</sup>	$z^5 - z^4 - 4z^3 - 3z^2 - 3z - 1$	
7 <sup>e</sup>	$z^6 - z^5 - 5z^4 - 4z^3 - 6z^2 - 3z - 1$	
8 <sup>e</sup>	$z^7 - z^6 - 6z^5 - 5z^4 - 10z^3 - 6z^2 - 4z - 1$	
9 <sup>e</sup>	$z^8 - z^7 - 7z^6 - 6z^5 - 15z^4 - 10z^3 - 10z^2 - 4z - 1$	
10 <sup>e</sup>	$z^9 - z^8 - 8z^7 - 7z^6 - 21z^5 - 15z^4 - 20z^3 - 10z^2 - 5z - 1$	

Qu'il faille, par exemple, inscrire dans un cercle un heptagone. Je prends le quatrième rang parallèle de la Table, parce que 4 est la plus grande moitié de 7, & l'égalant à zero j'ai  $z^4 - z^3 - 3z^2 - 2z - 1 = 0$ , dont la plus grande racine  $z$  exprimera la valeur de la corde  $BE$ , qui termine l'arc  $AE$  septième partie de la circonférence entière. Pour le prouver.

Soit un arc de cercle  $AR$  moindre que la demie circonférence, divisé en un nombre quelconque impair, de parties égales aux points  $D, E, F, G$  &c. & soient menées de l'extrémité  $B$  du diamètre  $BA$ , les cordes  $BD, BE, BF, BG$  &c, jusqu'à la dernière  $BR$ . Ayant pris l'arc  $AS$  égal à l'arc  $AD$ , soit tirée la corde  $BS$ , & soient nommées la première corde  $BD$  ou  $BS$ ,  $x$ ; & la seconde  $BE$ ,  $z$ . Cela posé, on aura selon le Lemme  $CB(1)$ .  $BB(z) :: BD(x)$ .  $BF = + BS$ . Et par conséquent  $BF = xz - x$ . De même  $CB(1)$ .  $BE(z) :: BF$ .  $BD + BF$ . Et par conséquent  $BH = zBF - BD$ ; de

Fig. 275.

même encore  $CB$  (1).  $BE$  (2) ::  $BH$ .  $BF + BR$ , & partant  $BR = 2BH - BF$ : c'est à dire, que la cinquième corde  $BH$  est égale au produit de la troisième  $BF$  par 2, moins la première  $BD$ ; que la septième  $BR$  est égale au produit de la cinquième  $BH$  par 2, moins la troisième  $BF$ ; & ainsi à l'infini de toutes les cordes impaires. D'où l'on voit que si l'on construit une Table dont le premier rang étant  $x$ , & le second  $x^2 - x$ ; le troisième  $xx^2 - x^2 - x$  soit égal au produit du second par 2, moins le premier; le quatrième  $xx^3 - xx^2 - 2x^2 + 1$  soit égal au produit du troisième par 2 moins le second; & ainsi à l'infini: les rangs de cette Table exprimeront par ordre toutes les cordes impaires  $BD, BF, BH, BR$ , de l'arc  $AR$ . Or les rangs de cette Table n'étant autres que ceux de la précédente multipliez chacun par  $x$ , il s'en suit qu'en supposant que la dernière corde  $BR$  devienne nulle ou zero (ce qui arrive lorsque l'arc  $AR$  devient la demie circonférence,) & faisant ce qu'on vient de prescrire, on aura une égalité dont l'inconnue  $x$  exprimera la seconde corde  $BE$  qui termine l'arc  $AE$  qui est contenu autant de fois dans la circonférence entière, que l'arc  $AD$  qui en est la moitié, l'est dans la demie circonférence.

FIG. 276.

Il faut remarquer 1°. Que les égalités qu'on trouve de cette manière sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des côtés du polygone est un nombre premier: mais que lorsqu'il est composé de deux ou de plusieurs nombres premiers, il faudra diviser d'abord la circonférence entière en autant de parties égales que le plus grand de ces nombres a d'unités, & ensuite une de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & continuer jusqu'à ce que tous les nombres premiers qui composent le nombre donné des côtés du polygone soient épuisés. 2°. Qu'entra les cordes qui partent du point  $B$ , & qui sont renfermées dans la demie circonférence  $AEB$ ; les impaires à commencer par la plus grande  $BE$  sont les racines vraies,

vraies, & les paires les fausses des égalités qu'on trouve par cette methode : ainsi les cordes  $BE$ ,  $BI$ , sont les deux racines vraies de l'égalité  $x^3 - 2x - 2x + 1 = 0$ , & la corde  $BG$  en est la fausse. 3°. Qu'entre les racines de ces sortes d'égalités, la plus petite est la corde d'un arc qui est la moitié de celui qu'on cherche : c'est à dire dans cette exemple, que la plus petite racine  $BI$  de l'égalité  $x^3 - 2x - 2x + 1 = 0$ , est la corde d'un arc  $BI$  qui est la quatorzième partie de la circonference.

## R E M A R Q U E.

458. IL est visible dans cette dernière Table, que tous les termes du premier & du second rang perpendiculaire ont chacun pour coefficient l'unité ; que ceux du troisième & du quatrième rang ont pour coefficients les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui se forment par l'addition continue des unités ; que ceux du cinquième & du sixième rang ont pour coefficients les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c qui se forment par l'addition continue des nombres naturels ; que ceux du septième & du huitième rang ont pour coefficients les nombres pyramidaux 1, 4, 10 &c, qui se forment par l'addition continue des triangulaires ; & ainsi à l'infini de deux en deux des nombres d'un ordre supérieur qui se forment par l'addition continue de ceux du dernier ordre.

## L E M M E I.

459. S'IL y a sur un demi cercle  $AEB$  deux arcs égaux  $AD$ ,  $EF$ , dont l'un  $AD$  ait son commencement en l'une des extrémités  $A$  du diamètre  $AB$ , & l'autre  $EF$  soit pris par tout où l'on voudra ; & qu'on tire les cordes  $BD$ ,  $BE$ ,  $BF$ , &  $AD$ ,  $AE$ ,  $AF$  : je dis, 1°. Que  $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$ . 2°. Que  $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$ .

Car les trois triangles rectangles  $ADG$  (le point  $G$  est ici le point d'intersection des cordes  $BD$ ,  $AF$ ),  $AEB$ ,

$BFG$  sont semblables entr'eux; puisque l'angle  $AGD$  ou  $BGF$  ayant pour mesure la moitié des deux arcs  $BF$ ,  $AD$ , est égal à l'angle  $BAE$  qui a aussi pour mesure la moitié des deux arcs  $BF$ ,  $FE$ , ou  $AD$ . Si donc l'on nomme le diamètre  $AB$ , 1; les cordes  $BD$ ,  $x$ ;  $AD$ ,  $y$ ;  $BE$ ,  $v$ ;  $AE$ ,  $z$ ; on aura 1°.  $BE(v) \cdot EA(z) :: AD(y) \cdot DG = \frac{zx}{v}$ , & partant  $BG$  ou  $BD - DG = x - \frac{zx}{v}$ . 2°.  $AB(1) \cdot BE(v) :: BG(x - \frac{zx}{v}) \cdot BF = vx - yz$  c'est à dire (puisque  $AB=1$ ) que  $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$ . Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

Maintenant  $BE(v) \cdot BA(1) :: AD(y) \cdot AG = \frac{zy}{v}$ . Et  $AB(1) \cdot AE(z) :: BG(x - \frac{zx}{v}) \cdot GF = xz - \frac{xzy}{v}$ ; & partant  $AG + GF$  ou  $AF = xz - \frac{xzy}{v} + \frac{zy}{v} = xz + vy$ , puisqu'à cause du triangle rectangle  $AEB$  on trouve  $1 - z^2 = vv$ ; c'est à dire que  $AF$  ou  $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$ . Et c'est ce qui restoit à démontrer.

## LEMME II.

460. SOIT formée une Table, dont le premier rang parallèle étant composé de deux parties  $x$  &  $y$ , tous les autres le soient aussi selon cette règle; la première partie de tel rang parallèle qu'on voudra, vaut la première partie du rang parallèle qui le précède immédiatement, multipliée par  $x$ , moins la seconde partie du même rang multipliée par  $y$ ; & la seconde partie vaut la même première partie multipliée par  $y$ , plus la même seconde multipliée par  $x$ . Soit de plus un arc de cercle quelconque  $AR$  moindre que la demie circonférence divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points  $D, E, F, G$ , &c. Je dis que si le diamètre  $AB=1$ , & les deux premières cordes  $BD=x$ ,  $AD=y$ ; toutes les autres cordes  $BE, BF, BG$  &c, seront exprimées par les premières parties du deuxième, troisième, quatrième, &c. rang parallèle, &

FIG. 278.



les autres cordes correspondantes  $AE, AF, AG, \&c$ , par les secondes parties des mêmes rangs. Ainsi  $BG$  étant la quatrième corde, vaut la première partie  $x^4 - 6yyxx + y^4$  du quatrième rang parallèle, & sa correspondante  $AG$  vaut la seconde partie  $4yx^3 - 4y^3x$  du même rang.

1 <sup>er</sup>	$x$	$y$
2 <sup>e</sup>	$xx - yy$	$2yx$
3 <sup>e</sup>	$x^3 - 3yyx$	$3yx^2 - y^3$
4 <sup>e</sup>	$x^4 - 6yyxx + y^4$	$4yx^3 - 4y^3x$
5 <sup>e</sup>	$x^5 - 10yyx^3 + 5y^4x$	$5yx^4 - 10y^3xx + y^5$
6 <sup>e</sup>	$x^6 - 15yyx^4 + 15y^4xx - y^6$	$6yx^5 - 10y^3x^3 + 6y^5x$
7 <sup>e</sup>	$x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$	$7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - x^7$

Car il est clair selon le Lemme précédent que le produit d'une corde quelconque  $BF$  par la première corde  $BD (x)$ , moins le produit de la corde correspondante  $AF$ , par l'autre première corde  $AD (y)$  exprime la valeur de la corde  $BG$  qui suit immédiatement  $BF$ ; & aussi que la corde  $AG$  vaut  $BF \times AD (y) - AF \times BD (x)$ . Donc &c.

#### COROLLAIRE.

461. Si l'on ajoute ensemble les deux parties de chaque rang parallèle de la Table précédente, en mettant par ordre tous les termes qui les composent selon les différens degrez des puissances de  $x$ ; on formera cette nouvelle Table qui contiendra par ordre les termes de toutes les puissances du binome  $x + y$ : en observant que le premier & le second terme doivent être pris affirmativement, le troisième & le quatrième négativement, & ainsi alternativement de deux en deux jusqu'au dernier. Ainsi le troisième rang parallèle contiendra  $x^3 + 3yx^2 - 3yyx - y^3$ ; c'est à dire le cube du binome  $x + y$ , dont on prend les deux premiers termes affirmativement, & les deux derniers négativement: de même le cinquième rang parallèle contiendra  $x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 + 10y^3xx - y^5$ , qui est la cinquième

puissance du binome  $x+y$ , dont le premier & le second terme sont pris affirmativement, le troisième & le quatrième négativement, le cinquième & le sixième affirmativement; & il en est ainsi de tous les autres rangs à l'infini.

$$\begin{array}{lcl}
 1^{\text{er}} & x+y & \\
 2^{\text{e}} & xx+2yx-yy & \\
 3^{\text{e}} & x^3+3yxx-3yyx-y^3 & \\
 4^{\text{e}} & x^4+4yx^3-6yyxx-4y^3x+y^4 & \\
 5^{\text{e}} & x^5+6yx^4-10yyx^3-10y^3xx+5y^4x+y^5 & \\
 6^{\text{e}} & x^6+6yx^5-15yyx^4-20y^3x^3+15y^4xx+6y^5x-y^6 & \\
 7^{\text{e}} & x^7+7yx^6-21yyx^5-35y^3x^4+35y^4x^3+21y^5xx-7y^6x-y^7 & 
 \end{array}$$

Car si l'on fait attention à la manière dont la Table précédente est formée, on verra que tous les termes de chacun de ses rangs parallèles sont formés par ceux du rang parallèle qui le précède, multiples par  $x$  & par  $y$ , & joints par des signes  $+$  &  $-$ , en telle sorte que les termes des deux parties qui composent chaque rang, étant mis par ordre, selon les différens degrés de l'inconnue  $x$ , il y a de suite deux signes  $+$ , & après deux signes  $-$ ; & ainsi alternativement jusqu'au dernier.

#### REMARQUE.

462. IL est visible dans cette dernière Table, que tous les termes du premier rang perpendiculaire, ont chacun pour coefficient l'unité; que ceux du second rang ont pour coefficients les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui se forment par l'addition continue des unités; que ceux du troisième rang ont pour coefficients les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10 &c, qui se forment par l'addition continue des nombres naturels; que ceux du quatrième rang ont pour coefficients les nombres pyramidaux 1, 4, 10, 20 &c, qui se forment par l'addition continue des triangulaires; & ainsi à l'infini de rang en rang en avançant vers la droite, les nombres d'un

DES PROBLEMES DÉTERMINÉS. 437  
 ordre supérieur, se forment par l'addition continue de  
 ceux de l'ordre immédiatement précédent.

### EXEMPLE XII.

463. UN arc de cercle  $AR$  étant donné; le divi- FIG. 278.  
 ser en autant de parties égales qu'on voudra, aux points  
 $D, E, F, G$  &c; par une methode differente de celle  
 de l'exemple dixième.

Ayant nommé le diametre  $AB, 1$ ; les cordes don-  
 nées  $BR, a$ ;  $AR, b$ ; qui terminent l'arc donné  $AR$ ;  
 & les cordes inconnues  $BD, x$ ;  $AD, y$ ; qui terminent  
 l'arc cherché  $AD$ ; on élèvera le binome  $x+y$  à une  
 puissance dont l'exposant soit égal au nombre des divi-  
 sions. On formera deux égalités, dont la premiere aura  
 pour l'un de ses membres la donnée  $a$ , & pour l'autre  
 tous les termes impairs de la puissance de  $x+y$ , joints  
 par des signes  $+ & -$  alternatifs; & la seconde aura  
 pour l'un de ses membres la donnée  $b$ , & pour l'autre  
 tous les autres termes de la même puissance du binome  
 $x+y$ , joints encore ensemble par des signes alternatifs  
 $+ & -$ . On fera évanouir l'une ou l'autre des inconnues  
 $x$  ou  $y$ , par le moyen de l'égalité  $xx = 1 - yy$  où  
 $yy = 1 - xx$ , qui se tire du triangle  $ADB$  rectangle en  
 $D$ : ce qui donnera enfin une dernière égalité où il n'y  
 aura qu'une seule inconnue  $x$  ou  $y$ , dont la resolution  
 fournira la valeur de cette inconnue  $BD$  ou  $AD$  qui  
 termine l'arc cherché  $AD$ .

Qu'il faille, par exemple diviser l'arc cherché  $AR$   
 en sept parties égales, aux points  $D, E, F, G, H, I$ .  
 Je prends la septième puissance  $x^7 + 7yx^6 + 21y^2x^5$   
 $+ 35y^3x^4 + 35y^4x^3 + 21y^5x^2 + 7y^6x + y^7$  du binome  
 $x+y$ , de laquelle je forme les deux égalités  $a = x^7$   
 $- 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$ , &  $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5x^2$   
 $- y^7$ . Et faisant évanouir dans la premiere de ces deux  
 égalités l'inconnue  $y$ , ou dans la seconde l'inconnue  $x$ ,  
 par le moyen de l'égalité  $yy = 1 - xx$  ou  $xx = 1 - yy$ ,

je forme l'une de ces deux nouvelles égalités  $a = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$  ou  $b = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 63y^7$ , qui ne renferme plus qu'une seule inconnue, & dont la résolution qui se fera selon les règles du Livre précédent, fournira pour l'une de ses racines  $x$  ou  $y$ , une valeur  $BD$  ou  $AD$  qui servira à déterminer la première des parties égales demandées. Tout cela est une suite des deux articles précédens.

Il est à remarquer que si l'arc  $AR$  étoit plus grand que la demie circonférence, celle des deux égalités précédentes qui a pour l'un de ses membres  $+b$  sert également sans y rien changer, mais dans l'autre il faut changer le membre  $+a$  en  $-a$ ; dont la raison est que la corde  $BR$  ( $a$ ) passant de l'autre côté du point  $B$  devient négative de positive qu'elle étoit, au lieu que la corde  $AR$  ne repassant point de l'autre côté du point  $A$  demeure toujours positive.

## L E M M E I.

464. **Q**UE dans un carré quelconque de cellules on remplisse de la lettre  $a$ , toutes les cellules du premier rang parallèle; de la lettre  $b$ , toutes les cellules du premier rang perpendiculaire, excepté la première; & ensuite toutes les autres cellules par le moyen de cette règle; c'est à sçavoir qu'une cellule doit toujours être égale à celle qui est au dessus plus à celle qui est à gauche: de cette sorte on aura le carré de cellules qu'on voit ici. Or cela posé;

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	$\frac{a}{a}$	$\frac{a}{a}$	$\frac{a}{a}$	$\frac{a}{a}$	$\frac{a}{a}$	$\frac{a}{a}$	$\frac{a}{a}$
2.	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{a}{2a+b}$	$\frac{a}{3a+b}$	$\frac{a}{4a+b}$	$\frac{a}{5a+b}$	$\frac{a}{6a+b}$	$\frac{a}{7a+b}$
3.	$\frac{b}{a+2b}$	$\frac{3a}{3a+3b}$	$\frac{6a}{6a+4b}$	$\frac{10a}{10a+5b}$	$\frac{15a}{15a+6b}$	$\frac{21a}{21a+7b}$	
4.	$\frac{b}{a+3b}$	$\frac{4a}{4a+6b}$	$\frac{10a}{10a+10b}$	$\frac{20a}{20a+15b}$	$\frac{35a}{35a+21b}$	$\frac{56a}{56a+28b}$	
5.	$\frac{b}{a+4b}$	$\frac{5a}{5a+10b}$	$\frac{15a}{15a+20b}$	$\frac{35a}{35a+35b}$	$\frac{70a}{70a+56b}$	$\frac{126a}{126a+84b}$	
6.	$\frac{b}{a+5b}$	$\frac{6a}{6a+15b}$	$\frac{21a}{21a+35b}$	$\frac{56a}{56a+70b}$	$\frac{126a}{126a+126b}$	$\frac{216a}{216a+180b}$	
7.	$\frac{b}{a+6b}$	$\frac{7a}{7a+21b}$	$\frac{28a}{28a+56b}$	$\frac{84a}{84a+126b}$	$\frac{210a}{210a+252b}$	$\frac{462a}{462a+462b}$	

Je dis qu'une cellule quelconque est égale à la cellule qui est

à gauche plus à toutes celles qui sont au dessus : c'est à dire, par exemple, que la quatrième cellule  $4a + 6b$  du troisième rang perpendiculaire, est égale à la cellule  $a + 3b$  qui est à gauche, & qui par conséquent est la quatrième du second rang perpendiculaire, plus à toutes les autres  $a + 2b$ ,  $a + b$ ,  $a$ , qui sont au dessus d'elle dans ce second rang.

Car supposant que  $a, c, d, e$ , expriment les quatre premières cellules du second rang perpendiculaire, &  $a, f, g, h$ , les quatre premiers du troisième rang, on aura par la formation du carré de cellules  $h = e + g$ ,  $g = d + f$ ,  $f = c + a$ , & partant  $h = e + d + c + a$ ; ce qu'il falloit prouver. Or il est visible que cette démonstration se peut appliquer à tel nombre de cellules qu'on voudra de deux rangs perpendiculaires voisins. Donc &c.

## COROLLAIRE.

465. PUISQUE toutes les cellules excepté celles du premier rang parallèle & celle du premier rang perpendiculaire, sont composées de deux termes dans le premier desquels se trouve la lettre  $a$ , & dans le second la lettre  $b$ ; il s'ensuit 1°. Que le terme où se trouve la lettre  $a$ , est égal au terme où se trouve la même lettre  $a$  dans la cellule à gauche, plus à tous les termes où elle se rencontre dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci. 2°. Que le terme où se trouve la lettre  $b$ , est égal au terme où se trouve la même lettre  $b$  dans la cellule à gauche, plus à tous ceux où elle se trouve dans les cellules qui sont au dessus. Ainsi le terme  $15a$  de la cinquième cellule du quatrième rang perpendiculaire, est égal au terme  $5a$  de la cellule à gauche, plus aux termes  $4a$ ,  $3a$ ,  $2a$ ,  $1a$ , qui se trouvent dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci; & de même  $10b$  est égal au terme  $10b$  de la cellule à gauche, plus aux termes  $6b$ ,  $3b$ ,  $1b$ , de toutes les cellules qui sont au dessus.

## LEMME II.

466. Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre  $a$  dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins 2, & qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire moins 1; je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui: c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme  $15a$  de la cinquième cellule du quatrième rang perpendiculaire par  $5 + 4 - 2 = 7$ , & qu'on divise le produit par  $4 - 1 = 3$ ; le quotient  $35a$  sera égal au terme  $15a$  plus à tous les autres  $10a$ ,  $6a$ ,  $3a$ ,  $1a$ , qui sont au dessus de lui.

Cela est visible dans toutes les cellules du deuxième rang perpendiculaire, puisqu'elles contiennent toutes le même terme  $1a$ . Or je vais démontrer que supposé que cette propriété se rencontre dans un rang perpendiculaire quelconque, elle se trouve nécessairement dans celui qui est à droit; d'où il suivra que puisqu'elle se trouve dans le deuxième rang perpendiculaire, elle sera aussi dans le troisième, que puisqu'elle se rencontre dans le troisième, elle sera aussi dans le quatrième, & ainsi de suite à l'infini. Pour le prouver.

Soient  $a, e, c, d, e, f$  &c, autant de termes qu'on voudra de ceux où se trouve la lettre  $a$ , dans un rang perpendiculaire quelconque à commencer par le premier;  $a, g, h, k, l$ , &c un pareil nombre de termes du rang qui est à droit à commencer aussi par le premier. Soit de plus  $m$  égale à la somme des exposans moins 2 des rangs perpendiculaire & parallele de la cellule où se trouve le terme  $f$ ; &  $r$  égale à l'exposant moins 1 du rang perpendiculaire de cette cellule. Par la suppo-

\* Art. 464. sition  $\frac{m}{r} f = f + e + d + c + a = * l$ ,  $\frac{m-1}{r} e = e + d + c + a = k$ ,  $\frac{m-2}{r} d = d + c + a = h$ ,  $\frac{m-3}{r} c = c + a = g$ ,  $\frac{m-4}{r} a = a$ . Donc  $l + k + h + g + a = \frac{m}{r} f$

+

$+\frac{m-1}{r}e+\frac{m-2}{r}d+\frac{m-3}{r}c+\frac{m-4}{r}a=\frac{m}{r}\times f+e$   
 $+d+c+a, -\frac{1}{r}\times 1e+2d+3c+4a=\frac{m}{r}l, -\frac{1}{r}\times k$   
 $+b+g+a$  en mettant pour  $f+e+d+c+a$  sa valeur  $l$ , & pour  $1e+2d+3c+4a$  sa valeur  $k+b+g+a$ : transposant d'une part  $l$  & de l'autre  $-\frac{1}{r}\times k$   
 $+b+g+a$ , on aura  $\frac{r+1}{r}\times k+b+g+a=\frac{m-r}{r}l$ :  
 multipliant de part & d'autre par  $r$ , divisant par  $r+1$ ,  
 & ajoutant de part & d'autre  $l$ , il vient enfin  $\frac{m+1}{r+1}l=l$   
 $+k+b+g+a$ . Mais comme le rang perpendicu-  
 laire de la cellule où se trouve  $l$ , surpasse d'une unité  
 celui de la cellule où se trouve  $f$ , & que leur rang pa-  
 rallele demeure le même; il est évident que la proprie-  
 té marquée pour chaque terme où se trouve la lettre  $a$   
 dans un rang perpendiculaire quelconque, convient  
 aussi au terme  $l$  du rang perpendiculaire qui est à droit.  
 De plus puisque cette démonstration subsiste également  
 tel que puisse être le nombre de termes des deux rangs  
 perpendiculaires voisins, il s'ensuit que ce que l'on vient  
 de montrer par rapport au terme  $l$ , sera vrai aussi à l'é-  
 gard de tout autre de son rang perpendiculaire.

Si l'on suppose à présent que  $n$  exprime en general  
 l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le  
 premier, on verra que la premiere cellule de ce rang ne  
 renferme aucun terme où la lettre  $a$  se rencontre; que  
 la seconde renferme toujours  $1a$ ; que si l'on multiplie  
 $1a$  par  $\frac{n+1-1}{1-1}=\frac{n}{1}$ , on aura  $\frac{n}{1}a$  pour le terme où se  
 trouve la lettre  $a$  dans la troisième cellule; & de même  
 que si l'on multiplie  $\frac{n}{1}a$  par  $\frac{n+3-1}{3-1}=\frac{n+1}{2}$ , on aura  
 $\frac{n}{2}a\times\frac{n+1}{2}$  pour le terme où se trouve  $a$  dans la quatrié-  
 me cellule: de sorte que cette suite  $0, 1a, \frac{n}{1}a, \frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}a,$   
 $\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{3}a, \frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}\times\frac{n+3}{4}a$  &c, exprimera

par ordre tous les termes où se trouve la lettre  $a$ , dans les cellules du rang parallèle dont  $n$  est l'exposant. Ainsi si  $n=5$ , la suite  $0, 1a, 5a, 15a, 35a$  &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre  $a$  dans les cellules du cinquième rang parallèle.

## LEMMES III.

467. Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre  $b$  dans une cellule quelconque, par la somme des exposants de son rang parallèle & de son rang perpendiculaire moins 2, & qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire ; je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme  $10b$  de la cinquième cellule du troisième rang perpendiculaire par  $5+3-2=6$ , & qu'on divise le produit par 3, on aura  $20b$  pour la somme du terme  $10b$ , & de tous les autres  $6b, 3b, 1b$ , qui sont au dessus de lui :

Il est visible que cette propriété se rencontre dans le premier rang perpendiculaire où toutes les cellules renferment la même valeur  $1b$ , excepté la première dans laquelle la lettre  $b$  ne se rencontre point. Or de cela seul l'on prouvera comme l'on vient de faire dans le Lemme précédent à l'égard des termes qui sont multiples de,  $a$ , qu'elle se doit rencontrer dans le second rang perpendiculaire, dans le troisième, dans le quatrième, & ainsi dans tous les autres à l'infini. D'où l'on conclura que si  $n$  designe l'exposant d'un rang parallèle quelconque autre que le premier ; la suite  $1b, \frac{n-1}{1}b, \frac{n-2}{1}b, \frac{n-3}{1}b, \frac{n-4}{1}b, \frac{n-5}{1}b, \frac{n-6}{1}b, \frac{n-7}{1}b, \frac{n-8}{1}b, \frac{n-9}{1}b, \frac{n-10}{1}b$  &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre  $b$  dans les cellules du rang parallèle dont  $n$  est l'exposant. Ainsi si  $n=5$ , la suite  $1b, 4b, 10b, 20b, 35b$  &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve  $b$  dans le cinquième rang parallèle.



## COROLLAIRE.

468. IL suit de ces deux derniers Lemmes, que si l'on ajoute par ordre tous les termes de cette suite à ceux de la précédente, on en formera une,  $1b, 1a, +\frac{n-1}{1}b, \frac{n}{1}a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}b, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}b, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{3}a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}b, \&c$ ; ou en abregeant l'expression,  $b, a + \frac{n-1}{1}b, a + \frac{n-1}{2}b \times \frac{n}{1}a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, a + \frac{n-1}{4}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \&c$ . qui exprimera par ordre toutes les cellules du rang parallele de la Table dont  $n$  est l'exposant.

D'où l'on voit que par le moyen de cette suite, on peut trouver tout d'un coup telle cellule qu'on voudra, les exposans de son rang parallele & perpendiculaire étant donnés; puisque prenant dans la suite generale le terme qui répond à l'exposant du rang perpendiculaire, c'est à dire, le quatrième terme, si le rang perpendiculaire est le quatrième, le cinquième, s'il est le cinquième &c, & mettant dans ce terme à la place de  $n$  l'exposant du rang parallele, on aura la cellule que l'on cherche. Que l'on demande, par exemple, la cinquième cellule du quatrième rang perpendiculaire; ayant mis dans le quatrième terme  $a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ , à la place de  $n$  l'exposant du rang parallele de la cellule, on trouvera  $a + \frac{4}{3}b \times 15$ , c'est à dire,  $15a + 20b$  pour cette cellule; & il en est ainsi de toutes les autres.

## LEMMES IV.

469. SI l'on fait  $a=2$  &  $b=1$  dans le quarré de colonnes de l'article 464, on le changera en celui-ci; duquel je dis que le premier rang parallele contient de suite les premiers termes de tous les rangs perpendiculaires de la Table de l'article 443; le second rang parallele, les seconds termes; le troisième

K k k ij

rang, les troisièmes termes ; & ainsi de suite à l'infini.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	2	2	2	2	2	2	2
2.	1	3	5	7	9	11	13
3.	1	4	9	16	25	36	49
4.	1	5	14	30	55	91	140
5.	1	6	20	50	105	196	336
6.	1	7	27	77	182	378	714
7.	1	8	35	112	294	672	1386

Cela est une suite naturelle de l'article 445, & de la formation du quarré de cellules de l'article 464. expliquée dans ce même article & dans le suivant 465.

## COROLLAIRE.

470. Si l'on fait  $b=1$  &  $a=2$  dans la suite générale de l'article 468.  $b$ ,  $a + \frac{n-1}{1}b$ ,  $a + \frac{n-1}{2}b \times \frac{n}{1}$ ,  $a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ ,  $a + \frac{n-1}{4}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$  &c ; on la changera en cette autre 1,  $\frac{n+1}{1}$ ,  $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ ,  $\frac{n+5}{3} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ ,  $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$  &c, par le moyen de laquelle on trouvera tout d'un coup le coefficient de tel terme qu'on voudra de la Table de l'article 443, son rang perpendiculaire & le quantième qu'il y occupe étant donnés. Voici la règle.

On prendra dans cette suite le terme qui répond au rang perpendiculaire donné, c'est à dire le troisiéme, si c'est le troisiéme rang, le quatriéme, si c'est le quatriéme &c ; & ayant mis dans ce terme à la place de  $n$  le nombre qui expose le quantième du terme dans son rang perpendiculaire, c'est à dire 4 s'il est le quatriéme, 5, s'il est le cinquiéme &c, on aura le coefficient qu'on cherche. Si l'on demande, par exemple, le coefficient du quatriéme terme 14x du troisiéme rang perpendicu-

laire; on mettra dans le troisiéme terme  $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$  à la place de  $n$  le nombre 4, & l'on aura 14 pour le coefficient cherché.

Car l'exposant du rang perpendiculaire du coefficient pris dans la Table de l'article 443, est le même que l'exposant du rang perpendiculaire du quarré de cellules de l'article précédent; & le quantiéme que ce coefficient occupe dans son rang perpendiculaire, est l'exposant du rang parallele du quarré de cellules. D'où l'on voit que cette regle n'est qu'une application de celle de l'article 468, à ce cas particulier ou  $a=2$  &  $b=1$ .

## L E M M E V.

471. Si l'on met 1 à la place de  $b$ , dans le quarré de cellules de l'article 464; on le changera en celui-ci, dont je dis que les rangs perpendiculaires contiennent par ordre tous les nombres qu'on appelle Figurés: sçavoir le premier rang les nombres du premier ordre qui sont les unités, le second rang les nombres naturels ou du second ordre qui se forment par l'addition continuelle des unités, le troisiéme rang les nombres triangulaires ou du troisiéme ordre qui se forment par l'addition continuelle des naturels, le quatriéme les nombres pyramidaux ou du quatriéme ordre qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires, & ainsi à l'infini.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	2	3	4	5	6	7
3.	1	3	6	10	15	21	28
4.	1	4	10	20	35	56	84
5.	1	5	15	35	70	126	210
6.	1	6	21	56	126	252	462
7.	1	7	28	84	110	462	924

Car selon le même article 464, chaque cellule est.

égale à celle qui est à gauche, plus à toutes les autres qui sont au dessus.

M. Paschal a fait un *Traité* qui a pour titre *Triangle Arithmetique*, dans lequel il considère les propriétés de ces nombres, & fait voir qu'ils sont d'un très-grand usage dans plusieurs questions d'Arithmetique.

## COROLLAIRE.

472. Si l'on fait  $a=1$  &  $b=1$  dans la suite generale de l'article 468.  $b, a+\frac{n-1}{1}b, a+\frac{n-1}{2}b \times \frac{n}{1}, a+\frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, a+\frac{n-1}{4}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{3}$  &c; on changera en cette autre 1,  $n, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{3}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{3} \times \frac{n+5}{4}$  &c, qui servira à trouver tout d'un coup tel nombre figuré qu'on voudra, son ordre étant donné avec le quantième qu'il y occupe. Voici comment.

On prendra dans cette dernière suite le terme qui répond à l'ordre donné, c'est à dire le troisième, si c'est le troisième ordre, le quatrième, si c'est le quatrième ordre &c; & ayant mis à la place de  $n$  le nombre qui expose le quantième du nombre figuré, c'est à dire 4, s'il doit être le quatrième, 5, s'il doit être le cinquième &c, on aura ce nombre. Qu'il faille, par exemple trouver le cinquième nombre du quatrième ordre; je mets dans le quatrième terme  $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{3}$  de la suite à la place de  $n$  le nombre 5, & j'ai 35 pour le nombre cherché.

Ceci n'est autre chose que l'application de la règle de l'article 468. à ce cas particulier.

## PROBLEME I.

473. SOIT proposé de trouver une suite generale, qui exprime par ordre tous les termes d'un rang parallele quelconque, de la Table de la division des arcs de l'article 443.



& qui sert à les continuer autant que l'on veut. Si l'on suppose, par exemple, dans celle-ci, que  $r$  exprime le quantième du terme dont on veut avoir le coefficient; il sera exprimé par la fraction generale

$$\frac{r \times r - 1 \times r - 2 \times r - 3 \times r - 4 \times r - 5 \times r - 6 \times r - 7}{r - 1 \times r - 2 \times r - 3 \times r - 4 \times r - 5 \times r - 6 \times r - 7}$$

, en observant que le numérateur & le dénominateur doivent avoir chacun autant de termes, que le nombre  $r-1$  contient d'unités. Ainsi si  $r=5$ , on aura pour le coefficient du cinquième terme, la fraction  $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ : si  $r=4$ , on aura  $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$ .

Il faut remarquer que le nombre des termes de cette suite est toujours déterminé, de sorte qu'il est égal à la plus grande moitié de l'exposant du rang parallele qu'elle exprime, lorsque cet exposant est impair, & à sa moitié au juste lorsqu'il est pair. Ainsi elle n'a que trois termes, lorsqu'elle exprime le cinquième ou le sixième rang parallele, elle n'en a que quatre, lorsqu'elle exprime le septième ou le huitième rang parallele, &c.

## PROBLEME II.

474. SOIT proposé de trouver une suite generale, qui exprime par ordre tous les termes de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'inscription des polygones reguliers de l'article 457.

- Comme le second terme de chaque rang perpendiculaire répond au premier de celui qui est à droit, il
- \* Art. 458. s'ensuit \* que si  $m+1$  est l'exposant d'un rang parallele quelconque de cette Table, les coefficients des quatre premiers termes de ce rang seront 1, 1,  $m-1$ ,  $m-2$ ; le coefficient du cinquième terme sera le nombre triangulaire dont le quantième est  $m-3$ , c'est à dire \*  $\frac{m-3}{1}$   $\times \frac{m-2}{2}$ ; celui du sixième rang sera le nombre triangulaire dont le quantième est  $m-4$ , c'est à dire  $\frac{m-4}{1}$   $\times \frac{m-3}{2}$ ; celui du septième terme sera le nombre pyramidal

midal dont le quantième est  $m-5$ , c'est à dire  $\frac{m-5}{1}$   
 $\times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}$ ; celui du huitième terme sera le nombre  
 pyramidal dont le quantième est  $m-6$ , c'est à dire  
 $\frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}$ ; celui du neuvième terme sera le  
 nombre du cinquième ordre dont le quantième est  
 $m-7$ , c'est à dire  $\frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}$ ; & ainsi  
 à l'infini. Si donc l'on joint à ces coefficients les puissances  
 de  $x$  qu'ils affectent, en faisant précéder le second &  
 le troisième terme du signe  $-$ , le quatrième & le cinquième  
 du signe  $+$ , le sixième & le septième du signe  $-$ , &  
 ainsi alternativement de deux en deux, on aura cette  
 suite générale  $x^m - x^{m-1} - \frac{m-1}{1} x^{m-2} + \frac{m-2}{2} x^{m-3}$   
 $+ \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} x^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} x^{m-5} + \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2}$   
 $\times \frac{m-3}{3} x^{m-6} - \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} x^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2}$   
 $\times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} x^{m-8}$  &c, qui exprime par ordre tous les  
 termes du rang parallèle de la Table de l'article 457  
 dont l'exposant est  $m-1$ : où l'on doit observer de ne  
 prendre qu'autant de termes que le nombre  $m-1$   
 contient d'unités.

## PROBLÈME III.

475. **T**ROUVER une suite générale, qui exprime par  
 ordre, les coefficients de tous les termes, de tel rang parallèle  
 qu'on voudra, de la Table de l'article 460; ou (ce qui est la  
 même chose) d'une puissance quelconque du binôme  $x+y$ .

Soit en général  $m$  l'exposant d'un rang parallèle quel-  
 conque de cette Table, il est clair que les coefficients  
 des deux premiers termes de ce rang seront toujours \* *Art. 461.*  
 $1, m$ ; & comme le second terme de chaque rang perpen-  
 diculaire à commencer par le second, répond au pre-  
 mier terme du rang qui est à droit, il s'ensuit que le  
 coefficient du troisième terme du rang parallèle sera \* *Art. 462.*

le nombre triangulaire dont le quantième est  $m-1$ , c'est à dire  $\frac{m-1}{1} \times \frac{m}{2}$ ; que celui du quatrième terme sera le nombre pyramidal dont le quantième est  $m-2$ , c'est à dire  $\frac{m-2}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m}{3}$ ; que celui du cinquième terme sera le nombre du cinquième ordre dont le quantième est  $m-3$ , c'est à dire  $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-1}{3} \times \frac{m}{4}$ ; & ainsi à l'infini. On aura donc pour la suite generale qu'on demande  $1, m, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$  &c.

## COROLLAIRE.

476. DE LA il suit que  $x+y^m = x^m + \frac{m}{1} y x^{m-1} + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} y^2 x^{m-2} + \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} \dots$   
 $+ \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$  &c.

## PROBLÈME IV.

477. TROUVER une équation generale qui serve à diviser un arc de cercle donné  $AR$ , en autant de parties égales qu'on voudra.

## PREMIÈRE MANIÈRE.

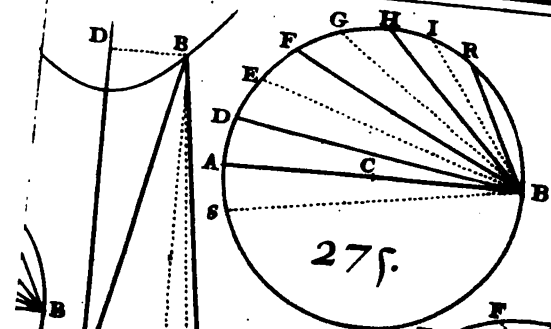
FIG. 279. Soit en general  $m$  le nombre des parties égales, l'arc  $AD$  la première de ces parties; soit tiré le diamètre  $AB$ ; & les cordes  $BD, BR$ ; & soit le rayon  $CA$  ou  $CB=1$ ; la corde donnée  $BR=a$ , la corde cherchée

\* Art. 444.  $BD=x$ . On aura  $\frac{1}{2}a = x^m - m x^{m-2} + \frac{m \times m-3}{2 \times 1} x^{m-4}$

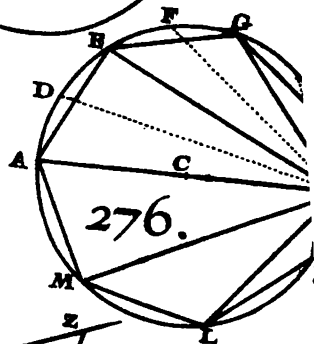
473.  $- \frac{m \times m-5 \times m-7}{3 \times 1 \times 2} x^{m-6} + \frac{m \times m-7 \times m-9 \times m-11}{4 \times 1 \times 2 \times 3} x^{m-8}$  &c,

(sçavoir  $+a$  lorsque l'arc donné  $AR$  est moindre que la demie circonférence; &  $-a$  lorsqu'il est plus grand)

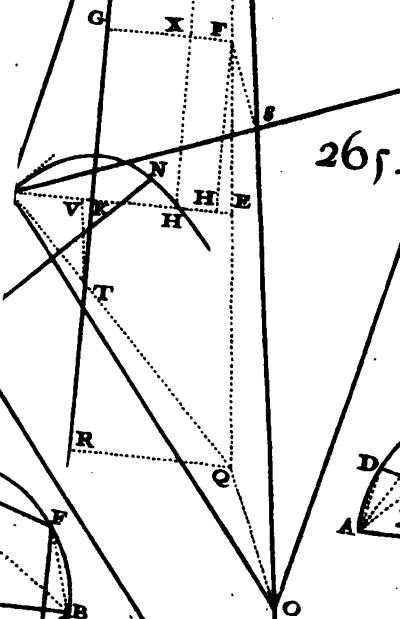




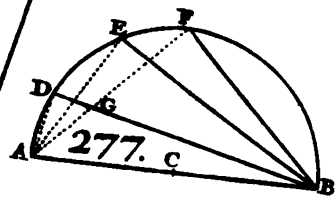
275.



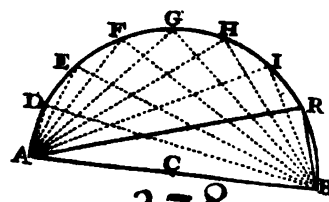
276.



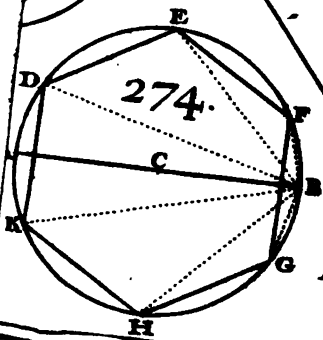
265.



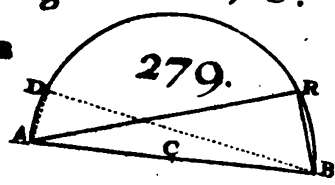
277.



278.



274.



279.



pour l'équation generale qu'on demande; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes, que la moitié du nombre  $m$  lorsqu'il est pair, ou la plus grande moitié lorsqu'il est impair contient d'unités; parce que le terme qui suivroit seroit nul ou zero.

Si  $m=5$ , il vient  $+a=x^5-5x^3+5x$ ; si  $m=7$ , on trouve  $+a=x^7-7x^5+14x^3-7x$ .

## SECONDE MANIERE.

Soit tiré le diametre  $AB$ , & les cordes  $BR$ ,  $AR$ ,  $BD$ ,  $AD$ , qui terminent l'arc donné  $AR$ , & l'arc cherché  $AD$ . Soit  $m$  le nombre des parties égales, le diametre  $AB=1$ , les cordes données  $BR=a$ ,  $AR=b$ ; & les cordes inconnues  $BD=x$ ,  $AD=y$ . On aura \* ces deux égalités generales  $+a=x^m$  \* Art. 463.

$$- \frac{m \times m - 1}{1 \times 1} y y x^{m-2} + \frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} \&c, \quad 475.$$

$$b = \frac{m}{1} y x^{m-1} - \frac{m \times m - 1 \times m - 2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} + \dots$$

$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5} \&c, \text{ dans lesquelles}$$

mettant à la place de  $m$ , le nombre de parties égales dans lesquelles l'arc  $AR$  doit être divisé, il en vient deux autres particulieres, dont la resolution fournit la valeur cherchée de la corde  $BD(x)$  ou  $AD(y)$ , après avoir fait évanouir l'inconnue  $y$  ou  $x$ , par le moyen de l'équation  $yy=1-xx$  ou  $xx=1-yy$ .

Soit par exemple  $m=y$ . On aura  $+a=x^7-21yyx^5+35y^4x^3-7y^6x$ , &  $b=7yx^6-35y^3x^4+12y^5xx-y^7$ , & l'on achevera le reste comme dans l'article 462.

## PROBLEME V.

478. TROUVER une équation generale, qui serve à inscrire dans un cercle donné, un polygone regulier quelconque ADEFGHK. &c. FIG. 280.

Soit tiré le diametre  $AB$ , & la corde  $BD$  qui terminent le premier côté du polygone; soit le rayon  $Ll$  ij

donné  $CA$  ou  $CB=1$ , la corde inconnue  $BD=z$ , & en general  $m$  la plus petite moitié du nombre des côtés du polygone, que je suppose être impair. On

\* Art. 457. aura  $o = z^m - z^{m-1} - \frac{m-1}{1} z^{m-2} + \frac{m-2}{1} z^{m-3} + \frac{m-3}{1} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} z^{m-5} + \frac{m-5}{1} z^{m-6} - \frac{m-6}{1} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} z^{m-8} - \frac{m-8}{1} z^{m-9} + \dots$

474.  $\times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8} \&c$ , pour l'équation generale

qu'on demande; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes que le nombre  $m+1$  contient d'unités, parce que celui qui suivroit seroit nul ou zero.

Soit par exemple 7 le nombre des côtés du polygone à inscrire, on aura  $m=3$ ; & partant  $o = z^3 - z^2 - 2z + 1$ , dont la plus grande racine  $z$  exprimera la corde  $BD$ , qui termine l'arc  $AD$ , qui a pour corde le premier côté  $AD$  du polygone. De même si le nombre des côtés est 11, on aura  $m=5$ ; & par consequent l'équation generale devient  $o = z^5 - z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 3z - 1$ , dont la plus grande des racines est  $z = BD$  ●

## PROBLEME VI.

FIG. 281.  
282.

479. DIVISER un angle donné en un nombre quelconque impair de parties égales, par le moyen d'un instrument.

1°. Soit proposé de diviser l'angle donné  $ECF$  en trois parties égales. Il faut avoir un rhombe  $ABCD$ , dont les quatre côtés soient mobiles autour de ses quatre angles, & duquel les deux côtés  $AB$ ,  $AD$ , soient indéfiniment prolongés vers  $X$  &  $Z$ ; attacher l'angle  $C$  du rhombe, dans le sommet  $C$  de l'angle donné  $ECF$ ; marquer sur les côtés  $CE$ ,  $CF$ , les points  $E$ ,  $F$ , en sorte que  $CE$  &  $CF$  soient égales chacune au côté  $CB$  ou  $CD$  ou  $DA$  ou  $AB$  du rhombe. Cela fait, il faut ouvrir ou resserer les côtés  $AX$ ,  $AZ$ , de l'angle  $BAD$ , en sorte qu'ils passent par les points  $E$ ,  $F$ ; &

l'angle  $BAD$  sera la troisième partie de l'angle  $ECF$ .

Car les triangles  $ABC$ ,  $BCE$ , étant isocèles, l'angle externe  $CBE$  ou son égal  $CEB$ , qui vaut les deux internes opposés  $BAC$ ,  $BCA$ , sera double de l'angle  $BAC$ ; & dans le triangle  $ECA$ , l'angle externe  $ECY$ , qui vaut l'angle  $CEA$  plus l'angle  $BAC$ , sera triple de l'angle  $BAC$ . On démontrera de même que l'angle  $FCY$  est triple de l'angle  $DAC$ . D'où il suit que l'angle donné  $ECF$  est triple de l'angle  $BAD$ . *Ce qu'il falloit &c.*

2°. Soit proposé de diviser l'angle donné  $HGK$ , en cinq parties égales. On attachera dans l'angle  $C$  du rhombe  $ABCD$  de l'instrument précédent, un autre rhombe  $CEGF$ , dont les côtés seront égaux à ceux du premier & mobiles aussi autour de leurs angles. On fichera l'angle  $G$  de ce dernier rhombe, dans le sommet  $G$  de l'angle donné  $HGK$ ; & ayant pris sur les côtés de cet angle les parties  $GH$ ,  $GK$ , égales chacune au côté  $GE$  de l'un des rhombes, on ouvrira ou fermera l'angle  $XAZ$  mobile autour du point  $A$ , en sorte que ses côtés  $AX$ ,  $AZ$ , touchent les angles  $E$ ,  $F$ , & passent en même temps par les points marqués  $H$ ,  $K$ . Je dis que l'angle  $XAZ$  ou  $BAD$  sera la cinquième partie cherchée de l'angle donné  $HGK$ .

Car ayant mené dans le rhombe  $ABCD$  la diagonale  $AC$ , prolongée indéfiniment vers  $Y$ ; elle passera par le point  $G$ , puisque les angles  $ECY$ ,  $FCY$ , étant triples des angles égaux  $BAC$ ,  $DAC$ , seront aussi égaux entr'eux. Or dans le triangle  $EGA$ , l'angle externe  $HEG$ , qui vaut les deux internes opposés  $BAC$ ,  $EGA$ , ou  $ECY$  (à cause du triangle isocèle  $CEG$ ), sera quadruple de l'angle  $BAC$ . Et partant dans le triangle  $AHG$ , l'angle externe  $HGY$ , qui vaut les deux internes opposés  $BAC$ ,  $GHA$  ou  $GEH$  (à cause du triangle isocèle  $EGH$ ), sera le quintuple de l'angle  $BAC$ . On prouvera de même que l'angle  $KGY$  sera quintuple de l'angle  $DAC$ ; d'où il est évident.

que l'angle entier  $HGK$  sera quintuple de l'angle entier  $BAD$  ou  $XAZ$ .

S'il falloit diviser un angle donné en sept parties égales, il n'y aura qu'à joindre aux deux rhombes précédens, un troisième rhombe égal & construit de la même manière; & ainsi de suite de deux en deux. Car la pratique & la démonstration se fera toujours de la même manière.

#### EXEMPLE.

480. **T**ROUVER entre deux lignes données  $a$  &  $b$ , autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soit l'inconnue  $x$  la première des moyennes proportionnelles qu'il est question de trouver; & l'on aura la progression geometrique continuë  $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$  &c, de laquelle on prendra le terme dont le quantième surpassé de 2 le nombre donné des moyennes proportionnelles, & l'égalant à la donnée  $b$  on formera une égalité, dont la résolution fournira la valeur de l'inconnue  $x$  qui est la première des moyennes proportionnelles que l'on cherche.

Qu'il faille, par exemple, trouver deux moyennes proportionnelles. On prendra dans la progression geometrique le quatrième terme  $\frac{x^3}{a^2}$ , qui étant égalé à la ligne  $b$ , donne  $x^3 = a^2 b$ ; & de même si l'on demande quatre moyennes proportionnelles, l'on aura  $x^5 = a^4 b$ . D'où il est facile de voir que si  $n$  marque en general le nombre des moyennes proportionnelles qu'il faut trouver entre les données  $a$  &  $b$ , on aura  $x^{n+1} = a^n b$  pour l'égalité generale qu'il faut résoudre. Or cela posé.

Soit 1°.  $x^{17} = a^{16} b$  qui sert à trouver seize moyennes proportionnelles. Je multiplie les deux membres de cette égalité par  $x^1$ , afin d'avoir  $x^{18} = a^{16} b x^1$ , dont la plus haute dimension 20 est le produit des deux nombres 4 & 5 qui se suivent immédiatement. Je prends l'é-

quation  $x^3 = a^4 y$ ; ce qui donne en élevant chaque membre à la puissance quatrième  $x^{12} = a^{16} y^4 = a^{16} b^3 x^3$ , d'où je tire une autre équation  $y^4 = b^3 x^3$ , dont le lieu étant construit séparément, donnera par son intersection avec celui de la supposée  $x^3 = a^4 y$ , la valeur de l'inconnue  $x$ . Ou bien je prends l'équation  $x^4 = a^5 y$ , dont j'éleve chaque membre à la quatrième puissance; & les multipliant ensuite par  $x$ , j'ai  $x^{17} = a^{20} y^4 x = a^{20} b^3$ , d'où je tire  $y^4 x = a^5 b$ , dont le lieu étant construit séparément avec celui de l'équation  $x^4 = a^5 y$ , donnera par son intersection la valeur cherchée de l'inconnue  $x$ .

Soit 2°.  $x^{11} = a^{10} b$  qui sert à trouver trente moyennes proportionnelles. Je multiplie de part & d'autre par  $x^5$ , afin d'avoir  $x^{16} = a^{10} b x^5$ , dont la plus haute dimension 36 est le carré de 6: c'est pourquoi faisant  $x^6 = a^2 y$ , & prenant de part & d'autre la sixième puissance, j'ai  $x^{36} = a^{10} y^6 = a^{10} b^3$ , d'où je tire  $x^6 = b^3 y$ , dont le lieu étant construit séparément avec celui de l'équation que j'ai prise d'abord  $x^6 = a^2 y$ , donnera par son intersection la valeur de l'inconnue  $x$ . Ou bien ayant pris comme ci-dessus l'équation  $x^6 = a^2 y$ , je l'éleve à la cinquième puissance, & la multipliant ensuite par  $x$ , j'ai  $x^{31} = a^{10} y^5 x = a^{10} b$ , ce qui donne  $y^5 x = a^2 b$ . D'où l'on voit que le lieu de l'équation  $x^6 = a^2 y$ , étant construit séparément avec le lieu de l'autre équation  $y^5 x = a^2 b$ , donnera la résolution de l'égalité proposée  $x^{11} = a^{10} b$ ; de sorte que l'on peut choisir entre les deux lieux  $y^6 = b^3 x^5$ , ou  $y^5 x = a^2 b$ , celui qu'on jugera le plus simple. Il en est ainsi de tous les autres exemples qu'on peut se former à plaisir.

Il est à remarquer que si la dimension de l'inconnue  $x$  n'étoit pas un nombre premier, l'égalité proposée se pourroit toujours abaisser. Si l'on avoit, par exemple,  $x^8 = a^8 b$ , qui sert à trouver huit moyennes proportionnelles; on trouveroit en extrayant de part & d'autre la racine cubique  $x^3 = \sqrt[3]{a^8 b}$ . Or afin que le nombre  $a^8 b$  soit un cube, il n'y a qu'à trouver une ligne  $z$  dont le

cube  $x^3 = aab$ , ou ce qui est la même chose de trouver entre  $a$  &  $b$  deux moyennes proportionnelles ; car mettant à la place de  $aab$  sa valeur  $x^3$ , on aura  $x^2 = a^2 x^3$  ou  $x^3 = a^2 x$ , de sorte qu'en resolvant ces deux égalités  $x^3 = aab$ , & ensuite  $x^3 = aax$  qui ne sont que du troisième degré, on trouvera la valeur de l'inconnue  $x$ , qui est la première des huit moyennes proportionnelles entre les extrêmes  $a$  &  $b$ . De même si l'on avoit  $x^{14} = a^{11}b$  qui sert à trouver treize moyennes proportionnelles, il viendrait en extrayant de part & d'autre la racine quarrée  $x^7 = \sqrt{a^{11}b}$ . Or afin que  $\sqrt{a^{11}b}$  soit un quarré, il faut trouver une ligne  $x$  dont le quarré  $xx = ab$  ; car substituant à la place de  $ab$ , le quarré  $xx$  dans l'égalité proposée, on aura  $x^{14} = a^{11}xx$  ou  $x^7 = a^6x$  ; c'est pour quoi il n'y aura qu'à resoudre d'abord l'égalité du second degré  $xx = ab$ , & ensuite celle du septième  $x^7 = a^6x$ .

On doit encore remarquer que ces sortes d'égalités qui servent à trouver des moyennes proportionnelles, & dont la dimension de l'inconnue est un nombre premier, n'ont qu'une racine réelle & toutes les autres imaginaires, dont la raison est qu'il ne peut y avoir qu'une seule ligne qui soit la première des moyennes proportionnelles cherchées.

## REMARQUE.

FIG. 285.

481. ON peut resoudre le Problème précédent par le moyen d'un instrument geometrique dont la construction est telle. Soient deux lignes indéfinies  $XY$ ,  $YZ$ , mobiles autour du point  $Y$ , en sorte qu'elles se puissent ouvrir & fermer. Soit attachée à un point quelconque fixe  $B$  du côté  $YX$ , une perpendiculaire indéfinie  $BC$  sur ce côté, laquelle chasse devant elle (pendant que l'angle  $XYZ$  s'ouvre) par le point  $C$  où elle rencontre l'autre côté  $YZ$ , la perpendiculaire indéfinie  $CD$  sur ce dernier côté, qui chasse de même par



par le point  $D$  où elle rencontre le côté  $YX$ , la perpendiculaire indéfinie  $DE$ , qui chasse encore de même par le point  $E$  où elle rencontre le côté  $YZ$ , la perpendiculaire indéfinie  $EF$ ; qui chassera par le point  $F$  où elle rencontre le côté  $YX$ , la perpendiculaire  $FG$ ; qui chasse encore par le point  $G$  où elle rencontre le côté  $YZ$ , la perpendiculaire  $GH$ ; & ainsi de suite à l'infini, en augmentant autant que l'on voudra le nombre des perpendiculaires sur les côtés  $YX$  &  $YZ$ . Cela fait, soit proposé, par exemple, de trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux lignes droites données  $a$  &  $b$ . Ayant pris sur le côté  $YZ$  la partie  $YG$  quatrième proportionnelle aux trois lignes  $a$ ,  $b$ ,  $YB$ , on ouvrira le côté  $XY$  de l'instrument, jusqu'à ce que la cinquième perpendiculaire  $FG$  (parce qu'il est question de trouver quatre moyennes proportionnelles) passe par le point  $G$ ; & alors les lignes  $YC$ ,  $YD$ ,  $YE$ ,  $YF$ , seront les quatre moyennes proportionnelles entre les extrêmes  $YB$ ,  $YG$ ; & partant la quatrième proportionnelle aux trois lignes  $YB$ ,  $YC$ ,  $a$  sera la première des quatre moyennes proportionnelles demandées.

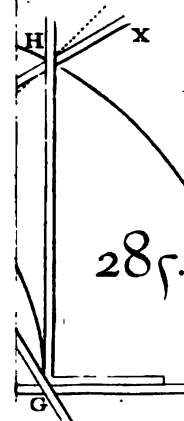
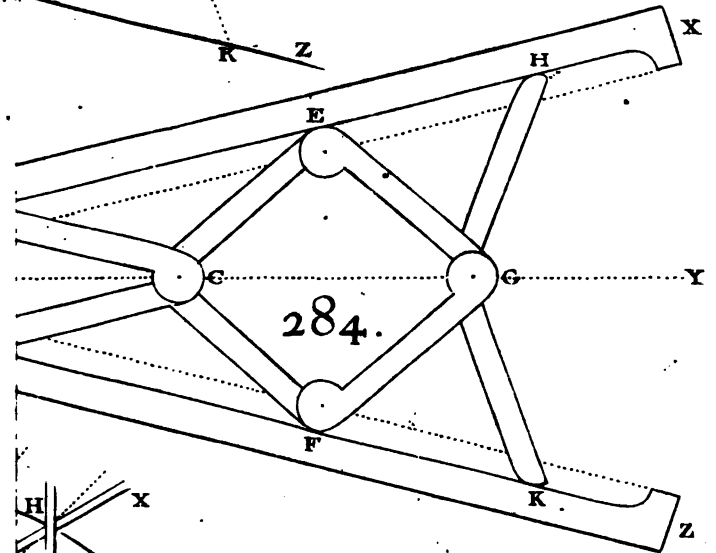
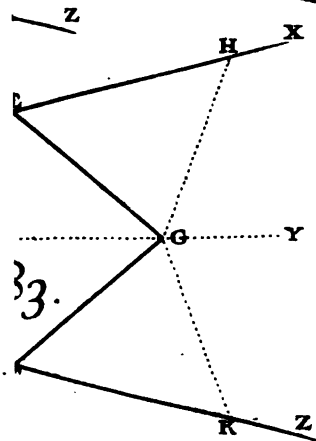
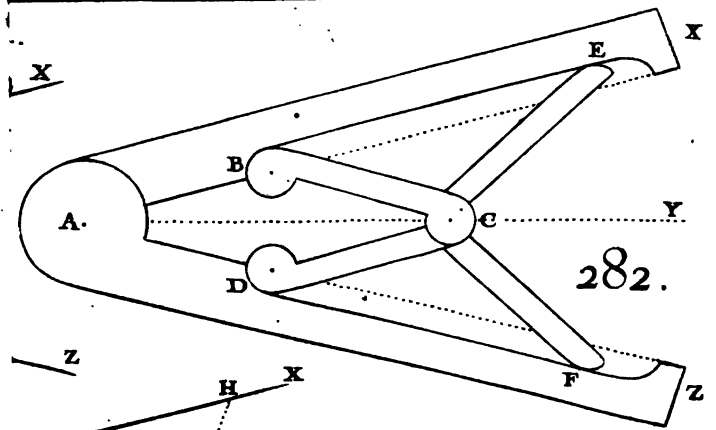
Car les triangles rectangles  $YBC$ ,  $YCD$ ,  $YDE$ ,  $YEF$ ,  $YFG$ , étant tous semblables; leurs côtés  $YB$ ,  $YC$ ,  $YD$ ,  $YE$ ,  $YF$ ,  $YG$ , seront en progression géométrique continuë. Donc &c.

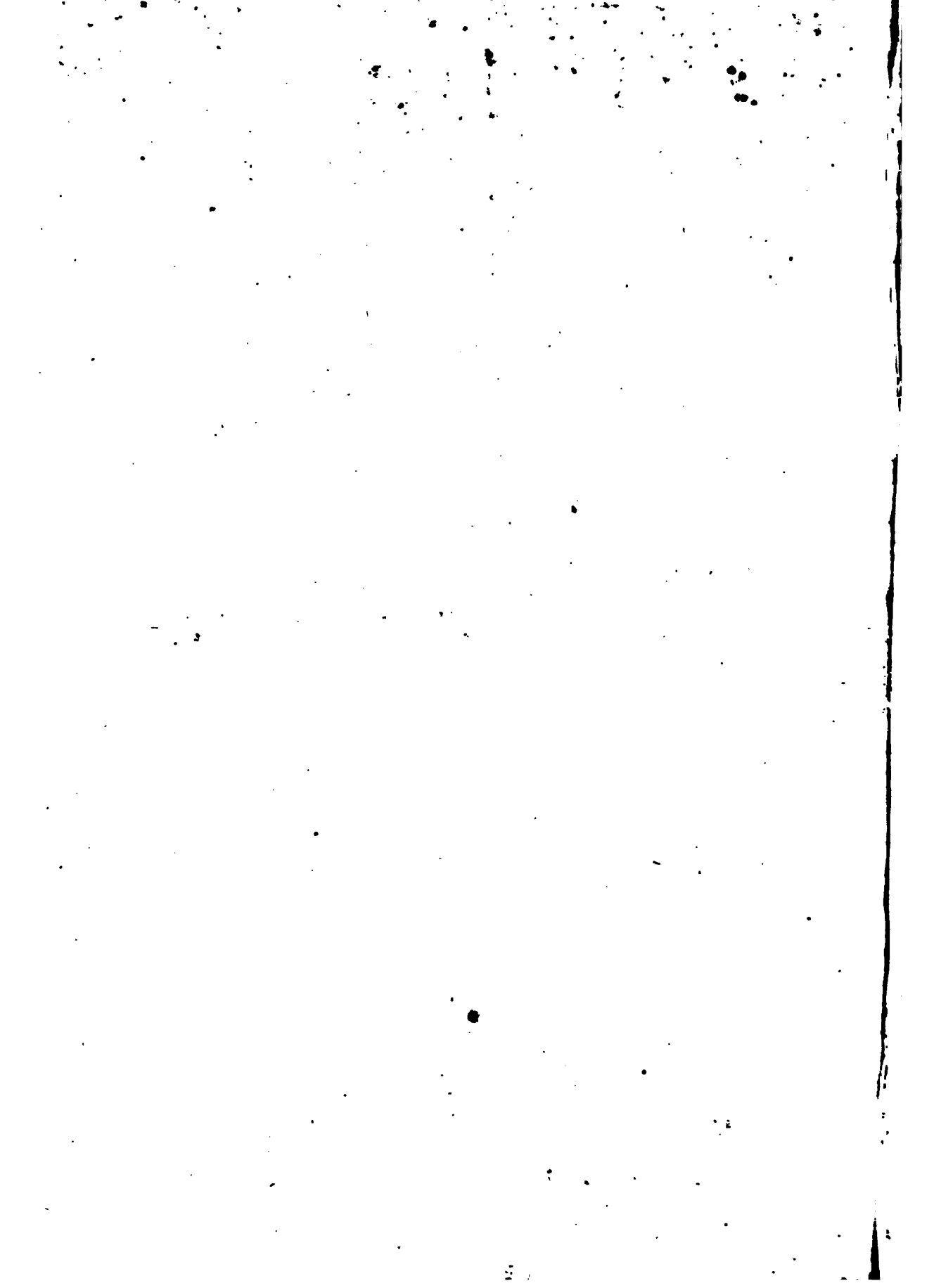
Il est clair que pendant que l'angle  $XYZ$  s'ouvre de plus en plus, le point  $B$  décrit un arc de cercle  $AB$ ; & que les intersections continues  $D$ ,  $F$ ,  $H$ , des perpendiculaires  $CD$ ,  $EF$ ,  $GH$ , sur le côté  $YZ$ , avec l'autre côté  $YX$ , décrivent des lignes courbes  $AD$ ,  $AF$ ,  $AH$ , qui servent à trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra. Car si l'on décrit, par exemple, du diamètre  $YE$  un demi cercle, il coupera la courbe  $AD$  en un point  $D$ , tel que  $YD$  est la seconde des deux moyennes proportionnelles, entre les ex-

trêmes  $YB$  ou  $YA$  &  $YE$ ; & de même si l'on décrit un demi cercle du diamètre  $YG$ , il coupera la ligne courbe  $AF$  en un point  $F$ , tel que  $YF$  est la dernière des quatre moyennes proportionnelles entre  $YA$  &  $YG$  &c. Sur quoi il est à propos de remarquer que la ligne courbe  $AD$  est du quatrième degré, la ligne courbe  $AF$  du huitième, la courbe  $AH$  du seizième &c; ce que je prouve ainsi.

Soient 1<sup>o</sup> les inconnues & indéterminées  $YC=x$ ,  $CD=y$ ,  $YD=z$ , & la connue  $YA$  ou  $YB=a$ , on aura à cause des triangles rectangles semblables  $YCD$ ,  $YBC$ , cette équation  $YB(a)=\frac{xx}{z}$ , & à cause du triangle rectangle  $YCD$  cette autre  $yy+xx=zz$ , dans laquelle mettant à la place de  $z$  sa valeur  $\frac{xx}{a}$  trouvée par le moyen de la première équation, il vient  $ayy=x^4-aa xx$ ; ce qui fait voir que la courbe  $AD$  est un lieu du quatrième degré. Soient 2<sup>o</sup> les inconnues & indéterminées  $YE=x$ ,  $EF=y$ ,  $YF=z$ , & la connue  $YA$  ou  $YB=a$ ; on aura à cause des triangles rectangles semblables  $YFE$ ,  $YED$ ,  $YDC$ ,  $YCB$ , cette équation  $YB(a)=\frac{xx}{z}$ , & à cause du triangle rectangle  $YEF$  cette autre  $yy+xx=zz$ , dans laquelle faisant évanouir l'inconnue  $z$  par le moyen de la première équation, & ôtant les incommensurables, on trouve  $ayy^6+3aaxxy^4+3aax'yy^2+aa x^6=x^8$ ; d'où l'on voit que la courbe  $AF$  est un lieu du huitième degré. On prouvera de même que la courbe  $AH$  est un lieu du seizième degré &c.

Maintenant puisque selon l'exemple on peut trouver deux moyennes proportionnelles, en n'employant que deux lignes du second degré; quatre moyennes proportionnelles, en se servant d'un lieu du second degré, & d'un autre du troisième; au lieu qu'ici il faut dans le premier cas un lieu du quatrième, qui





est la ligne  $AD$ , & un lieu du second qui est le cercle  $YDE$ ; & dans le second un lieu du huitième, savoir; la ligne courbe  $AF$ ; & un lieu du second, savoir le cercle  $YFG$ : il s'ensuit que ces lignes courbes  $AD$ ,  $AF$ ,  $AH$ , sont beaucoup trop composées pour résoudre ce Problème. Cependant la facilité de la construction, & de la démonstration, récompense en quelque sorte ce défaut.

FIN.

---

FAUTES A CORRIGER.

**P**age 137, à la marge de l'Art. 104, au lieu de FIG. 100.  
III. lisez, FIG. 110. III.

Page 148, lig. 9, au lieu de CL, lisez, CK.

Page 215, lig. dern. lignes, lisez, signes.

Page 263, lig. 1, au lieu de EXEMPLE II. lisez, EXEMPLE VI.

Page 264, vis à vis de la lig. 14, à la marge, au lieu de, Art. 287, lisez, Art. 237.

Page 293, sur la fin, COROLLAIRE, lisez, COROLLAIRE II.

Page 320, lig. 2, au lieu de, 389, lisez, 398.

Page 321, lig. 16, construire, lisez, trouver.

Page 348, au lieu de, FIG. 334. lisez, FIG. 234.

M m m ij

P R I V I L E G E D U R O Y.

**L**OUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE  
ET DE NAVARRE: A nos amez & feaux Confeillers les  
Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordi-  
naires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs,  
Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il  
appartiendra: SALUT. Nôtre Academie Royale des Sciences Nous  
ayant très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plu  
luy donner par un Reglement nouveau de nouvelles marques de  
nôtre affection, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les  
Sciences qui font l'objet de ses exercices; enforte qu'outre les Ou-  
vrages qu'Elle a déjà donnez au public, Elle seroit en état d'en pro-  
duire encore d'autres, s'il Nous plaisoit luy accorder de nouvelles  
Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous luy avons accor-  
dées en datte du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont  
été déclarées nulles par un Arrest de nôtre Conseil d'Etat du 13. du  
mois d'Aoust dernier. Et desirant donner à ladite Academie en  
corps, & en particulier à chacun de ceux qui la composent, toutes  
les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs tra-  
vaux utiles au public; Nous avons permis & permettons par ces  
Presentes à ladite Academie, de faire imprimer, vendre & debiter  
dans tous les lieux de nôtre obéissance, par tel Imprimeur qu'Elle  
voudra choisir, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois  
que bon luy semblera: *Toutes les Recherches ou Observations jour-  
nalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les  
Assemblée de l'Academie Royale des Sciences; comme aussi les Ou-  
vrages, Memoires ou Traitez de chacun des particuliers qui la com-  
posent, & generalement tout ce que ladite Academie voudra faire  
paroître sous son nom, lorsqu'après avoir examiné & approuvé les-  
dits Ouvrages aux termes de l'article xxx. dudit Reglement, elle  
les jugera dignes d'être imprimez: & ce pendant le tems de dix  
années consecutives, à compter du jour de la datte desdites Pre-  
sentes. Faisons très-expresses deffenses à tous Imprimeurs, Librai-  
res, & à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition  
que ce soit, d'imprimer, faire imprimer en tout ni en partie, au-  
cun des Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Academie;  
comme aussi d'en introduire, vendre & debiter d'impression étran-  
gere dans nôtre Royaume sans le consentement par écrit de ladite  
Academie ou de ses ayans cause, à peine contre chacun des contre-  
venans de confiscation des Exemplaires contrefaits au profit de son-*



